

جدول التكاملات غير المحدودة

١ - الدوال التي تحتوي على $a + bx$ وتكون درجة هذه العبارة عدداً صحيحاً

- 1) $\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln(a + bx) + C.$
- 2) $\int (a + bx)^n dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C, n \neq -1.$
- 3) $\int \frac{x dx}{1 + bx} = \frac{1}{b^2} [a + bx - a \ln(a + bx)] + C.$
- 4) $\int \frac{x^2 dx}{a + bx} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{1}{2} (a + bx)^2 - 2a(a + bx) + a^2 \ln(a + bx) \right] + C.$
- 5) $\int \frac{dx}{x(a + bx)} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a + bx}{x} + C.$
- 6) $\int \frac{dx}{x^2(a + bx)} = \frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \ln \frac{a + bx}{x} + C.$
- 7) $\int \frac{x dx}{(a + bx)^2} = \frac{1}{b^2} \left[\ln(a + bx) + \frac{a}{a + bx} \right] + C.$
- 8) $\int \frac{x^2 dx}{(a + bx)^2} = \frac{1}{b^3} \left[a + bx - 2a \ln(a + bx) - \frac{a^2}{a + bx} \right] + C.$
- 9) $\int \frac{dx}{x(a + bx)^2} = \frac{1}{a(a + bx)} - \frac{1}{a^2} \ln \frac{a + bx}{x} + C.$
- 10) $\int \frac{x dx}{(a + bx)^3} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{a + bx} + \frac{a}{2(a + bx)^2} \right] + C.$

٢ - الدوال التي تحتوي على $a^2 + x^2, a^2 - x^2, a + bx^2$

- 11) $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C.$
- 12) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$

$$13) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$$

$$14) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x+a}{x-a} + C.$$

$$15) \int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan x \sqrt{\frac{b}{a}} + C \quad (a > 0, b > 0 \text{ تكون})$$

إذا كانت كلتا الكميتين a, b سالبتين فإننا نخرج الإشارة سالبة (-) خارج علامة التكامل ، أما إذا كانت a, b مختلفتي الإشارة فإننا نستخدم العلاقة 16 .

$$16) \int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} + C.$$

$$17) \int \frac{x dx}{a + bx^2} = \frac{1}{2b} \ln \left(x^2 + \frac{a}{b} \right) + C.$$

$$18) \int \frac{x^2 dx}{a + bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + bx^2},$$

انظر بعد ذلك رقم 15 أو رقم 16 .

$$19) \int \frac{dx}{x(a + bx^2)} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x^2}{a + bx^2} + C$$

$$20) \int \frac{dx}{x^2(a + bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a + bx^2},$$

انظر بعد ذلك رقم 15 أو رقم 16 .

$$21) \int \frac{d}{(a + bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a + bx^2)} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a + bx^2},$$

انظر بعد ذلك رقم 15 أو رقم 16 .

٣ - الدوال التي تحتوي على $\sqrt{a + bx}$

$$22) \int \sqrt{a + bx} dx = \frac{2}{3b} \sqrt{(a + bx)^3} + C.$$

$$23) \int x \sqrt{a + bx} dx = -\frac{2(2a - 3bx) \sqrt{(a + bx)^3}}{15b^2} + C.$$

$$24) \int x^2 \sqrt{a + bx} dx = \frac{2(8a^2 - 12abx + 15b^2x^2) \sqrt{(a + bx)^3}}{105b^3} + C.$$

$$25) \int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2} \sqrt{a+bx} + C.$$

$$26) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3} \sqrt{a+bx} + C.$$

$$27) \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} + C \quad (a > 0 \text{ عندما تكون})$$

$$28) \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\frac{a+bx}{-a}} + C \quad (a < 0 \text{ عندما تكون})$$

$$29) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}} = \frac{\sqrt{a+bx}}{ax} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}},$$

انظر بعد ذلك رقم 27 أو رقم 28 .

$$30) \int \frac{\sqrt{a+bx} dx}{x} = 2\sqrt{a+bx} + a \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}},$$

انظر بعد ذلك رقم 27 أو رقم 28 .

٤ - الدوال التي تحتوي على $\sqrt{x^2+a^2}$

$$31) \int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$32) \int \sqrt{(x^2+a^2)^3} dx = \frac{x}{8} (2x^2+5a^2) \sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$33) \int \frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{x\sqrt{x^2+a^2}} dx = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{3} + C.$$

$$34) \int x^2 \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2+a^2) \sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

$$35) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

$$36) \int \frac{ax}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C.$$

$$37) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C.$$

$$38) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) +$$

$$39) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

$$40) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{x}{a + \sqrt{x^2 + a^2}} + C.$$

$$41) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2 x} + C.$$

$$42) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{2 a^2 x^2} + \frac{1}{2 a^3} \ln \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} +$$

$$43) \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2} dx}{x} = \sqrt{x^2 + a^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} + C.$$

$$44) \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2} dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

٥ - الدوال التي تحتوي على $\sqrt{a^2 - x^2}$

$$45) \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$46) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$47) \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

$$48) \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$$49) \int \frac{x dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

$$50) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} +$$

$$51) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} +$$

$$52) \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{x}{8} (5a^2 - 2x^2) \sqrt{a^2 - x^2} +$$

$$+ \frac{3a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$53) \int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}{3} + C.$$

$$54) \int x \sqrt{(a^2 - x^2)^3} dx = -\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)^5}}{5} + C.$$

$$55) \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x^3}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} +$$

$$+ \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$56) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$57) \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

$$57) \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

$$58) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C.$$

$$59) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2 a^2 x^2} + \frac{1}{2 a^3} \ln \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

$$60) \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C.$$

$$61) \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

٦ - الدوال التي نحوي على $\sqrt{x^2 - a^2}$

$$62) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

$$63) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 - a^2}} + C.$$

$$64) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2} + C.$$

$$65) \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

$$66) \int \sqrt{(x^2 - a^2)^3} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - 5a^2) \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

$$67) \int x \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}{3} + C.$$

$$68) \int x \sqrt{(x^2 - a^2)^3} dx = \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)^5}}{5} + C.$$

$$69) \int x^2 \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

$$70) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

$$71) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

$$72) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arcsec} x + C.$$

$$73) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + C.$$

$$74) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x} + C.$$

$$75) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2a^2 x^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + C.$$

$$76) \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2} dx}{x} = \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{x} + C.$$

$$77) \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2} dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

٧ - الدوال التي تحتوي على $\sqrt{2ax - x^2}$, $\sqrt{2ax + x^2}$

نكامل الدوال التي تحتوي على $\sqrt{2ax - x^2}$ بإجراء التعويض $t = x - a$. عندئذ $\sqrt{2ax - x^2}$ تأخذ الصورة $\sqrt{a^2 - t^2}$ ، ونجد هذا التكامل في المجموعة ٥ من هذا الجدول. أما إذا لم يكن موجوداً في الجدول فنسعى إلى تحويله إلى صورة موجودة في الجدول.

ويمكننا قول نفس الشيء عن الدالة التي تحتوي على العبارة $\sqrt{2ax + x^2}$. وفي هذه الحالة يحول التعويض $t = x + a$.

انعارة الموجودة تحت الجذر إلى الصورة $\sqrt{t^2 - a^2}$ (المجموعة ٦ من هذا الجدول).

$$78) \int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2cx + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C, & \text{عندما تكون } b^2 < 4ac \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \frac{2cx + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2cx + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} + C, & \text{عندما تكون } b^2 > 4ac \end{cases}$$

$$79) \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln (2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2}) + C.$$

$$80) \int \sqrt{a + bx + cx^2} dx = \frac{2cx + b}{4c} \sqrt{a + bx + cx^2} - \frac{b^2 - 4ac}{8\sqrt{c^3}} \ln (2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2}) + C.$$

$$81) \int \frac{x dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{\sqrt{a + bx + cx^2}}{c} - \frac{b}{2\sqrt{c^3}} \ln (2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2}) + C.$$

$$82) \int \frac{dx}{a + bx - cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + 4ac}} \ln \frac{\sqrt{b^2 + 4ac} + 2cx - b}{\sqrt{b^2 + 4ac} - 2cx + b} + C.$$

$$83) \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}} + C.$$

$$84) \int \sqrt{a + bx - cx^2} dx = \frac{2cx - b}{4c} \sqrt{a + bx - cx^2} + \frac{b^2 + 4ac}{8\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}} + C.$$

$$85) \int \frac{x dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = -\frac{\sqrt{a + bx - cx^2}}{c} + \frac{b}{2\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}} + C.$$

$$86) \int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}} dx = \sqrt{(a+x)(b+x)} + (a-b) \ln(\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x}) + C.$$

$$87) \int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}} dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b) \arcsin \sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C.$$

$$88) \int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}} dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b) \arcsin \sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C.$$

$$89) \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$$

$$90) \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$$

١١ - الدوال الأسية والمنطقية

$$91) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$92) \int e^x dx = e^x + C.$$

$$93) \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C.$$

$$94) \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$95) \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$96) \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$97) \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$98) \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$99) \int \operatorname{cosec} x dx = \ln |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C = \ln \tan \frac{x}{2} + C.$$

$$100) \int \sec^2 x dx = \tan x + C.$$

$$101) \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + C.$$

$$102) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C.$$

$$103) \int \operatorname{cosec} x \cot x dx = -\operatorname{cosec} x + C.$$

$$104) \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$105) \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$106) \int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$

تستخدم هذه العلاقة عدة مرات إلى أن نحصل على التكامل $\int \sin^2 x dx$ أو $\int \sin x dx$ (وذلك حسب ما إذا كانت n زوجية أم فردية) ، وعندئذ نجد هذين التكاملين وفقاً للرقمين 104 و 94 .

$$107) \int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

(انظر الملاحظة المتعلقة بالتكامل السابق وانظر الرقمن 105 و 95) .

$$108) \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \times \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} .$$

تستخدم هذه الخطوة عدة مرات إلى أن تعطينا التكامل $\int dx$ (عندما تكون n عدداً زوجياً ، أو تعطينا التكامل

$$\int \frac{dx}{\sin x} \text{ عندما تكون } n \text{ عدداً فردياً (التكامل الأخير موجود تحت الرقم 99) .}$$

$$109) \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \times \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

(انظر الملاحظة المتعلقة بالتكامل السابق وانظر الرقم 98) .

$$110) \int \sin x \cos^n x dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C.$$

$$111) \int \sin^n x \cos x dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C.$$

$$112) \int \cos^m x \sin^n x dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \cos^{m-2} x \sin^n x dx.$$

تستخدم هذه الخطوة عدة مرات إلى أن تصبح قوة جيب التمام مساوية للصفر (عندما تكون m زوجية) أو مساوية للواحد الصحيح (عندما تكون m فردية) . بالنسبة للحالة الأولى انظر رقم 106 وبالنسبة للحالة الثانية انظر رقم 111 . وتستخدم هذه العلاقة عندما تكون $m < n$. أما إذا كانت $m > n$ فيستحسن استخدام العلاقة الآتية :

$$113) \int \cos^m x \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \sin^{n-2} x dx$$

(انظر الملاحظة المتعلقة بالتكامل السابق وانظر الرقمن 107 و 110) .

$$114) \int \sin mx \sin nx dx = -\frac{\sin (m+n) x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n) x}{2(m-n)} + C.$$

$$115) \int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin (m+n) x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n) x}{2(m-n)} + C. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (m \neq n)$$

$$116) \int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{\cos (m+n) x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n) x}{2(m-n)} + C \quad (m \neq n).$$

$$117) \int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) + C,$$

عندما تكون $a > b$.

$$118) \int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{\sqrt{b-a} \tan \frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a} \tan \frac{x}{2} - \sqrt{b+a}} + C,$$

عندما تكون $a < b$.

$$119) \int \frac{dx}{a+b \sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan \frac{a \tan \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C,$$

عندما تكون $a > b$.

$$120) \int \frac{dx}{a+b \sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{a \tan \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a \tan \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}} + C,$$

عندما تكون $a < b$.

$$121) \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{b \tan x}{a} \right) + C.$$

$$122) \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

$$123) \int e^{ax} \sin nx \, dx = \frac{e^{ax} (a \sin nx - n \cos nx)}{a^2 + n^2} + C.$$

$$124) \int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + C.$$

$$125) \int e^{ax} \cos nx \, dx = \frac{e^{ax} (n \sin nx + a \cos nx)}{a^2 + n^2} + C.$$

$$126) \int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + C.$$

$$127) \int x^n e^{ax} \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx.$$

$$128) \int x a^{mx} dx = \frac{x a^{mx}}{m \ln a} - \frac{a^{mx}}{m (\ln a)^2} + C.$$

$$129) \int x^n a^{mx} dx = \frac{a^{mx} x^n}{n \ln a} - \frac{n}{m \ln a} \int a^{mx} x^{n-1} dx.$$

تستخدم هذه العلاقة إلى أن تصبح قوة x مساوية للواحد الصحيح ، عندئذ نجد التكامل وفقاً للرقم 125 .

$$130) \int e^{ax} \cos^n x dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x (a \cos x + n \sin x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x dx.$$

تستخدم هذه العلاقة إلى أن يختص جيب التمام (عندما تكون n زوجية) أو إلى أن تصبح قوة جيب التمام مساوية للواحد الصحيح (عندما تكون n فردية) . وفي الحالة الأخيرة انظر الرقم 125 .

$$131) \int \sinh x dx = \cosh x + C.$$

$$132) \int \cosh x dx = \sinh x + C.$$

$$133) \int \tanh x dx = \ln \cosh x + C.$$

$$134) \int \coth x dx = \ln \sinh x + C.$$

$$135) \int \operatorname{sech} x dx = 2 \arctan e^x + C.$$

$$136) \int \operatorname{cosech} x dx = \ln \tanh \frac{x}{2} + C.$$

$$137) \int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C.$$

$$138) \int \operatorname{cosech}^2 x dx = -\coth x + C.$$

$$139) \int \operatorname{sech} x \tanh x dx = \operatorname{sech} x + C.$$

$$140) \int \operatorname{cosech} x \coth x dx = -\operatorname{cosech} x + C.$$

$$141) \int \sinh^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sinh 2x + C.$$

$$142) \int \cosh^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sinh 2x + C.$$

١٢ - الدوال اللوغاريتمية

نورد أدناه الدوال التي تحتوي فقط على لوغاريتم طبيعي . أما إذا كان المطلوب إيجاد تكامل دالة تحتوي على لوغاريتم ذي

أساس آخر ، فإننا نحوله أولاً إلى لوغاريتم طبيعي حسب العلاقة $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ثم نستخدم الجدول .

$$143) \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C.$$

$$144) \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x) + C.$$

$$145) \int x^n \ln x \, dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C.$$

$$146) \int \ln^n x \, dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x \, dx.$$

نستخدم هذه العلاقة إلى أن نحصل على التكامل $\int \ln x \, dx$ الذي يحل حسب العلاقة رقم 143 .

$$147) x^m \int \ln^n x \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x - \frac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1} x \, dx.$$

نستخدم هذه العلاقة إلى أن نحصل على التكامل رقم 145