



جامعة ذمار - كلية الهندسة

معضلة في النهايات (تفاضل)



هناك عدة طرق لحلها كالتالي :-

- 1- طريقة النهايات (وهي المعتمدة في الحل)
- 2- طريقة الاشتقاق (تستخدم هذه الطريقة للتأكد في الحل)
- 3- طريقة المفكوك

المهندس / اسامة عبد الباسط محمد الشبيبي
اليمن - جامعة ذمار - كلية الهندسة المدنية
2014 م

1- طريقة النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x} = \frac{0-0}{0-0} = \frac{0}{0}$$

عدم تعيين

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - \sin x}{x^3}}{\frac{x - \tan x}{x^3}}$$

نقسم على x^3

نجزئ المسألة الى قسمين

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = l$$

$$\sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

قانون جيب الزاوية نعوض به

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3} = l$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x}{2} - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^3} = l$$

نستخرج 2 عامل مشترك

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x}{2} - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^3} = l$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x}{2} - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^3} = l$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x}{2} - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^3} = l$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x}{2} - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{8\left(\frac{x}{2}\right)^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)2 \sin^2 \frac{x}{4}}{x^3} = l$$

$$\frac{2}{8}l + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 2 \left(\frac{x^2}{16} \right)}{x^3} = l$$

$$\frac{1}{4}l + \frac{1}{8} = l \quad \rightarrow \quad l = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - \sin x}{x^3}}{\frac{x - \tan x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \cdot \frac{x^3}{x - \tan x}$$

$$\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{x \cos x - \sin x}{\cos x}}$$

$$\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x}{x \cos x - \sin x}$$

$$\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x}{x \cos x - \sin x + x - x}$$

$$\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x}{(x \cos x - x) + (x - \sin x)}$$

نقسم البسط والمقام على x^3

$$\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{(x \cos x - x)}{x^3} + \frac{(x - \sin x)}{x^3}}$$

$$\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{(x \cos x - x)}{x^3} + \frac{1}{6}}$$

ملاحظة

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{x(\cos x - 1)}{x^3} + \frac{1}{6}}$$

$$\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{-2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} + \frac{1}{6}}$$

قانون

$$1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{-2 \times \frac{x^2}{4}}{x^2} + \frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{\frac{-1}{2} + \frac{1}{6}} \right) \left(\frac{1}{6} \right)$$

$$\left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{\frac{-3}{6} + \frac{1}{6}} \right) = \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{\frac{-2}{6}} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{-6}{2} = -\frac{1}{2}$$

2- طريقة الاشتقاق

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x} = \frac{0-0}{0-0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \sec^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{-\tan^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times \frac{x^2}{4}}{-x^2} = -\frac{2}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

نشتق البسط والبسط والمقام كل على حده

قانون

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

Osamh

