المدرسة العليا للأساتذة – القبة –

دروس لأساتذة التعليم المتوسط

السنة الثالثة رياضيات

الهندسة التآلفية

الإرسال الأول

إعداد الأستاذ: مصطفى دبة

تقـديـم:

تـهدف الـهندسة التآلفية إلى تعريف مجموعات تسمى عناصرها نقاطاً، مستخدمة خواصَّ مُمَيَّزةً تسمح بالحديث عن مفاهيمَ من مثل على نفس الاستقامة، التوازي، التقاطع وغيرها.

تـهدف هذه الدروس إلى عرض أساسيات هذه الـهندسة وخواصها الأولى، لتمكين القارئ من تحصيل أهم المفاهيم الخاصة التي تسمح له بمناقشة مسائلها.

إنّ عملية التجبير التي تعرضت لها الـهندسة، أفقدت الـهندسة الكلاسيكية كثيرا من دورها في توسيع المدارك

تسعى الدروس المقترحة، من خلال اختيار الأمثلة في الفضاءات التآلفية ذات البعدين 2 و3 إلى توضيح أننا في حقيقة الأمر، نقدِّم الـهندسة الكلاسيكية بشكل آخر،يسمح بتعميم النتائج إلى فضاءات تآلفية كيفية

الفهرس

تعاريـــف

تعريف الزمرة (Groupe):

لتكن G مجموعة غير خالية و T عملية داخلية معرّفة على G

نقول أنَّ الثنائية $\left(G, T\right)$ **زمرة** إذا كانت العملية T تجميعية وتملك عنصرا حياديا (e) ولِكلٍّ عنصر من G نظير في G بالنسبة للعملية T

- إذا كانت العملية T تبديليه نقول أنَّ الزمرة تبديليه

أمثلة :

1) إنَّ $(\mathbb{Z}, +)$ ، $(\mathbb{R}, +)$، $(\mathbb{R}^*, \times)$ زمر تبديلية.

2) مثال على زمرة غير تبديلية:

نعتبر المجموعة $E = \{1,2,3\}$ ونعرِّف المجموعة S_E على أنّها مجموعة كل

التطبيقات المتقابلة من E نحو E ونزوِّدها بعملية تركيب التطبيقات (o).

لدينا

$$S_E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

حيث رمزنا اختصارًا بٍ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ للتعبير عن التطبيق المعرَّف بـــ

$$f(a) = a', f(b) = b', f(c) = c'$$

إنَّ هذه الزمرة غير تبديلية، فمثلاً لدينا

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} o \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} o \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

تماثـل الزّمر(Morphisme de groupes) :

لتكن (G_1,T_1) و (G_2,T_2) زمرتين وليكن $\varphi : G_1 \to G_2$ تطبيقا بينهما

نقول أن التطبيق φ **تماثـــل** إذا حقّق:

$$\forall x , y \in G_1 : \quad \varphi(xT_1y) = \varphi(x)T_2\varphi(y)$$

فِعل زمرة (Action d'un groupe) :

لتكن E مجموعة كيفية و (G,T) زمرة عنصرها الحيادي e

نسمِّي **فِـــعلَ** الزمرة G على المجموعة E كلّ تطبيق $\phi : G \times E \to E$

بحيث:

$$\forall g, g' \in G, \forall x \in E : \begin{cases} \phi(g', \phi(g,x)) = \phi(g'Tg, x) \\ \phi(e,x) = x \end{cases}$$

فِعل عنصر(Action d'un élément)

ليكن $g \in G$ نسمّي **فِعــل** العنصر g على المجموعة E

التطبيق

$$\begin{cases}\phi_g : E \to E \\ x \mapsto \phi_g(x) = \phi(g,x)\end{cases}$$

الفِعل البسيط لزمرة (Action simple) :

نقول أن **فِعــل** الزمرة G على المجموعة E **بسيط** إذا تحقق :

$$\forall (g,x) \in G \times E \wedge g \neq e : \phi(g,x) \neq x$$

الفِعل المتعدِّي لزمرة (Action transitive) :

نقول أن **فِعــل** الزمرة G على المجموعة E متعدٍّ إذا تحقق :

$$\forall (x,x') \in E \times E, \exists g \in G : \phi(g,x) = x'$$

أمثــلة :

مثال 1. كل زمرة (G,T) لها **فِعــل بسيط ومتعدٍّ** على نفسها

بالفعل، نعرِّف التطبيق

$$\begin{cases}\phi : G \times G \to G \\ (g,x) \mapsto \phi(g,x) = gTx\end{cases}$$

إنّ التطبيق ϕ يحقق

$$\forall g, g' \in G, \forall x \in E : \begin{cases}\phi(g', \phi(g,x)) = \phi(g', gTx) = g'T(gTx) = (g'Tg)Tx = \phi(g'Tg, x) \\ \phi(e,x) = eTx = x\end{cases}$$

إن هذا **الفــعل بسيط :**

بالفعل لديتا $\forall (g,x) \in G \times E \wedge g \neq e : \phi(g,x) = gTx \neq x$

لأنه لو كان $\phi(g,x)=gTx=x$ ، بتركيب نظير x من الطرفين نجد $g=e$.

إن هذا **الفـــعل متعدٍّ:**

بالفعل:القضية $\forall(x,x')\in E\times E,\exists g\in G:\phi(g,x)=x'$ محققة لأن المعادلة $\phi(g,x)=x'$ تقبل دائماً حلا هو: $g=x'Tx^{-1}$ حيث x^{-1} هو نظير x

مثال 2. نعتبر المجموعة $X=\{1,2,3,4\}$ والزمرة (G,T) حيث

$$G=\left\{f=id_X=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},f_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\right\},\quad T=o$$

إنّ **فِـــعلَ** الزمرة G على المجموعة X **بسيط** ولكنَّه غير **متعدٍّ**

نعرِّف **التطبيق الفِـــعل**

$$\begin{cases}\phi:G\times X\to X\\(f_i,x)\mapsto\phi(f_i,x)=f_i(x),i=1,2\end{cases}$$

إن هذا **الفـــعل بسيط :**

ليكن $(g,x)\in G\times X\wedge g\neq e=id_X=f_1$ عندئذ $g=f_2$ ومنه نرى صراحةً أنّ

$$\phi(f_2,x)=f_2(x)\neq x$$

لكنّ هذا **الفـــعل** غير**متعدٍّ:**

إنّ القضية $\forall(x,x')\in X\times X,\exists g\in G:\phi(g,x)=x'$ غير محققة

من أجل الثنائية $(x,x')=(1,3)\in X\times X$ المعادلة $\phi(g,1)=3$ لا تقبل حلولاً لأنَّ

$$\phi(g,1)=\begin{cases}1, & g=f_1\\ 2, & g=f_2\end{cases}$$

مدار عنصر(Orbite)

مدار عنصر $x\in E$ تحت **فــعل** زمرة (G,T) هو المجموعة:

$$.G^x=\{\phi(g.x)/g\in G\}$$

مُثبِّت عنصر(Stabilisateur)

مُثَبِّت عنصر $x\in E$ هو الزمرة الجزئية من G المعرّفة كما يلي

$$G_x=\{g\in G:\phi(g,x)=x\}$$

نتائـج:

- يكون **فِــعل** زمرة **بسيطاً** إذا كان : $\forall x\in E: G_x=\{e\}$
- يكون **فِــعل** زمرة **متعدٍّ** إذا كان : $\forall x\in E: G^x=E$
- يكون **فِــعل** زمرة **بسيطا** و**متعدٍّ** في آن واحد إذا وجد $x_0\in E$ مثبّت،

بحيث يكون التطبيق $\begin{cases}G\to E\\ g\mapsto\phi(g,x_0)\end{cases}$ تقابلاً

الفضـاء الشعـاعي:

ليكن $(IK,+,.)$ حقلا ولتكن E مجموعة غير خالية

نقول أن E **فضـــاء شعــاعي** على الحقل IK إذا عرفنا عمليتين نرمز لهما أيضا بـــ +,. بحيث

1. $(E,+)$ لها بنية زمرة تبديلية
2. العملية الثانية معرفة كما يلي

$$\begin{cases} .: K \times E \to E \\ (\alpha, x) \mapsto \alpha . x \end{cases}$$

ومحققّة للشروط التالية

$$(i)\ \alpha.(x+y) = \alpha x + \alpha . y, \quad \alpha \in IK, (x,y) \in E^2$$

$$(ii)\ (\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x, \quad (\alpha, \beta) \in IK^2, x \in E$$

$$(iii)\ (\alpha . \beta) x = \alpha . (\beta x), \quad (\alpha, \beta) \in IK^2, x \in E$$

$$(iv)\ 1_{IK} . x = x, \quad x \in E$$

أمثلة:

1. كل حقل هو فضاء شعاعي على نفسه
2. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ مزودة بعمليات جمع الأشعة وضرب شعاع في عدد هي فضاءات شعاعية على الحقل الحقيقي $(\mathbb{R},+,.)$
3. مجموعة كثيرات الحدود بمعاملات حقيقية $\mathbb{R}[X]$ هي فضاء شعاعي على الحقل الحقيقي
4. مجموعة التوابع الحقيقية لمتغير حقيقي $F(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ هي فضاء شعاعي على الحقل الحقيقي.

الفضـــاءات التـــآلفية

تعاريف وأمثلة

ليكن IK حقلا و $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على IK و A مجموعة غير خالية

تعريف 1 :

نقول أن المجموعة A مزودة ببنية **فضـــاء تـــآلفي** موجَّه بالفضاء الشعاعي E

(أو منحاه الفضاء الشعاعي E) إذا عرَّفنا **فــعلَ زمرة بسيطٍ ومتعَدٍّ** من الزمرة $(E,+)$ على المجموعة A أي نعرف تطبيقا $\phi : E\times \mathsf{A}\rightarrow \mathsf{A}$

بحيث: $\forall \vec{u},\vec{v}\in E,\forall x\in \mathsf{A}:\begin{cases}\phi\left(\vec{u},\phi\left(\vec{v},x\right)\right)=\phi\left(\vec{u}+\vec{v},x\right)\\ \phi\left(\vec{0},x\right)=x\end{cases}$

تعريف 2 :

نقول أن A مزودة ببنية **فضـــاء تـــآلفي** مَنْحَاهُ الفضاء الشعاعي E إذا عرفنا تطبيقا

$$\begin{cases}\mathsf{A}\times \mathsf{A}\rightarrow \mathrm{E}\\ (\mathrm{a},\mathrm{b})\mapsto \overrightarrow{ab}\end{cases}$$

بحيث

- $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bc}=\overrightarrow{ac}$ (i) (علاقة شال)

- و من أجل $\mathrm{a}\in \mathsf{A}$ مثبت فإن التطبيق $\begin{cases}\mathsf{A}\rightarrow \mathrm{E}\\ \mathrm{b}\mapsto \overrightarrow{\mathrm{a}\,\mathrm{b}}\end{cases}$ تقابل

تعريف3 :

نقول أن A مزودة ببنية فضـــاء تـــآلفي مَنْحَاهُ الفضاء الشعاعي E إذا عرّفنا تطبيقا

$$\begin{cases} \phi : E \times \mathsf{A} \to \mathsf{A} \\ \left(\overrightarrow{u}, x\right) \mapsto \phi\left(\overrightarrow{u}, x\right) = \vec{u} + x \end{cases}$$

بحيث يتحقق

-:
$$\begin{cases} \left(x + \vec{u}\right) + \vec{v} = x + \left(\vec{u} + \vec{v}\right), \quad \vec{u}, \vec{v} \in E, x \in \mathsf{A} \\ x + \overrightarrow{0_E} = x \end{cases}$$

– و من أجل $x \in \mathsf{A}$ مثبّت، يكون التطبيق:

$$\begin{cases} \phi : E \to \mathsf{A} \\ \vec{u} \mapsto \phi\left(\overrightarrow{u}, x\right) = x + \vec{u} \end{cases}$$ متقابلاً

ترميز : نسمي عناصر A نقاطاً

نسمي الفضـــاء الشعـــاعي E منحى A أو الفضاء الموجه للفضـــاء التـــآلفي A

تعريف 4:

– نسمي **بعد** الفضـــاء التـــآلفي A **بعد** منحاه أي بعد الفضاء الشعاعي E

– نسمي **مستقيماً تـــآلفيا** فضاءاً بعده 1

– نسمي **مستو تـــآلفياً** فضاءاً بعده 2

أمثــلة :

مثال1. كل فضاء شعاعي E هو فضـــاء تـــآلفي منحاه هو الفضـــاء E نفسه

بالفعل، نتحقق من التعريف بأخذ $\mathrm{A}=\mathrm{E}$ والتطبيق

$$\begin{cases}\phi : E \rightarrow \mathrm{A}\\ \vec{u} \mapsto \phi\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{x}\right)=\vec{x}+\vec{u}\end{cases}$$

حيث العملية + هي العملية الداخلية في E

لدينا : الخاصيتان بديهيتان

1. ماهي إلا خاصية التجميع
2. ماهي إلا خاصية تعريف العنصر الحيادي

مثال2. الفضـــاءات $\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2$ وبصفة عامة $\mathbb{R}^n$ هي فضـــاءات تـــآلفية

الفضـاءات التـآلفية الجـزئية :

ليكن A فضـــاءاً تـــآلفياً منحاه الفضاء الشعاعي E

وليكن $F\subset A$ جزءا من الفضاء التآلفي A

تعريف :

نقول أن F **قضـــاء تـــآلفي جزئي** من A ، إذا وجد قضاء شعاعي جزئي F من E و $\mathrm{x}\in F$ بحيث

$$\mathcal{F} = x + F = \left\{ x + \vec{u} \ , \vec{u} \in F \right\}$$

مثال :

نقاط فضـــاء تـــآلفي هي فضاءات تـــآلفية جزئية موجهة بالفضاء الشعـــاعي الجزئي $\left\{ \overrightarrow{0_E} \right\}$

موضوعه :

إنّ منحى القضـــاء التـــآلفي الجـــزئي $\mathcal{F}$ يعطَى بالعلاقة $F = \left\{ \overrightarrow{ab} : a,b \in \mathcal{F} \right\}$

تعــريف :

نقول أن نقاط من الفضـــاء التـــآلفي $\mathcal{A}$ تقع على **نفس الاستقامة** إذا كانت تنتمي إلى نفس المستقيم التـــآلفي.

ليكن فضـــاءاً شعـــاعيا بعده منتهٍ $\left(\dim E = n \right)$

تعــريف :

نسمِّي **فوق مستو** شعاعي**(مستومصعّد)** كل فضـــاء شعـــاعي جـــزئي بعده يساوي $n - 1$

التــوازي

تعــريف :

نقول عن فضـــائين تـــآلفيين F و G أنهما **متوازيان** إذا قَبِلا نفس المنحى

موضوعه :

الفضـــاءان التـــآلفيان الجـــزئيان المتوازيان هما إمّا متطابقان أو منفصلان

ملاحظة:

إن عكس الموضوعة السابقة غير صحيح:

$$A = \mathbb{R}^3$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}, \quad G = \{(0,0,1)\}$$

لدينا $F \cap G = \varnothing$ لكنهما غير متوازيين

تمييز التوازي (Caractérisation du parallélisme)

ليكن A فضـــاءاً تـــآلفياً موجهاً بالفضـــاء الشعـــاعي E، و F فضـــاءاً تـــآلفياً جـــزئيا من الفضاء A وموجه بالفضـــاء الشعـــاعي الجزئي $E \supset F$

وليكن $\vec{v} \in E$ شعاعاً ما.

عندئذ :الجزء $F+\vec{v} = \{y \in A / \exists x \in F \quad : \overrightarrow{xy} = \vec{v}\}$

هو فضـــاء تـــآلفي جـــزئي موجه بالفضـــاء الشعـــاعي الجزئي $E \supset F$ أيضا

وكل فضاء تآلفي جزئي موازٍ للفضـــاء التـــآلفي الجـــزئي F يكتب بنفس الشكل

تعميم بديهية التوازي (بديهية اقليدس الخامسة)

موضوعه :

ليكن A فضـــاءا تـــآلفيا موجَّها بالفضـــاء الشعـــاعي E و F فضـــاء تـــآلفي جـــزئي منحاه الفضـــاء الشعـــاعي الجـــزئي $E \supset F$ وليكن $x \in$ A

يوجد فضـــاء تـــآلفي وحيد يوازي F ويمر من النقطة x

موضوعه :

من نقطتين مختلفتين b,a من فضاء تآلفي، يمرُّ مستقيم واحد فقط نرمز له بـــ ab

المعلم التآلفي (Repère affine) :

ليكن F فضـــاءا تـــآلفيا جـــزئيا من الفضـــاء التـــآلفي A منحاه الفضـــاء الشعـــاعي الجـــزئي $E \supset F$ مع $F \neq \{\vec{0}\}$

نسمي **مَعلماً** للفضـــاء الجـــزئي F ، كل ثنائية $R=(A,B)$ حيث $A \in F$ و B أساس للفضـــاء الشعـــاعي الجـــزئي F

نسمي **إحداثيات** النقطة $M \in F$ في المعلم R، إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AM}$ في الأساس B

تمــارين

1. نعتبر مجموعة التوابع الحقيقية للمتغير الحقيقي المعرَّفة بـــ

$$G=\left\{f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\, f_{a,b}\left(x\right)=ax+b\,/\left(a,b\right)\in\mathbb{R}^{*}\times\mathbb{R}\right\}$$

ونزودها بعملية تركيب التوابع (o).

أ. أثبت أن (G,o) زمرة .

ب. باعتبار التطبيق $\begin{cases}\phi:G\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ \phi\left(f_{a,b},x\right)=f_{a,b}\left(x\right)\end{cases}$

بيِّن أن **فِعــل** الزمرة G على المجموعة $\mathbb{R}$ متعَدٍّ وغير بسيطٍ.

2. نعتبر مجموعة التوابع

$$G=\left\{g_t:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\, g_t\left(x,y\right)=\left(x+t,\,ye^{t}\right),t\in\mathbb{R}\right\}$$

ونزودها بعملية تركيب التوابع (o). أثبت أن G زمرة

باعتبار التطبيق $\begin{cases}\psi:G\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ \phi\left(g_t,\left(x,y\right)\right)=g_t\left(x,y\right)\end{cases}$

بيِّن أن **فِعــل** الزمرة G على المجموعة $\mathbb{R}^2$ غيرمتعَدٍّ ولكنه بسيط.

3. نعتبر الزمرة الاعتيادية $(\mathbb{R},+)$ والمجموعة

$$S=\left\{z\in\mathbb{C}\,/\left|z\right|=1\right\}$$

باعتبار التطبيق $\begin{cases} \phi : \mathbb{R} \times S \to S \\ \phi(\theta, z) = ze^{i\theta} \end{cases}$

بيِّن أن **فِعــل** الزمرة $(\mathbb{R},+)$على المجموعة S متعَدٍّ ولكنه غير بسيطٍ.

4. نعتبر في الفضـــاء التـــآلفي $\mathsf{A} = \mathbb{R}^2$ الجزء المعرَّف بـــ $D = \{(1+3\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ أثبت أنّ فضـــاء تـــآلفي جـــزئي من الفضـــاء A . عيِّن نقطة مِنه ثمَّ عيِّن منحاه.

5. نعتبر في الفضـــاء التـــآلفي $\mathsf{A} = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ الجزء المعرَّف بـــ

$H = \{f \in \mathsf{A} : f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}\}$. أثبت أنّ فضـــاء تـــآلفي جـــزئي من الفضـــاء A . عيِّن نقطة منه ثمَّ عيِّن منحاه.

6. نعتبر في الفضـــاء التـــآلفي $\mathsf{A} = \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ للمصفوفات من النوع (2×2)، الجزء المعرَّف بـــ

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1+a-b & 1 \\ a+b & b \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R} \right\} .$$

أثبت أنّ فضـــاء تـــآلفي جـــزئي من . عيِّن نقطة منه ثمَّ عيِّن منحاه.

7. نعتبر في الفضـــاء التـــآلفي $\mathsf{A}=\mathbb{R}^2$ النقاط
$p_0=(0,0),\ p_1=(1,0),\ p_2=(0,1)$ ونعرِّف المستقيمين
التـــآلفيين $\begin{cases} D_1 : p_0p_1 \\ D_2 : p_0p_2 \end{cases}$.

لتكن النقطة $(x_0,y_0)\in \mathsf{A}-(D_1\bigcup D_2)$. نعرِّف الجزء . بيّن أن
الجزء $D=\{(x_0-y_0t,\ y_0+x_0t),t\in\mathbb{R}\}$ مستقيم تـــآلفي يمرُّ
من النقطة (x_0,y_0). عيِّن كلا من المجموعتين $D\bigcap D_i\ ,i=1,2$.

8. نعتبر في الفضـــاء التـــآلفي $\mathsf{A}=\mathbb{R}^2$ النقاط
$p_0=(0,0),\ p_1=(3,0),\ p_2=(2,1),\ p_3=(2,-1),\ p_4=(1,3)$
أثبت أن $\left(p_0,\overrightarrow{p_1p_2},\overrightarrow{p_3p_4}\right)$ مَعلم تـــآلفي للفضـــاء
$\mathsf{A}=\mathbb{R}^2$.

9. نعتبر في الفضـــاء التـــآلفي $\mathsf{A}=\mathbb{R}^2$ النقاط
$p_1=(-2,1),\ p_2=(-2,-1),\ p_3=(2,-1),\ p_4=(2,-3)$

أثبت أن (p_1,p_2,p_3) معلم تـــآلفي للفضـــاء $\mathsf{A}=\mathbb{R}^2$.

أثبت أن المستقيمين التـــآلفيين p_1p_2, p_3p_4 متوازيان

حـلول وإرشـادات

1. أ.إن عملية تركيب التطبيقات(o) عملية داخلية في G بالفعل لدينا $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{a.c,b.c+d} \in G$ ومن جهة أخرى يمكن بسهولة أن نتأكّد من الخاصية التجميعية، امّا العنصر الحيادي فهو $f_{1,0} = id_{\mathbb{R}} \in G$ ونظير العنصر $f_{a,b}$ هو العنصر $f_{\frac{1}{a},\frac{-b}{a}} \in G$

ب . إنّ التطبيق ϕ هو **فِعل زمرة** لأنه يحقق

$$\forall f_{a,b}, f_{c,d} \in G, \forall x \in \mathbb{R}: \begin{cases} \phi(f_{c,d}, \phi(f_{a,b}, x)) = \phi(f_{c,d}, f_{a,b}(x)) = f_{c,d}(f_{a,b}(x)) = f_{a.c,b.c+d}(x) \\ \phi(f_{c,d} \circ f_{a,b}, x) = f_{c,d}(f_{a,b}(x)) = f_{a.c,b.c+d}(x) \\ \phi(f_{1,0}, x) = f_{1,0}(x) \end{cases}$$

إن هذا **الفِعل غير بسيطٍ** : بالفعل لدينا

$\phi(f_{2,0}, 0) = f_{2,0}(0) = 0$ رغم أنَّ $f_{2.0} \neq f_{1,0} = id_{\mathbb{R}} = e$

إن هذا **الفِعل متَعدٍّ:**

بالفعل:القضية

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \exists f_{a,b} \in G : \phi(f_{a,b}, x) = f_{a,b}(x) = x'$$

محققة لأنَّ $f_{1,x'-x}$ هو حل لها.

2. إن عملية تركيب التطبيقات(o) عملية داخلية في G بالفعل لدينا $g_t \circ g_{t'} = g_{t+t'} \in G$ ، ويمكن التأكد من خواص التبديل

و التجميع بسهولة أما العنصر الحيادي فهو $g_0 = id_{\mathbb{R}^2}$ ونظير العنصر g_t هو العنصر g_{-t}

. إنّ التطبيق ψ هو **فِــعل زمرة** لأنه يحقق

$$\forall g_t, g_{t'} \in G, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} \psi\left(g_{t'}, \psi\left(g_t,(x,y)\right)\right) = \psi\left(g_{t'}, g_t(x,y)\right) = g_{t'}\left(g_t(x,y)\right) = g_{t+t'}(x,y) \\ \psi\left(g_t \circ g_{t'},(x,y)\right) = g_{t'}\left(g_t(x,y)\right) = g_{t+t'}(x,y) \\ \psi\left(g_0,(x,y)\right) = g_0(x,y) = (x,y) \end{cases}$$

إن هذا **الفــعل بسيط** :

ليكن $\left(g_t,(x,y)\right) \in G \times \mathbb{R}^2 \wedge g_t \neq g_0 = id_X = f_1$ عندئذ

نرى صراحةً أنّ

$$t \neq 0 \Rightarrow \psi\left(g_t,(x,y)\right) = g_t(x,y) = \left(x+t, ye^t\right) \neq (x,y)$$

لكنّ هذا **الفــعل** غير**متعدٍّ:**

إنّ القضية

$$\forall\left((x,y),(x',y')\right) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \exists g_t \in G : \psi\left(g_t,(x,y)\right) = (x',y')$$

غير محققة فمن أجل $(x,y) = (1,1) \wedge (x',y') = (1,0)$

المعادلة $\psi\left(g_t,(1,1)\right) = g_t(1,1) = \left(1+t, e^t\right) = (1,0)$

لا تقبل حلولاً لأنّ $e^t = 0$ غير ممكنة.

3. بعد التأكّد من أنّ التطبيق ϕ هو **فِعل زمرة**

نتأكد من أن هذا الفعل **متعدٍّ**

(المعادلة $\phi(\theta, z) = z'$ تقبل حلا

هو $\theta = \arg z - \arg z' + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$)

لكنَّه غير **بسيطٍ**

لدينا $\theta = 2\pi \neq 0$ لكن $\phi(\theta, z) = ze^{2\pi i} = z$.

4. لدينا $D = (1,0) + F$ حيث

$F = \{(3\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle(3,1)\rangle$ هو الفضاء

الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^2$ المولَّد بالشعاع $(3,1)$

إذن فضاء تآلفي جزئي **منحاه** F و $p = (1, 0)$ نقطة منه.

5. لدينا $f_0 = id_{\mathbb{R}}$ نقطة من الجزء H لنبحث عن المنحى، نضع

$$F = \{\overrightarrow{f_0 f}\ / f \in H\}$$

عندئذٍ

$$F = \{\overrightarrow{f_0 f}\ / f \in H\} = \{f - f_0\ / f \in H\}$$

وبوضع $g = f - f_0$

نجد

$$F=\{g\ /\ g+f_0\in H\}=\{g\ /\ g(x+1)+f_0(x+1)=g(x)+f_0(x)+1\}$$
$$F=\{g\ /\ g(x+1)+x+1=g(x)+x+1\}=\{g\ /\ g(x+1)=g(x)\}$$

بقي التحقق من أن F فضـــاء شعـــاعي جـــزئي من الفضـــاء الشعـــاعي $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$

ومنه H فضـــاء تـــآلفي جـــزئي **منحاه** F.

6. لدينا $M=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ نقطة من الجزء L لنبحث عن المنحى

ونتأكد أن $L=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\left\{\begin{pmatrix}a-b&0\\a+b&b\end{pmatrix}/\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$

$$F=\left\{\begin{pmatrix}a-b&0\\a+b&b\end{pmatrix}/\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

هو فضـــاء شعـــاعي جـــزئي من الفضـــاء الشعـــاعي $M_2(\mathbb{R})$

بالفعل هو الفضـــاء الشعـــاعي الجـــزئي

$$F=\left\{\begin{pmatrix}a-b&0\\a+b&b\end{pmatrix}\right\}=\left\{a.\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}/\,a,b\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}\right\rangle$$

ختاما L فضـــاء تـــآلفي جـــزئي **منحاه** F.

8. يكفي التحقق من $\left\{\overrightarrow{p_1p_2},\overrightarrow{p_3p_4}\right\}$ أن أساس للفضـــاء الشعـــاعي $\mathbb{R}^2$

لأجل ذلك لدينا $\overrightarrow{p_1p_2}=(-1,1),\overrightarrow{p_3p_4}=(-1,4)$ ومنه

$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-4+1=-3\neq 0$ وهو ما يضمن الاستقلال الخطي

للشعـــاعين وبما أن عددها يساوي بعد الفضـــاء $\mathbb{R}^2$

فهما يشكلان أساسا له.

9 . بقراءة النقطتين $p_2=(-2,-1),p_3=(2,-1)$ على

أنهما شعـــاعان من $\mathbb{R}^2$ حتى تكون الثلاثية (p_1,p_2,p_3) معلما

يكفي التحقق أن $\{p_2=(-2,-1),p_3=(2,-1)\}$ أساس

للفضـــاء $\mathbb{R}^2$ ، نتّبع نفس طريقة التمرين السابق

لإثبات **توازي** المستقيمين المذكورين، نبيِّن أن لهما نفس **المنحى،**

وهو محقق فعلا لأن منحاهما المشترك هو

$$.F=\{(0,2\alpha)/\alpha\in\mathbb{R}\}$$