الأعداد المركّبة

تعريف:

في $I\!R$ المعادلة: $x^2 = a$ لا تقبل حلولاً عندما يكون $a < 0$. ولكنّها تقبل حلاً على الأقلّ في مجموعة أخرى أوسع من $I\!R$ هي مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$.

كلّ عدد مركّب يمكن كتابته على الشكل: $z = x + iy$ ، حيث: x و y عددان حقيقيّان و $i^2 = -1$.

الكتابة: $z = x + iy$ تسمّى **الشكل الجبريّ** للعدد المركّب z، ويسمّى x الجزء الحقيقيّ للعدد المركّب z، ويسمّى iy الجزء التخيّليّ للعدد المركّب z.

العدد x يسمّى **الجزء الحقيقيّ** للعدد المركّب z ويرمز له بالرمز $Re(z)$ أي $Re(z)=x$، والعدد y يسمّى **الجزء التخيّليّ** للعدد المركّب z ويرمز له بالرمز $Im(z)$ أي $Im(z)=y$.

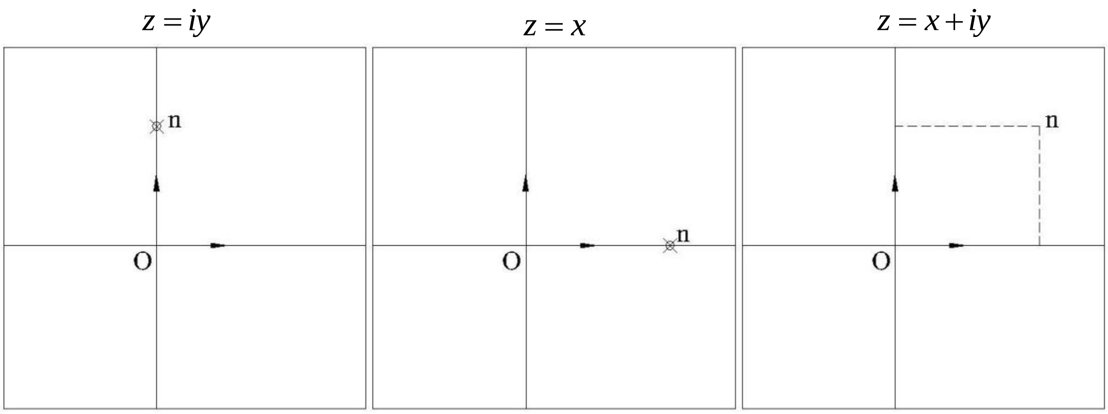
ملاحظة:

- إذا كان: $x=0$ يقال أنّ z عدد حقيقيّ.
- إذا كان: $y=0$ يقال أنّ z عدد تخيّليّ صِرف.

التمثيل الهندسيّ للأعداد المركّبة:

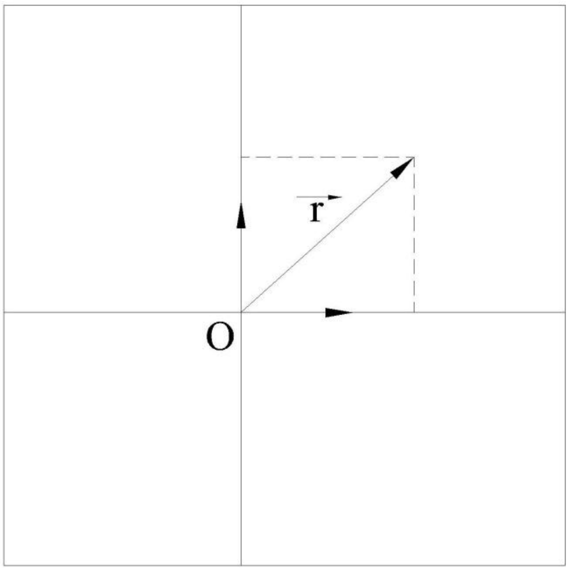
أ. التمثيل النقطيّ للأعداد المركّبة:

نرفق كلّ عدد مركّب بالنقطة $n(x,y)$، وتسمّى n صورة z، ويسمّى z لاحقة n.



ب. التمثيل الشعاعيّ للأعداد المركّبة:

نرفق كلّ عدد مركّب بالشعاع $\vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$، ويسمّى $\vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ صورة z، ويسمّى z لاحقة $\vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



مرافق عدد مركّب:

تعريف: مرافق العدد المركّب z حيث: $z = x + iy$ هو العدد المركّب الذي يرمز له: $\bar{z} = x - iy$.

خواصّ:

- $\bar{\bar{z}} = z$.
- $z + \bar{z} = 2x$.
- $z - \bar{z} = 2iy$.
- $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$.
- (z حقيقيّ) $\Leftrightarrow (z = \bar{z})$.
- (z تخيّلي صرف) $\Leftrightarrow (z = -\bar{z})$.

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$.

مجموع وجداء عددين مركّبين:

من أجل كلّ عددين مركّبين z_1 و z_2 حيث: $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ لدينا:

- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
- $z_1 \times z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$.

مقلوب عدد مركّب:

z عدد مركّب حيث $z=x+iy$.

لدينا: $\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{(x-iy)}{(x+iy)\cdot(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$

ومنه: $\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$ ، وهذا هو الشكل الجبريّ لمقلوب عدد مركّب غير معدوم، أي x و y غير معدومين معًا.

طويلة عدد مركّب:

طويلة العدد المركّب $z=x+iy$ هي العدد الحقيقيّ الموجب: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

عمدة عدد مركّب:

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، إذا كانت n صورة العدد المركّب: $z=x+iy$ ، نسمّي كلّ قيس للزاوية $\theta=(\vec{u};\overrightarrow{On})$ **عمدة** للعدد المركّب: $z=x+iy$. ويرمز لها بالرمز $arg(z)$، حيث: $\arg(z)=\theta+2k\pi$ مع k عدد صحيح.

- i هو العدد المركّب الذي طويلته 1 وعمدته $\frac{\pi}{2}$.

الشكل المثلّثيّ لعدد مركّب:

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، إذا كانت النقطة n ذات الإحداثيّتين القطبيّتين $[|z|;\theta]$ صورة العدد المركّب: $z=x+iy$ ، فإنّ z يكتب على الشكل: $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ ، وهذه الكتابة تسمّى الشكل المثلّثيّ للعدد المركّب z. ويمكن أيضًا كتابة الشكل المثلّثيّ كما يلي: $z=[|z|;\theta]$.

دستور موافر:

مهما كانت قيمة العدد الصحيح n فإنّ: $z=\cos n\theta+i\sin n\theta$ حيث: z عدد مركّب.

Abraham de Moivre

أبراهام دي موافر: ولد عام 1667م عالم رياضيات أضاف إضافات هامة في حساب المثلثات وقانون الاحتمالات وهناك ثلاث نظريات رياضية تحمل اسمه، توفي عام 1754م.

أبراهام دي موافر من أصدقاء إسحاق نيوتن، حيث نشر مساهماته في احتمال ضمن كتابه (مبدأ الفرص) في سنة 1707م، اكتشف أبراهام دي موافر دستوره الشهير:

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$$

الشكل الأسّيّ لعدد مركّب:

نضع اصطلاحًا من أجل كلّ عدد حقيقيّ θ: $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$، فإذا كان z عددًا مركّبًا حيث: $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ فإنّ $z = |z|e^{i\theta}$ وهذه الكتابة تسمّى **الشكل الأسّيّ** للعدد المركّب z.

الجذران التربيعيّان لعدد مركّب:

l عدد مركّب طويلته ρ وعمدته θ نسمّي جذرًا تربيعيًّا للعدد المركّب l كلّ عدد مركّب z حيث $z^2 = l$.

تعيين الجذرين التربيعيّين لعدد مركّب:

باستخدام الشكل الجبريّ	باستخدام الشكل المثلّثيّ	باستخدام الشكل الأسّيّ
$l = x + iy$ $z = \alpha + i\beta$ $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = x \\ 2\cdot\alpha\cdot\beta = y \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$	$l = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $z = \omega(\cos\phi + i\sin\phi)$ $\begin{cases} \omega = \sqrt{\rho} \\ \phi = \dfrac{\theta}{2} + k\pi \end{cases}$	$l = \rho\cdot e^{i\theta}$ $z = \omega\cdot e^{i\phi}$ $\begin{cases} \omega = \sqrt{\rho} \\ \phi = \dfrac{\theta}{2} + k\pi \end{cases}$

حساب $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$:

$z = \cos\theta + i\sin\theta$ و $\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta$

$$\begin{cases} \cos n\theta = \dfrac{z^n + \bar{z}^n}{2} \\ \sin n\theta = \dfrac{z^n - \bar{z}^n}{2i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \\ \bar{z}^n = \cos n\theta - i\sin n\theta \end{cases}$$

العبارة الخطّيّة لكلّ من الأعداد $\cos^n \theta$ و $\sin^n \theta$:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \cos\theta + i\sin\theta \\ \bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$$

ومنه:

$$\cos^n\theta = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^n$$

$$\sin^n\theta = \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^n$$

الأعداد المركّبة والتحويلات النقطيّة:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

التحويل T	العناصر المميّزة	تعريف T مع M'=T(M)	الكتابة المركّبة للتحويل T
الانسحاب	شعاع غير معدوم $\vec{r}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ ذو لاحقة $r=\alpha+i\beta$	$\overrightarrow{MM'}=\vec{r}$	$z'=z+r$
التحاكي	نقطة ω ذات اللاحقة ω' وعدد k≠0	$\overrightarrow{\omega M'}=k\overrightarrow{\omega M}$	$z'-\omega'=k\cdot(z-\omega')$ أو $z'=k\cdot z+b$ مع b عدد مركّب.
الدوران	نقطة ω ذات اللاحقة ω' وزاوية θ	$\begin{cases}\omega M'=\omega M\\ (\overrightarrow{\omega M},\overrightarrow{\omega M'})=\theta\end{cases}$	$z'-\omega'=e^{i\theta}(z-\omega')$ أو $z'=e^{i\theta}z+b$ مع b عدد مركّب.
التناظر بالنسبة إلى محور الفواصل	محور الفواصل	$\begin{cases}\omega M'=\omega M\\ (\vec{u},\overrightarrow{\omega M})=(\overrightarrow{\omega M'},\vec{u})\end{cases}$	$z'=\bar{z}$

المحتويات

الأعداد المركّبة: