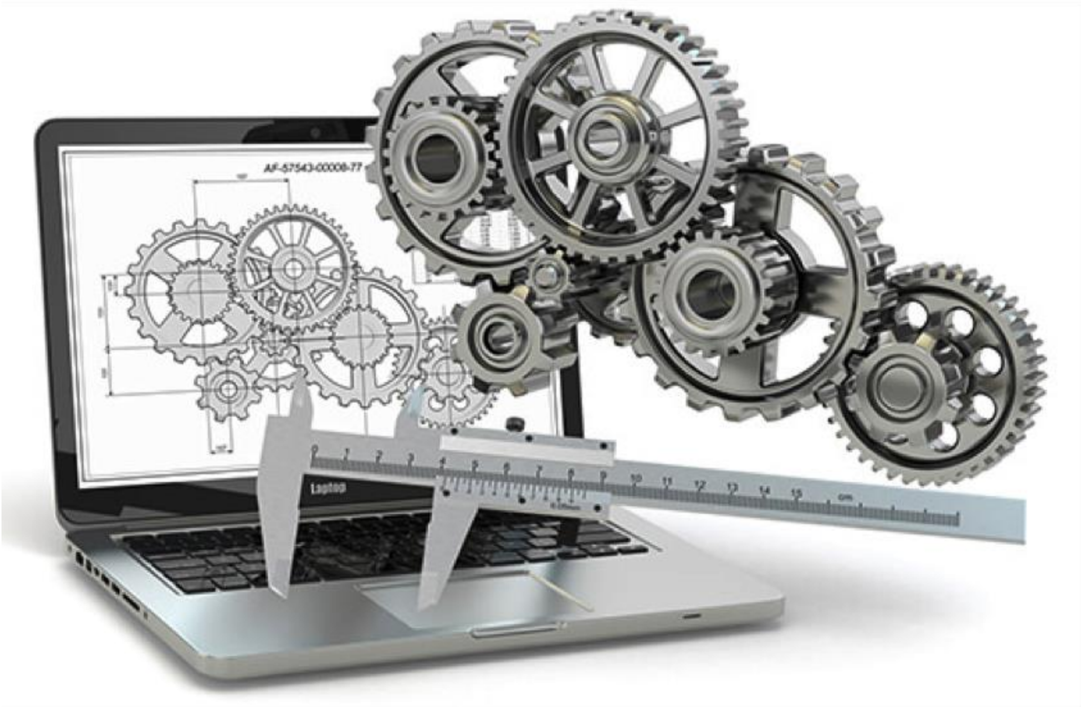
كتاب التصميم بمساعدة الحاسوب



تأليف:

د. أسامة محمد المرضي سليمان خيَّال

قسم الهندسة الميكانيكية

كلية الهندسة والتقنية

جامعة وادي النيل

عطبرة، السودان

الطبعة الأولي ديسمبر 1998م

الطبعة الثانية يناير 2019م

شكر وعرفان

الشكر والعرفان لله والتبريكات والصلوات على رسوله وخادمه محمد وعلى آله وصحابته وجميع من تبعه وتَقفِّي أثره إلى يوم القيامة.

يود الكاتب ان يتقدم بالشكر أجذله لكل من ساهم بجهده وفكره ووقته في إخراج هذا الكتاب بالصورة المطلوبة ، ويخُص بذلك الزملاء/ الأساتذة بقسم الهندسة الميكانيكية بجامعة وادي النيل . عطبرة ، وأيضاً الإخوة/ الأساتذة بقسم الهندسة الميكانيكية بجامعة البحر الأحمر . بورتسودان.

الشكر والتقدير والعرفان للبروفيسور/ **محمود يس عثمان** الذي ساهم بقدر كبير في مراجعة وإعادة مراجعة محتويات الكتاب.

اهدي هذا الكتاب بصفة أساسية لطلاب دبلوم وبكالوريوس الهندسة في جميع التخصصات خاصة طلاب قسم الهندسة الميكانيكية ، حيث يستعرض هذا الكتاب العديد من التطبيقات في التصميم بمساعدة الحاسب مشفوعاً بأمثلة محلولة.

وأُعبر عن شُكري وامتناني إلى المهندس/ **أسامة محمود محمد علي** بمركز دانية لخدمات الحاسوب والطباعة بمدينة عطبرة، الذي أنفق العديد من الساعات في طباعة ، مراجعة وتعديل وإعادة طباعة هذا الكتاب أكثر من مرة. والشكر موصول أيضاً للمهندس/ **عوض علي بكري** الذي شارك في تنسيق هذا العمل.

أخيراً ، أرجو من الله سبحانه وتعالي أن يتقبل هذا العمل المتواضع والذي آمل أن يكون ذا فائدة للقارئ.

مقدمة

إنَّ مؤِّلف هذا الكتاب وإيماناً منه بالدور العظيم والمُقدَّر للأستاذ الجامعي في إثراء حركة التأليف والتعريف والترجمة للمراجع والكتب الهندسية يأمل أن يفي هذا الكتاب بمتطلبات برامج البكالوريوس والدبلوم لطلاب الهندسة الميكانيكية ، هندسة الإنتاج او التصنيع ، الهندسة الكهربائية والهندسة المدنية حيث يُغطِّي مناهج نظرية ومختبرية في الديناميكا الحرارية وتطبيقاتها. يتفق هذا الكتاب لغوياً مع القاموس الهندسي الموحَّد السوداني ، ويُعد الكتاب مرجعاً في مجاله حيث يمكن أن يستفيد منه الطالب والمهندس والباحث. هذا الكتاب مقتبس من مُذكرات مؤلفه في تدريسه لهذا المُقرر لفترة لا تقل عن خمس وعشرون عاماً.

يهدف هذا الكتاب لتأكيد أهمية دراسة التصميم بمساعدة الحاسوب في تطبيقات هندسية عديدة من بينها تحليل الإجهادات، إنتقال الحرارة، تحليل الجملونات، وإنحراف العارضات.

يشتمل هذا الكتاب على خمسة فصول. يستعرض الفصل الأول أسلوب العنصر المحدَّد بمدخل لأهميته، فكرته الأساسية وخطوات حل المسائل باستخدام هذا الأسلوب.

يتضمَّن الفصل الثاني خطوات حل مسائل تحليل الإجهادات باستخدام أسلوب العناصر المحددة التي تشتمل على تعريف شبكة العناصر المحدَّدة، إختيار نموذج الإزاحة، صياغة معادلة الكزازة المتقطعة، حل معادلات الكزازة وتحديد إنفعال وإجهاد العنصر بالإضافة لمثالين عند نهاية هذا الفصل.

أما الفصل الثالث فيشتمل على دراسة تطبيق طريقة العناصر المحدّدة في إنتقال الحرارة حيث يستعرض هذا الفصل المعادلات العامة للتوصيل للإحداثيات المستطيلة والأسطوانية، معادلات معدَّل إنتقال الحرارة، معادلة موازنة الطاقة، وطريقة جاليركن بالإضافة لمثال محلول عند نهاية الفصل.

يتناول الفصل الرابع تحليل الجملونات حيث يشتمل على تعريف للعنصر الفراغي للجملون ومثال محلول في هذا الموضوع.

يشتمل الفصل الخامس على مقدمة وأمثلة محلولة في إنحراف العارضات بإستخدام طريقة العناصر المحددة.

إنَّ الكاتب يأمل أن يساهم هذا الكتاب في إثراء المكتبة الجامعية داخل السودان وخارجه في هذا المجال من المعرفة ويأمل من القارئ ضرورة إرسال تغذية راجعة إن كانت هنالك ثَمَّة أخطاء حتى يستطيع الكاتب تصويبها في الطبعة التالية للكتاب.

والله الموفق

المؤلف

يناير 2019م

المحتويات

الفصل الأول

أسلوب العنصر المحدَّد (F. E. M.)

(Finite Element Method)

1.1 مقدمة: (Introduction)

أسلوب العنصر المحدَّد هو الأسلوب المباشر لحساب التفاوتات للوصول إلي الحل التقريبي للمسائل المتصلة المعقدة (الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية العادية والجزئية). وهذا يتم بتحويل المسائل المتصلة المعقدة (continuum) بدرجة حريتها اللانهائية إلي المسائل بديلة لها درجة حرية محددة خواصها قريبة من النموذج الأصلي.

يستخدم أسلوب العنصر المحدد لحل المسائل ذات الشكل الهندسي المعقد التي لا يمكن حلها بالأساليب التحليلية القياسية. ولكن عندما يكون الشكل الهندسي المراد حساب التفاوتات فيه معقداً فإنَّ المهمة تصبح أكثر تعقيداً وصعوبة. في طريقة العناصر المحدَّدة يمكن تفادي هذه المصاعب بتخيل أنَّ الجسم المصمت المراد إجراء هذه الطريقة عليه يمكن تقسيمه إلي عدد من التقسيمات المحدَّدة لتسهيل حله.

1.2 الفكرة الأساسية لأسلوب العنصر المحدَّد:

أفترض أنَّه يُراد إيجاد توزيع درجة الحرارة للحالة المستقرة في لوحة. الفكرة الأساسية هي تقسيم الشكل الهندسي للوحة إلي عقد (nodes) وعناصر (elements).

من بعد يتم إفتراض أنَّ مجال درجة الحرارة يتفاوت بصيغة بسيطة خلال أي عنصر محدَّد (عادة يتم استخدام التفاوت الخطي أو متعدِّد الحدود الثنائي لاستكمال مجال المتغير). يقود

إجراء التقسيم هذا لنظام معادلات جبرية خطية يمكن حلها بسهولة على حاسوب رقمي.

1.3 فحص جبر المصفوفات: (Review of Matrix Algebra)

يتم تعريف المصفوفة كصفوف وأعمدة $m \times n$ من الأعداد، حيث:

m = عدد الصفوف.

n = عدد الأعمدة.

يُرمز لعنصر من المصفوفة كـ A_{ij}، حيث:

i = صف.

j = عمود.

A_{ij} هو العنصر أو العدد الذي يحتل الصف i والعمود j.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

تُسمي المصفوفة مصفوفة مربعة (Square Matrix) إذا كان $m = n$. إذا كان $m = 1$ تُسمي المصفوفة مصفوفة صف، وإذا كانت $n = 1$ تُسمي المصفوفة مصفوفة عمود أو متجه.

ترميز: (Notation)

$\underline{A}$: مصفوفة (حروف كبيرة).

$\underline{a}$: متجه (حروف صغيرة).

C: قياسي (ليس تحته خط).

الضرب بواسطة مقدار قياسي: (Multiplication of a scalar)

إذا كان $\underline{C} = \alpha \underline{A}$، بالتالي $C_{ij} = \alpha A_{ij}$.

تحوير المصفوفة: (Transpose of a matrix)

يتم الحصول على تحوير المصفوفة بتبادل الصفوف والأعمدة.

مثال:

$$\underset{2\times 3}{\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{3\times 2}{A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

إذا كان $\underline{A}^T = \underline{A}$، بالتالي فإن $\underline{A}$ يقال عنها مصفوفة متماثلة (symmetric). فقط تكون المصفوفات المربعة متماثلة.

جمع المصفوفات: (matrix addition)

إذا كان $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$، بالتالي فإن $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

يتم تعريف جمع المصفوفة عاليه عندما يكون $\underline{C}, \underline{A}, \underline{B}$ جميعها بنفس الرتبة .i.e جميعها لها نفس عدد الصفوف والأعمدة.

$$\underset{m\times n}{C} = \underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B}$$

حاصل ضرب المتجه القياسي: (vector scalar product)

حاصل ضرب متجهين $\underline{a}$، $\underline{b}$ يكون مقداراً قياسياً α

$$\underline{a}.\underline{b} = \underline{a}^T\, \underline{b} = b^T\, a = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$$

مثال:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}^T \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 12 + 0 + 2 = \underline{\underline{14}}$$

ضرب المصفوفة: (matrix multiplication)

اجعل $\dfrac{C}{m \times n} = \dfrac{A}{m \times q} + \dfrac{B}{q \times n}$

بالتالي، $C_{ij} = \sum_{k=1}^{q} A_{ik} B_{kj}$

يتم تعريف حاصل ضرب المصفوفة عندما يكون عدد الأعمدة في $\underline{A}$ مساوٍ لعدد الصفوف في $\underline{B}$.

مثال:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

عموماً، يكون ضرب المصفوفة غير قابل للتبديل .i.e

$$\underline{AB} \neq \underline{BA}$$

وضِّح أنَّ: $(\underline{AB})^T = \underline{B^T A^T}$.

مصفوفة الوحدة: (unit or identity matrix)

المكونات δ_{ij} لمصفوفة الوحدة I يتم تعريفها كـــ

$$\delta_{ij}\begin{cases}0 & if \quad i \neq j \\ 1 & if \quad i = j\end{cases}$$

δ_{ij} تُسمي بدلتا كرونيكر (kronecker delta).

$$I = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{I} = \underline{I}\,\underline{A} = \underline{A}$$

محدِّدة المصفوفة: (determinant of a matrix)

يتم ترميز محدَّدة مصفوفة $\underline{A}$ كـ $\det(\underline{A})$ (يجب أن تكون $\underline{A}$ مصفوفة مربعة).

$$\underline{\det(A)} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} C_{ij}$$

حيث C_{ij} هو العامل المرافق (cofactor) لــ A_{ij}.

معكوس المصفوفة: (Inverse of a matrix)

يتم تعريف معكوس مصفوفة بحيث أنَّ حاصل ضرب مصفوفة A ومعكوسها A^{-1} ينتج مصفوفة وحدة.

$$\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = I = \underline{A}^{-1}\,\underline{A}$$

فقط يكون هنالك معكوساً للمصفوفة المربعة. معكوسة المصفوفات الصغيرة (كمثال حتى رتبة 3×3) يمكن تحديده بالصيغة التالية،

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\underline{C}^{T}}{\det(\underline{A})}$$

حيث $\underline{C}^{T}$ هو تحوير مصفوفة العامل المرافق لـ $\underline{A}$.

المعادلات الجبرية الخطية: (Linear Algebraic Equation)

هي نظم لمعادلات تظهر فيها القيم الغير معلومة خطياً ولا يكون هنالك عوامل تفاضلية أو تكاملية.

مثال:

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2$$

$$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1$$

$$4x_2 + x_3 = 3$$

المعادلات الثلاث عاليه يمكن كتابتها كمصفوفة كالآتي:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$$

مثال:

أوجد الحل للنظام $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$.

الحل:

أضرب مسبقاً بـ A^{-1}

$$\underline{A}^{-1}\,\underline{A}\,x = \underline{A}^{-1}\,\underline{b}$$

$$\underline{I}\,\underline{x} = \underline{A}^{-1}\,\underline{b}$$

$$\Rightarrow \underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}$$

الصيغ التربيعية: (Quadratic forms)

إذا كانت $\underline{A}$ مصفوفة مربعة و x متجه (بنفس عدد الصفوف كـ $\underline{A}$)، بالتالي فإنَّ المقدار القياسي الناتج ،

$$\alpha = \underset{1\times n}{x^T} \underset{\substack{1\times 1 \\ n\times n}}{A} \underset{n\times 1}{x}$$

يسمي بالصيغة التربيعية. يُقال أنَّ المصفوفة A تكون:

1/ محدَّدة ايجابياً إذا كانت $\alpha > 0$ لكل قيم $\underline{x} \neq 0$.

2/ شبه محدَّدة ايجابياً إذا كانت $\alpha \geq 0$ لكل قيم $\underline{x} \neq 0$.

إذا كانت A محدَّدة ايجابياً (positive definite)، بالتالي فإنَّ لها معكوساً، و $\det(\underline{A}) \neq 0$

تفاضل وتكامل المصفوفات: (Differentiation and Integration of Matrices)

افترض أنَّ مكونات مصفوفة $\underline{A}$ هي دوال للمتغير x. تكامل المصفوفة $\underline{A}$ هي مصفوفة بنفس الرتبة كـ A والتي يتم الحصول على مكوناتها بتكامل أي مكونة لـ $\underline{A}$ على انفراد. وبالمثل، فإنَّ مشتقة المصفوفة $\underline{A}$ هي مصفوفة بنفس الرتبة كـ $\underline{A}$ والتي يتم الحصول على مكوناتها بتفاضل أي مكونة لـ $\underline{A}$.

مثال:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2x & 0 & x \\ 3 & x^2 & x^3 \\ x & x^3 & 2x \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\underline{A}}{dx} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 3x^2 & 2 \end{bmatrix}$$

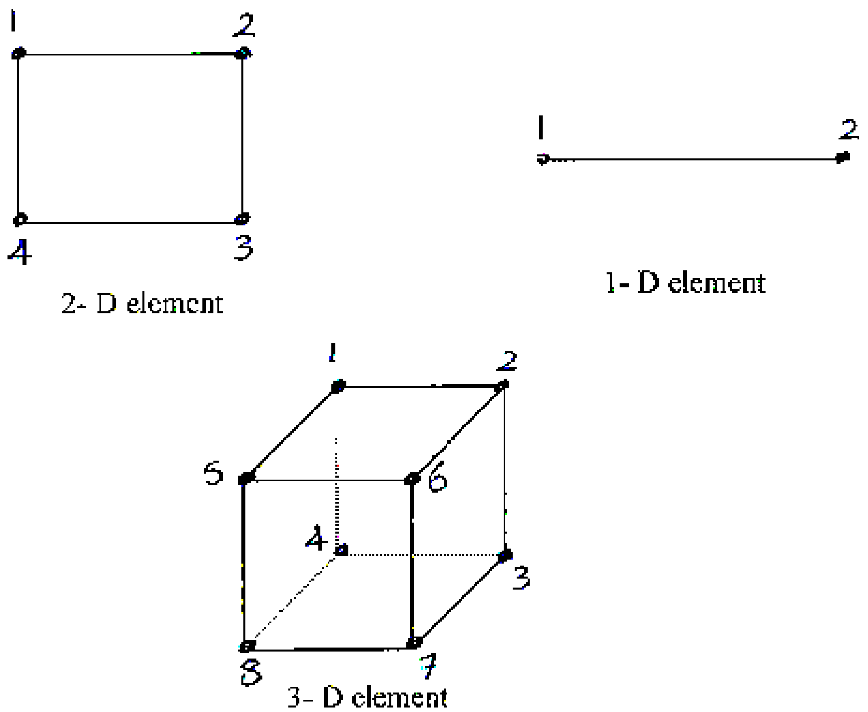
$$\int_{-1}^{1} \underline{A}dx = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} 2x dx & \int_{-1}^{1} 0 dx & \int_{-1}^{1} x dx \\ \int_{-1}^{1} 3dx & \int_{-1}^{1} x^2 dx & \int_{-1}^{1} x^3 dx \\ \int_{-1}^{1} x\,dx & \int_{-1}^{1} x^3 dx & \int_{-1}^{1} 2x dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4 خطوات أسلوب العنصر المحدَّد:

(Procedure of Finite Element Method)

1. التقسيم: (Discretization)

يُقصد به تقسيم نطاق الحل إلي عناصر محدَّدة. هذه العناصر قد تكون ذات بعد واحد أو بعدين أو ثلاثة اعتماداً على المسألة التي بأيدينا (شكل (1.1)). تُسمي النقاط التي تحد العنصر بالعقد (nodes). سيتم التعامل في هذه الدراسة بعنصر ذو بعد واحد.



شكل (1.1)

2. معادلة العنصر: (Element Equation)

يتم تكوين معادلات لافتراض شكل الحل لكل عنصر على حده. هذا الإجراء يتم على مرحلتين هما:

1/ اختيار دالة تقريبية لها معاملات مجهولة القيم.

2/ تحديد قيم لهذه المعاملات لإيجاد الحل لعنصر واحد.

في المرحلة (1) يتم اختيار دوال متعددة الحدود (polynomials). مثلاً لعنصر ذو بعد واحد تكون الدالة من الرتبة الأولي (معادلة خط مستقيم) أي أن:

$$u(x) = a_0 + a_1 x \qquad (1)$$

حيث $u(x)$ هي المتغير التابع، a_0 و a_1 هي معاملات مجهولة القيم، x هي المتغير المستقل. بالإشارة للشكل (1.2)، تكتب المعادلة (1) لطرفي العنصر كالآتي:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= a_0 + a_1 x_1 \\ u_2 &= a_0 + a_1 x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

حيث $u_1 = u(x_1)$ ، و $u_2 = u(x_2)$.

يمكن حل المعادلة (2) لتحديد a_0 و a_1 كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} \\ a_1 &= \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

بتعويض المعادلة (3) في المعادلة (1)،

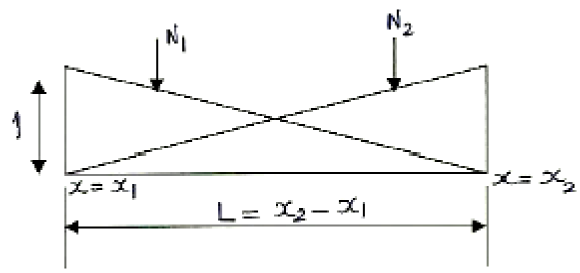
$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 \qquad (4)$$

أو في شكل مصفوفة،

$$u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

حيث N_1 وN_2 تسميان بدوال الشكل (shape functions) وهما:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \\ N_2 &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$



شكل (1.2)

من المعادلة (6)، عندما $x = x_1$،

$N_1 = 1$

$N_2 = 0$

وعندما $x = x_2$،

$N_1 = 0$

$N_2 = 1$

أيضاً يمكن وضع N_1 وN_2 في صورة دالة متعدد الحدود،

$$N_i = a_i + b_i x \qquad (7)$$

قيم a_i وb_i تعتمدان على رتبة العنصر وشروطه الحدية. مثلاً للعنصر الأول:

$$x_2 = L, \quad x_1 = 0$$

عندما $b_1 = -\frac{1}{L},\ a_1 = 1 : i = 1$

عندما $b_2 = \frac{1}{L},\ a_2 = 0 : i = 2$

حيث L هو طول العنصر ويُعطي بالعلاقة: $L = x_2 - x_1$

بالتعويض في المعادلة (7)،

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= 1-\frac{x}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

بهذه الطريقة يمكن إيجاد دالـة الشكل لأي عنصـر. الجـدول (1.1) أدنـاه يبـين قيم a_i و b_i للأربع عناصر الأولي عندما تكون متساوية الطول.

جدول رقم (1.1)

العنصر	a_1	a_2	b_1	b_2
1	1	0	-1/L	1/L
2	2	−1	-1/L	1/L
3	3	−2	-1/L	1/L
4	4	−3	-1/L	1/L

يلاحظ من الجدول (1.1) أعلاه أنَّ القيم العمومية لهذه الثوابت هي:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= n \\ a_2 &= 1-n \\ b_1 &= -\tfrac{1}{L} \\ b_2 &= \tfrac{1}{L} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

حيث n هي رتبة العنصر.

بتعويض المعادلة (9) في المعادلة (7)،

$$N_i = a_i + b_i x \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= n - \tfrac{x}{L} \\ N_2 &= (1-n) + \tfrac{x}{L} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

بتفاضل المعادلة (10)،

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} &= -\tfrac{1}{L} \\ \frac{dN_2}{dx} &= \tfrac{1}{L} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

معادلات العناصر الناتجة تتكون من مجموعة معادلات جبرية خطية يمكن وضعها على هيئة معادلة مصفوفة كالآتي:

$$[k][u] = [m] \qquad (12)$$

حيث [k] هي مصفوفة كزازة العنصر (element stiffness matrix)، و [u] هي مصفوفة من عمود واحد بها الكميات المراد تحديدها و [m] هي مصفوفة الكتلة للعنصر (element mass matrix) وهي أيضاً من عمود واحد.

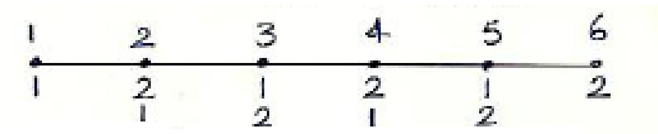
3. التجميع: (Assembly)

هي عملية لربط معادلات العناصر لتحديد السلوك الموحد للنظام ككل، ويراعي فيه مبدأ الاستمرار، أي أنَّ نهاية عنصر هي بداية عنصر جديد. تُعرف إحداثيات عقد كل عنصر على حدة بالإحداثيات الموضعية (Local co-ordinates) و إحداثيات عقد النظام بالكامل بالإحداثيات الكونية (Global co-ordinates) الشكل (1.3) أدناه يوضح هاتين التسميتين.

بعد عملية التجميع يتم الحصول على معادلة المصفوفة الكونية كما يلي:

$$[k]\ [u'] = [M] \qquad (13)$$

حيث [k] هـي مصـفوفة الكـزازة، ['u] هـي مصـفوفة مـن عمـود واحـد بهـا الكميـات المـراد تحديدها للنظام كله و [M] هي مصفوفة الكتلة للنظام وهي أيضاً من عمود واحد.



شكل (1.3)، التسميتان الموضعية والكونية للعناصر

4. الشروط الحدودية: (Boundary Conditions)

قبل حل المعادلة (13) يجب تعديلها لتستوعب الشروط الحدودية لنطاق الحل. هذه الشروط الحدودية تُمثِّل قيم الحل في بداية العنصر الأول ونهاية العنصر الأخير. هذه التعديلات تقود للمعادلة:

$$[\bar{k}][\overline{u'}]=[\overline{M}] \qquad (14)$$

5. يتم حل المعادلة (14) لإيجاد قيم المجاهيل في المصفوفة ['u] بعدة طرق، منها تفكيك معادلـة المصـفوفة إلـي معـادلات آنيـة ثـم حلهـا. تسـتخدم هـذه الطريقـة عنـدما يكـون عـدد العناصر بسيطاً (أقل من 5 مثلاً). أما في حالة أن يكون عدد العناصر كبيراً، فلابد من استخدام الحاسوب في الحل. يستخدم الحاسوب لإيجاد مقلوب مصفوفة الكزازة وضربه في معادلة الكتلة. أي أنَّ:

$$[\overline{u'}]=[\bar{k}]^{-1}[\overline{M}] \qquad (15)$$

الفصل الثاني

حل مسائل تحليل الإجهادات باستخدام أسلوب العناصر المحدَّدة

(Solution of Stress Analysis Problems Using Finite Elements Method)

يمكن تلخيص خطوات الحل في خمس خطوات أساسية:

2.1 تعريف شبكة العناصر المحددة:

(Definition of the finite element mesh)

اعتماداً على المسألة التي بأيدينا، سيكون من المناسب تمييزها كخط أو ذات بعدين أو ثلاث أبعاد.

2.2 اختيار نموذج الإزاحة: (Selection of the displacement model)

يجب أن تقابل الدالة التي يتم اختيارها لوصف نموذج الإزاحة لعنصر ما أحكاماً معينة:

أ/ عدد الاصطلاحات أو العناصر في المتسلسلة: (Number of terms in the series).

عدد الاصطلاحات أو العناصر في المتسلسلة التي يتم اختيارها يجب أن يساوي العدد الكلي لدرجة الحرية (.i.e الإزاحة العقدية (nodal displacement)، الدوران (rotation)، الانفعال (strain)).

ب/ الانسجام: (Compatibility)

الدالة التقريبية وبعض مشتقاتها التفاضلية يجب أن تكون متصلة خلال العنصر ويجب أن يكون هنالك انسجام بين العناصر المتجاورة.

الجسم الجاسئ (rigid body) هو نموذج الإزاحة البسيط (ليس به انفعال) يليه في البساطة نموذج ثابت الانفعال، وعليه فإنَّ الدالة التي يتم اختيارها يجب أن تكون قادرة على تمثيل هذين الشرطين.

هذا يتضمن أنَّ تمثيل متسلسلة القدرة يجب أن يبدأ بثوابت (constants) واصطلاحات خطية (linear terms).

2.3 صياغة معادلة الكزازة المتقطعة:

(Formulating the discrete stiffness equation)

على أساس نموذج الإزاحة المفترض Q فإنَّ توزيع الانفعال خلال العنصر الفردي وتبعاً لذلك طاقة الوضع الكلية للتقريب المتقطع يمكن تحديدها من،

$$V = U + \Omega = \sum \left(U^e + \Omega^e \right) \qquad \text{(a)}$$

حيث، V = طاقة الانفعال الكلية.

U = طاقة الانفعال للعنصر.

Ω = طاقة الانفعال للأحمال المسلطة.

$$\mathrm{V} = \mathrm{v}\left(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \cdots, \mathrm{a}_\mathrm{n}\right) \qquad \text{(b)}$$

حيث $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \cdots, \mathrm{a}_\mathrm{n}$ هي إحداثيات الإزاحة.

بوضع الشرط dv = 0 للاتزان فإنَّ ذلك يقود لمعادلة الكزازة التالية،

$$[k][a] = [Q] \qquad \text{(c)}$$

2.4 حل معادلات الكزازة: (Solution of the stiffness equations)

يـتم حـل المعادلـة (c) بالطريقـة المعياريـة للمصـفوفات الجبريـة. [k] تكـون متماثلـة وغالبـاً العديد من عناصرها يساوي صفر.

المصفوفة المتماثلة: (Symmetric matrix)

مصفوفة (n×n) تُسمي متماثلة إذا كانت $A^T = A$

كمثال،

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix} = A \text{ ؛ } A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

2.5 تحديد انفعال وإجهاد العنصر:

(Determining the element strain and stress)

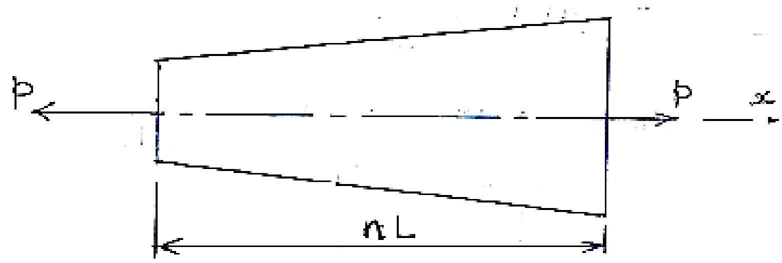
عندما يتم تحديد نموذج الإزاحة فإنَّه من السهولة بمكان حساب انفعال العنصر من نموذج الإزاحة بإستخدام علاقة الإزاحة / الانفعال. ويمكن الحصول على الإجهادات عندها بواسطة قانون هوك (Hook's law).

2.6 مثال (1):

صياغة إزاحة العناصر المحدَّدة لقضيب معرَّض لحمل شد:

(Displacement finite element formulation for bar extension)

اعتبر قضيباً مسلوباً أحادي محور الحمل كما موضح في الشكل (2.4) أدناه.

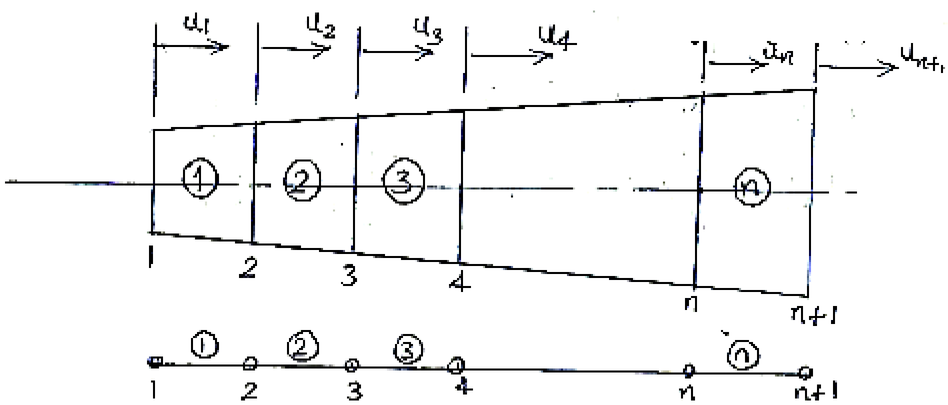


شكل (2.4)

الخطوة الأولي هي تعريف شبكة العناصر المحدَّدة:

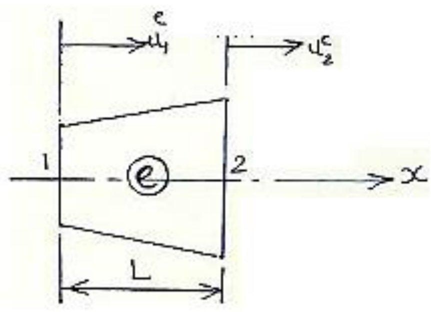
في هذه الحالة فإنَّ التقسيم هو ترتيب خطي للعناصر كما موضح في الشكل (2.5) أدناه.

نعرف من ميكانيكا المواد أن التشوه (تغير الشكل) باعتبار أن المسلوب قاسي يعتمد على الإزاحة المحورية u(x) للمقطع العرضي.



شكل (2.5)

نأخذ عنصراً نموذجياً e ونُعلِّم مواضع العقد الخارجية (External nodes) كـ 1 و2، والإحداثي الموضعي للعنصر x كما هو واضح في الشكل (2.6) أدناه.



شكل (2.6)

وعلى المقياس الموضعي، فإن تغير الشكل (deformation) يتم تحديده بالإزاحة العقدية للعنصر (element nodal displacement) u_1^e و u_2^e.

الخطوة التالية هي اختيار نموذج إزاحة للعنصر. من دراستنا لميكانيكا المواد فإننا نعلم أنَّ الانفعال يتفاوت على طول القضيب المسلوب بعلاقة لا خطية (non-linear fashion).

وعليه فإنَّ دالة u يمكن كتابتها كالآتي:

$$u^e(x) = a_0 + a_1 x = [1 \quad x]\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = [f(x)]\{a\} \qquad (1)$$

بالرجوع للشكل (2.6) عاليه وبوضع $x = 0$ و $x = L$ يمكن كتابة المعادلة (1) كالآتي:

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

ويمكن تبسيطها كالآتي،

$$\{u\}^e = [A]\{a\} \qquad (3)$$

بجعل a موضع القانون،

$$\therefore \{a\} = [A]^{-1}\{u\}^e$$

بالتعويض في المعادلة (1)،

$$u^e(x) = [f(x)][A]^{-1}\{u\}^e \qquad (4)$$

في هذه الحالة،

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

من المعادلة (4)،

$$u^e(x) = [1 \quad x]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$$

يمكن القول أنَ،

$$u^e(x) = \left[\left(1 \quad -\frac{x}{L}\right) \quad \frac{x}{L}\right]\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

أو $;\mathrm{u^e(x)} = [\mathrm{N_1(x)} \quad \mathrm{N_2(x)}]\begin{Bmatrix} \mathrm{u_1^e} \\ \mathrm{u_2^e} \end{Bmatrix} \qquad (6)$

الخطوة الثالثة هي الحصول على الانفعال وطاقة الانفعال للعنصر:

الانفعال، $\varepsilon = \dfrac{du^e}{dx} = \dfrac{dN}{dx}\{u\}^e = [B]\{u\} \qquad (7)$

في هذه الحالة،

الانفعال، $\varepsilon = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \qquad (8)$

من قانون هوك، (Hook's Law)،

$$\sigma = E\ \varepsilon$$

حيث يمكن كتابة صورتها العامة الآتي،

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \qquad (9)$$

بما أنَّ $\sigma = \dfrac{F}{A}$ ، $\varepsilon = \dfrac{\delta L}{\delta x}$

طاقة الانفعال، $U = \frac{1}{2} F \delta L$

$$= \frac{1}{2} \sigma \varepsilon A dx = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 A\, dx$$

يمكن كتابة طاقة الانفعال المختزنة في العنصر كالآتي:

$$U^e = \int \tfrac{1}{2} E \varepsilon^2 dV$$

$$= \int \tfrac{1}{2} \{\varepsilon\}^t [E] \{\varepsilon\} dV \qquad (10)$$

من المعادلتين (7) و (10)،

$$U^e = \int \tfrac{1}{2} [B]^t \{u^e\}^t [E][B]\{u^e\} dV$$

$$U^e = \tfrac{1}{2} \{u^e\}^t \left(\int [B]^t [E][B] dV \right) \{u^e\} \qquad (11)$$

بتقييم حاصل ضرب المصفوفة وإجراء التكامل نحصل على،

$$U^e = \tfrac{1}{2} \{u^e\}^t [k]^e \{u\}^e \qquad (12)$$

$$[k]^e = \int [B]^t [E][B] dV \qquad (13)$$

حيث $[k]^e$ = مصفوفة كزازة العنصر (element stiffness matrix) وهي مصفوفة متماثلة بالرتبة (2×2)،

طاقة الانفعال الكلية، $U = \sum u^e$ (14)

إجعل، $\{\tilde{u}\} = \{\{u\}^e\} = \begin{Bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}^2 \\ \vdots \\ \{u\}^n \end{Bmatrix}$ (15)

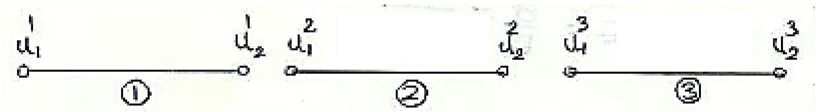
وأيضاً إجعل،

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} [k]^1 & 0 & \cdots \\ 0 & [k]^2 & \cdots \\ & \ddots & \\ & & [k]^n \end{bmatrix} \qquad (16)$$

المعادلة (14) يمكن كتابتها كالآتي من المعادلة (15) والمعادلة (12)،

$$U = \tfrac{1}{2}\{\tilde{u}\}^t [\tilde{K}]\{\tilde{u}\} \qquad (17)$$

والآن عناصر $\{u\}^e$هي ليست مطلقاً مستقلة.



$$u_2^1 = u_1^2 = u_2$$

$$u_2^2 = u_1^3 = u_3$$

$$\vdots$$

etc.

عليه يمكن كتابتها كالآتي،

$$\begin{Bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}^2 \\ \vdots \\ \{u\}^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [C]^1 \\ [C]^2 \\ \vdots \\ [C]^n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \qquad (18)$$

أو $\{\tilde{u}\} = [c]\{u\}$ (19)

بالتعويض في المعادلة (17)،

$$U = \tfrac{1}{2}\{u\}^t [C]^t [\tilde{k}][C]\{u\} \qquad (20)$$

أو $U = \tfrac{1}{2}\{u\}^t [k]\{u\}$ (21)

$k = [C]^t [\tilde{k}][C]$، حيث

والآن، طاقة الانفعال للأحمال المطبقة يمكن الحصول عليها من:

$$\Omega = -(-pu_1) - pu_{n+1} \qquad (22)$$

عموماً يمكن كتابتها كالآتي:

$$\Omega = -\{u\}^t [X] \qquad (23)$$

حيث X = القوي المسلطَّة خارجياً (External applied forces)

طاقة الانفعال الكلية = طاقة الانفعال للعنصر + طاقة الانفعال للأحمال المسلطَّة

$$V = \tfrac{1}{2}\{u\}^t [k]\{u\} - \{u\}^t [x] \qquad (24)$$

للاتزان، δV = 0، عليه،

$$\{\delta u\}^t ([k]\{u\} - \{x\}) = 0 \qquad (25)$$

$$[k]\{u\} = \{x\} \qquad (26)$$

هذه هي معادلة الاتزان المطلوبة للجسم التقريبي المجمع.

2.7 مثال (2):

لعنصر قضيب مسلوب مسلَّط عليه حمل محوري فقط كما في الشكل (2.7) أدناه، وضِّح أنَّ مصفوفة كزازة العنصر تعطي بالعلاقة التالية:

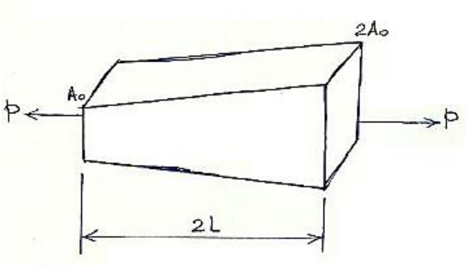
$$[k]^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

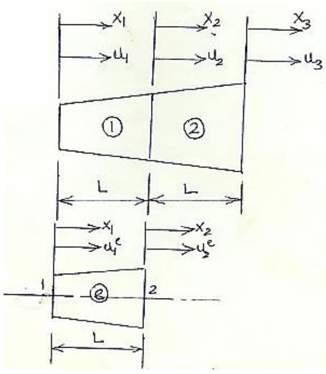
حيث E = معاير يونق للمرونة.

A= مساحة المقطع العرضي للعنصر.

L = طول العنصر.

أيضاً ، أحسب متوسط الانفعال والإجهاد للقضيب.





شكل (2.7)

الحل:

قسِّم القضيب إلي عنصرين،

افترض أنَّ دالة الإزاحة هي،

$$u^e(x) = a_0 + a_1 x$$

أو $u^e(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$ ، (1)

عندما x = 0 و x = L ،

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$$

أو $\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

عوِّض عن المعادلة (2) في المعادلة (1)،

$$u^e(x)=\begin{bmatrix}1 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^e\\ u_2^e\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\left(1 \quad -\dfrac{x}{L}\right) & \dfrac{x}{L}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^e\\ u_2^e\end{Bmatrix}$$

أو $\quad u^e(x)=\begin{bmatrix}N_1(x) & N_2(x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^e\\ u_2^e\end{Bmatrix}$ (3)

الانفعال ، $\varepsilon=\dfrac{du^e(x)}{dx}=\dfrac{dN}{dx}\{u\}^e$

$$=[B]\{u\}^e \quad (4)$$

$$\therefore \varepsilon=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^e\\ u_2^e\end{Bmatrix}$$

من قانون هوك،

$$\{\sigma\}=\{E\}\{\varepsilon\}$$

والآن، طاقة الانفعال المختزنة في العنصر يمكن إعطاؤها كالآتي:

$$U^e=\int_0^L \tfrac{1}{2}E\,\varepsilon^2 dV$$

$$=\int \tfrac{1}{2}\{\varepsilon\}^t[E]\{\varepsilon\}dv \quad (5)$$

من المعادلتين (4) و (5) ،

$$U^e=\int \tfrac{1}{2}[B]^t\{u\}^{e^t}[E][B]\{u\}^e dV$$

$$U^e=\tfrac{1}{2}\{u^e\}^t\left(\int [B]^t[E][B]dV\right)\{u^e\} \quad (6)$$

بإجراء التكامل نحصل على،

$$U^e=\tfrac{1}{2}\{u^e\}^t[k]^e\{u\}^e \quad (7)$$

حيث $[k]^e$ هي مصفوفة كزازة العنصر،

بوضع ،

$$[k]^e = \int_0^L [B]^t [E][B] dV \qquad (8)$$

$$= \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A\,dx$$

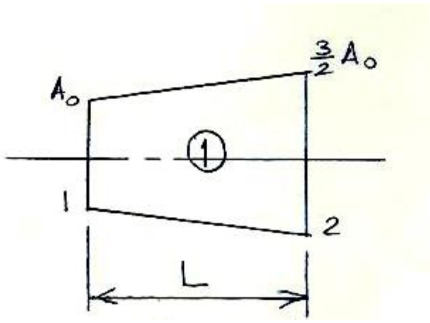
$$= \frac{E}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \{-1 \quad 1\} A\,dx$$

$$= \frac{EA}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} (x)_0^L$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

اعتبر العنصر (1):



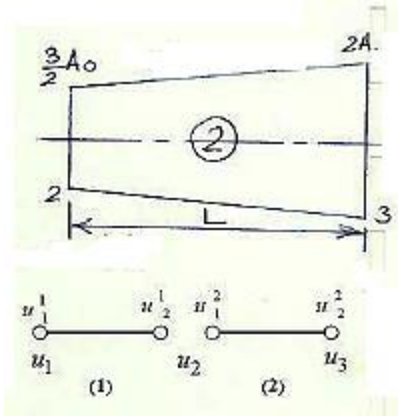
$$[k]^1 = \frac{EA_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

مساحة المقطع العرضي للعنصر (1) = A_1، حيث،

$$= \frac{1}{2}\left(A_0 + \frac{3}{2}A_0\right) = \frac{5}{4}A_0$$

$$\therefore [k]^1 = \frac{5EA_0}{4L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

اعتبر العنصر (2):



$$[k]^2 = \frac{EA_2}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}A_0 + 2A_0\right) = \frac{7}{4}A_0$$

$$\therefore [k]^2 = \frac{7EA_0}{4L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

$$\{\tilde{u}\} = [C]\{u\}$$

عليه، يمكن كتابة مصفوفة الإزاحة المحورية للعناصر (1) و(2) كالآتي:

$$\begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad (12)$$

أو $\{\tilde{u}\} = [C]\{u\}$

من المعادلتين (10) و (11)،

$$[\tilde{k}] = \frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

ولكن مصفوفة الكزازة للقضيب كله يمكن إعطاؤها كالآتي:

$$[k] = [C]^t[\tilde{k}][C]$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5&-5&0&0\\-5&5&0&0\\0&0&7&-7\\0&0&-7&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5&-5&0&0\\-5&5&7&-7\\0&0&-7&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5&-5&0\\-5&12&-7\\0&-7&7\end{bmatrix}$$

$$=\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5&-5&0\\-5&12&-7\\0&-7&7\end{bmatrix} \qquad (13)$$

من معادلة الاتزان، $[k]\{u\}=\{X\}$،

$$\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5&-5&0\\-5&12&-7\\0&-7&7\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{Bmatrix} \qquad (14)$$

بتطبيق الشروط الحدودية في المعادلة (14)،

$X_1 = X_1,\ X_2 = 0,\ X_3 = X_3$

$$\frac{EA_0}{4L}\begin{Bmatrix}5u_1-5u_2\\-5u_1+12u_2-7u_3\\-7u_2+7u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1\\0\\X_3\end{Bmatrix}$$

$$\frac{5EA_0}{4L}(u_1-u_2)=X_1 \qquad (15)$$

$$\frac{EA_0}{4L}(-5u_1+12u_2-7u_3)=0 \qquad (16)$$

$$\frac{7EA_0}{4L}(-u_2+u_3)=X_3 \qquad (17)$$

من المعادلة (16)،

$$-5u_1+12u_2-7u_3=0$$

$$-7u_3=5u_1-12u_2$$

$$\therefore u_3 = \frac{12u_2 - 5u_1}{7} = \frac{12}{7}u_2 - \frac{5}{7}u_1$$

بالتعويض عن قيمة u_3 في المعادلة (17)،

$$\frac{7EA_0}{4L}\left(-u_2 + \frac{12}{7}u_2 - \frac{5}{7}u_1\right) = X_3$$

$$\frac{7EA_0}{4L}\left(\frac{5}{7}u_2 - \frac{5}{7}u_1\right) = X_3$$

$$-\frac{5}{7} \times \frac{7EA_0}{4L}(u_1 - u_2) = X_3$$

$$\frac{-5EA_0}{4L}(u_1 - u_2) = X_3$$

قوتان متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه، $\therefore X_1 = -X_3$

لإيجاد الانفعالات والاجهادات:

اعتبر العنصر (1):

الانفعال في العنصر (1)، $\varepsilon^1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = -\frac{u_1}{L} + \frac{u_2}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L}$

من المعادلة (15)،

$$X_1 = \frac{-5EA_0}{4L}(u_2 - u_1)$$

$$\therefore \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{4X_1}{5EA_0}$$

$$\therefore \varepsilon^{(1)} = -\frac{4X_1}{5EA_0} = \frac{4X_3}{5EA_0}$$

الإجهاد في العنصر (1)، $\therefore \sigma^1 = E\varepsilon^1 = E \times \frac{-4X_1}{5EA_0} = -\frac{4X_1}{5A_0} = \frac{4X_3}{5A_0}$

بما أنَّ $X_1 = -X_3$

اعتبر العنصر (2):

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{u_3 - u_2}{L}$$

$$\therefore \frac{u_3 - u_2}{L} = \frac{4X_3}{7EA_0}$$

$$\therefore \varepsilon^{(2)} = \frac{4X_3}{7EA_0} = \frac{-4X_1}{7EA_0}$$

$$\therefore \sigma^{(2)} = E\varepsilon^{(2)} = E \times \frac{4X_3}{7EA_0} = \frac{4X_3}{7A_0} = \frac{-4X_1}{7A_0}$$

$$\therefore \varepsilon_{average} = \frac{\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{4X_3}{5EA_0} + \frac{4X_3}{7EA_0}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{28X_3 + 20X_3}{35EA_0}\right]$$

$$= \frac{24X_3}{35EA_0}$$

$$\sigma_{average} = E\ \varepsilon_{average} = \frac{24}{35}\frac{X_3}{A_0}$$

الفصل الثالث

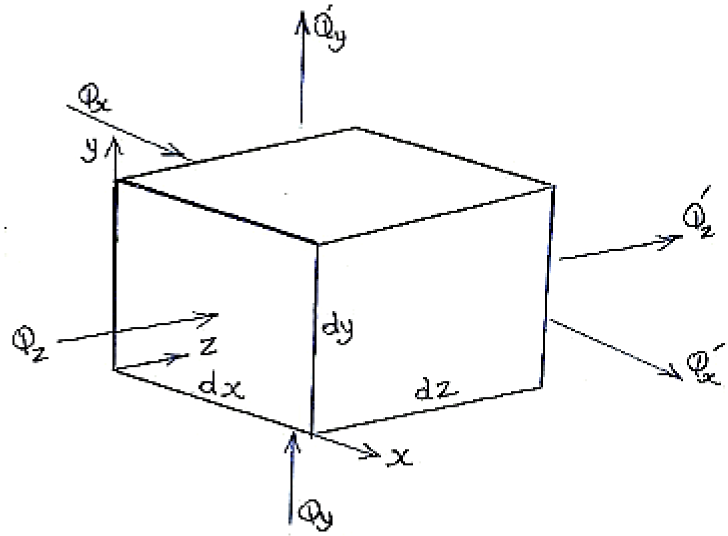
تطبيق طريقة العناصر المحدَّدة في إنتقال الحرارة

Application of Finite Element Method in Heat (Transfer)

3.1 المعادلة العامة للتوصيل للإحداثيات المستطيلة (الكارتيزية):

(General Conduction Equation of Cartesian Co-ordinates)

يمكن اشتقاق المعادلة العامة لجسم مصمت ذو ثلاث أبعاد تتولد فيه حرارة داخلية منتظمة نتيجة للتسخين الذري لجزيئات المادة، وتتغير فيه درجة الحرارة بالنسبة للزمن. إرجع للشكل (3.1) أدناه.



شكل (3.1)

من قانون فورير للتوصيل: (Fourier's Law of conduction)

يقول قانون فورير: معدَّل سريان الحرارة خلال معدن مصمت متجانس مفرد يتناسب طردياً مع مساحة المقطع المتعامد مع إتجاه السريان ومع التغير في درجة الحرارة بالنسبة لطول ممر السريان $\frac{dt}{dx}$. (هذا قانون تجريبي مؤسس على المشاهدة).

$$Q\alpha - A\frac{dt}{dx}$$

السريان في إتجاه x ، $Q = -kA\frac{dt}{dx}$

$$Q\,dx = -kAdt$$

$$\int_0^x Qdx = -\int_{t_1}^{t_2} kadt$$

$$Qx = -kA(t_2 - t_1)$$

$$\therefore Q = \frac{-kA}{x}(t_2 - t_1) = \frac{kA}{x}(t_1 - t_2)$$

$$Q_x = -kA\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$= -k(dy\ dz)\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$Q_y = -kA\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$= -k(dx\ dz)\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$Q_z = -kA\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$= -k(dx\ dy)\frac{\partial t}{\partial z}$$

التغير في سريان الحرارة في إتجاه x،

$$Q'_x - Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}dx = -k\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}dx\ dy\ dz$$

نفس الشئ بالنسبة لاتجاه z,y،

$$Q'_y - Q_y = \frac{\partial Q}{\partial y} dy = -k \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dx\ dy\ dz$$

$$Q'_z - Q_z = \frac{\partial Q}{\partial z} dz = -k \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dx\ dy\ dz$$

معدَّل توليد الحرارة: (rate of heat generation)

$$Q_g = q_g (dx\ dy\ dz)$$

حيث q_g هو معدَّل توليد الحرارة لكل وحدة حجم.

معدَّل زيادة طاقة العنصر:

معدَّل زيادة طاقة العنصر = الكتلة × الحرارة النوعية × معدَّل تغير الحرارة بالنسبة للزمن

معدَّل زيادة طاقة العنصر $= \ell (dx\ dy\ dz) C \frac{\partial t}{\partial \tau}$

موازنة الطاقة للعنصر تُعطي بالمعادلة التالية:

معدَّل زيادة طاقة العنصر = معدَّل توليد الحرارة – التغير في سريان الحرارة

$$q_g (dx\ dy\ dz) - \left[(Q'_x - Q_x) + (Q'_y - Q_y) + (Q'_z - Q_z) \right] = \ell C (dx\ dy\ dz) \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$q_g (dx\ dy\ dz) - \left[-k \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx\ dy\ dz - k \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dx\ dy\ dz - k \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dx\ dy\ dz \right]$$

$$= \ell C (dx\ dy\ dz) \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة طرفي المعادلة % dx dy dz نحصل على،

$$q_g - \left[-k \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - k \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] = \ell C \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة طرفي المعادلة % k،

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_g}{k} = \frac{\ell C}{k} \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

ولكن $\alpha = \frac{k}{\ell C}$ (الانتشارية الحرارية) (thermal diffusivity)

الانتشارية الحرارية هي النسبة بين الموصلية الحرارية k والسعة الحرارية ρC.

إذا كانت قيمة α كبيرة فهذا يعني إما أنَّ قيمة k كبيرة أو قيمة ρC صغيرة ففي الحالة الأولي يكون هنالك انتقال حراري سريع وفي الحالة الثانية يكون امتصاص الحرارة بواسطة الجسم صغير.

معادلة ثلاثية البعد غير مستقرة: $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{q_g}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial t}{\partial \tau}$

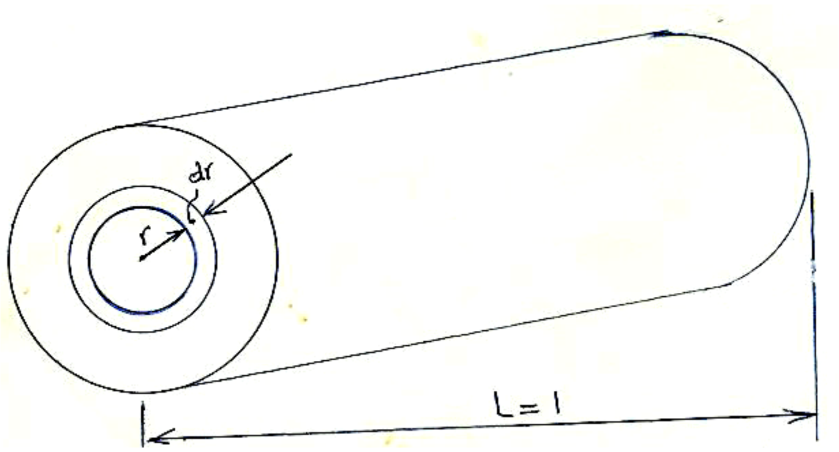
معادلة ثلاثية البعد مستقرة: $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{q_g}{k}=0$

3.2 المعادلة العامة للتوصيل للإحداثيات الأسطوانية (القطبية):

(General Conduction Equation for Polar Co-ordinates)

اعتبر سريان الحرارة خلال عنصر صغير سمكه dr عند أي نصف قطر r، حيث درجة الحرارة هي t. أجعل الموصلية الحرارية للمادة k.

لوحدة طول في الاتجاه المحوري يمكن كتابة معادلة موازنة الطاقة كالآتي:



معادلة موازنة طاقة العنصر،

$$q_g 2\pi r\, dr - \frac{\partial Q}{\partial r} dr = \rho c.2\pi r\, dr \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$q_g 2\pi r\, dr - \frac{\partial}{\partial r}\left(-k 2\pi r \frac{\partial t}{\partial r} \right) dr = \rho c.2\pi r\, dr \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة طرفي المعادلة ÷ $2\pi dr$،

$$q_g r + \frac{\partial}{\partial r}\left(kr \frac{\partial t}{\partial t} \right) = \rho c r \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$\therefore q_g r + \left(kr \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + k \frac{\partial t}{\partial r} \right) = \rho c r \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة البسط والمقام ÷ kr

$$\therefore \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{q_g}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

معرفة توزيع درجة الحرارة خلال جسم معين ذات أهمية كبيرة في الكثير من المسائل الهندسية. هذه المعلومة ستكون مفيدة في حساب الحرارة المكتسبة والحرارة المفقودة من الجسم. وهي مفيدة في تصميم الغلايات (Boilers)، التوربينات (Turbines)، الآلات النفاثة (Jet Engines)، وقوالب السباكة والصب (Casting and moulding dies).

المعادلات الأساسية لانتقال الحرارة، موازنة الطاقة ومعدَّل انتقال الحرارة يتم تلخيصها فيما يلي:

$$E_{in}^0 + E_g^0 = E_{out}^0 + E_{i.e}^0 \qquad (1)$$

حيث E_{in}^0 = سريان الطاقة إلي المنظومة (الطاقة الداخلية).

E_g^0 = الطاقة المتولدة في المنظومة.

E_{out}^0 = سريان الطاقة خارج المنظومة (الطاقة الخارجية).

$E_{i.e}^0$ = التغير في الطاقة الداخلية.

3.3 معادلات معدَّل انتقال الحرارة: (Rate Equations)

هذه المعادلات تصف معدَّل سريان الطاقة:

(i) التوصيل (conduction) (2) $q = -kA\frac{\partial t}{\partial x}$

(ii) الحمل (convection) (3) $q = hA(T - T_{\infty})$

(iii) الإشعاع (radiation) (4) $q = \sigma \in A(T^4 - T_{\infty}^4)$

(iv) الطاقة المتولدة في الجسم المصمت، E_g^0

$$E_g^0 = q^\circ V \qquad (5)$$

(v) الطاقة المختزنة، E_s^0

$$E_s^0 = \rho c v \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (6)$$

3.4 معادلة موازنة الطاقة : (Energy balance equation)

معادلة موازنة الطاقة هي،

الطاقة الداخلة في زمن dt + الطاقة المتولدة في زمن dt = الطاقة الخارجة في زمن dt +

التغير في الطاقة الداخلية في زمن dt

ومنها نحصل على ،

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_g}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \qquad (7)$$

حيث $\alpha = \frac{k}{\rho c}$.

وهي معادلة تفاضلية ثلاثية البعد غير مستقرة بتوليد حراري.

3.5 طريقة جاليركن: (Galerkin Approach)

طريقة العناصر المحدَّدة باستخدام أسلوب جاليركن يمكن وصفها بالخطوات التالية:

(i) قسِّم المنظومة لعدد من العناصر المحددة E تمتلك عدد من العقد مقدارها p.

(ii) افترض شكل مناسب من التفاوت في درجة الحرارة T في كل عنصر محدَّد وعبِّر عن $T^e(x,y,z,t)$ كالآتي:

$$T^e(x,y,z,t)=[N(x,y,z)]T^{-e}$$

في طريقة جاليركن فإنَّ المتبقي الوزنى لمنظومة العناصر يتم وضعه كصفر،

$$\iiint_{V^e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T^e}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial T^e}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial T^e}{\partial z}\right)+q^\circ-\rho c\frac{\partial T^e}{\partial t}\right]dv=0 \quad (1)$$

ويمكن كتابتها كالآتي:

$$\left[k_1^e\right]T^e+\left[k_2^e\right]T^e+\left[k_3^e\right]T^e-p^e=0 \qquad (2)$$

حيث،

$$\left[k_1^e\right]=\int\iint[B]^t[D][B]dv \qquad (3)$$

$$\left[k_2^e\right]=\iint h[N]^t[N]ds \qquad (4)$$

$$\left[k_3^e\right]=\int\iint\rho c[N]^t[N]dv \qquad (5)$$

$$p^e=p_1^e-p_2^e+p_3^e \qquad (6)$$

$$p_1^e=\iiint\dot{q}[N]^t\,dv \qquad (7)$$

$$p_2^e=\iint q[N]^t\,dv \qquad (8)$$

$$p_3^e=\iiint hT_\infty[N]^t\,ds \qquad (9)$$

$$[D]=\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \qquad (10)$$

$$[N]=\begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & \cdots & N_p(x) \\ N_1(y) & N_2(y) & \cdots & N_p(y) \\ N_1(z) & N_2(z) & \cdots & N_p(z) \end{bmatrix}$$

$$[B]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

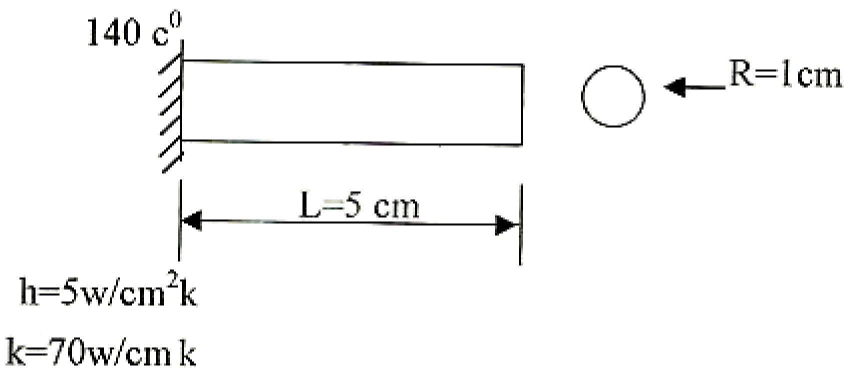
انتقال الحرارة أحادي البعد: (One dimensional heat transfer)

المعادلة التفاضلية كالآتي:

$$k = \frac{d^2T}{dx^2} + \dot{q} = 0 \qquad (12)$$

3.6 مثال :

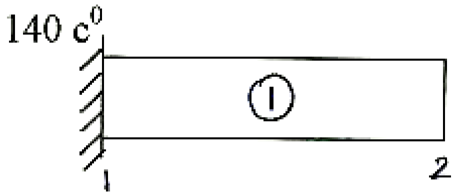
زعنف مستقيم منتظم: (straight uniform fin)



خطوات الحل:

(i) قسّم القضيب إلي عدة عناصر محدَّدة

(idealize the rod into several finite elements)



(ii) افترض تفاوت درجة حرارة خطي في أي عنصر e،

$$T^e(x) = a_1 + a_2 x \qquad (1)$$

العناصر a_1 و a_2 يمكن تمثيلهما بدلالة درجة الحرارة العقدية كالآتي:

$$a_1 = q_1, \;\; and \;\; a_2 = \frac{q_2 - q_1}{L^e} \qquad (2)$$

$$T^e(x) = [N(x)]q^e$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x}{L^e} & \dfrac{x}{L^e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

(iii) اشتقاق عناصر المصفوفات: (Derivation of elements matrices)

ولأن هذه المسألة أحادية البعد فإنَّ،

[D] = [k] الموصلية الحرارية

$$[N] = [N_1(x) \quad N_2(x)]$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{dx} & \dfrac{\partial N_2}{dx} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L^e} & \dfrac{1}{L^e} \end{bmatrix}$$

$$[k_1^e] = \iiint [B]^t [D][B] dv$$

$$= \iiint_{x=0}^{L} [k] \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L^e} & \dfrac{1}{L^e} \end{bmatrix} A\, dx$$

$$= \frac{Ak}{L^{e^2}} \int \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} [-1 \quad 1]\, dx$$

$$= \frac{Ak}{L^{e^2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{Ak}{L^{e^2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} (x)_0^L = \frac{Ak}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$\left[k_2^e\right] = \iint h[N]^t [N] ds$$

$$= h\int_0^L \begin{Bmatrix} 1-\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} p\, dx$$

حيث p هو المحيط، $p = 2\pi R$

$$\left[k_2^e\right] = h\int_0^L \begin{Bmatrix} \frac{L-x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} p\, dx$$

$$= \frac{hp}{L^2}\int_0^L \begin{bmatrix} L-x \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L-x & x \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{hp}{L^2}\int_0^L \begin{bmatrix} \left(L^2 - 2Lx + x^2\right) & \left(Lx - x^2\right) \\ \left(Lx - x^2\right) & x^2 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{hp}{L^2}\begin{bmatrix} \left(L^2 x - \frac{2Lx^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) & \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \\ \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) & \frac{x^3}{3} \end{bmatrix}_0^L$$

$$= \frac{hp}{L^2}\begin{bmatrix} \left(L^3 - L^3 + \frac{L^3}{3}\right) & \left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3}\right) \\ \left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3}\right) & \frac{L^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{hp}{L^2}\begin{bmatrix} \frac{L^3}{3} & \frac{L^3}{6} \\ \frac{L^3}{6} & \frac{L^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{hp}{L^2}\begin{bmatrix} \frac{2L^3}{6} & \frac{L^3}{6} \\ \frac{L^3}{6} & \frac{2L^3}{6} \end{bmatrix} = \frac{hpL^3}{6L^2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{hpL^e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

افترض حالة مستقرة، $[\mathrm{k}_3^{\mathrm{e}}] = 0$،

$$p^e = p_1^e - p_2^e + p_3^e \qquad (6)$$

$$p_1^e = \iiint \dot{q}[N]^t \, dv \qquad (7)$$

$$p_1^e = \int_{x=0}^{L} \dot{q} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} A\,dx$$

$$p_1^e = \dot{q}A \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = \dot{q}A \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} \frac{L-x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = \frac{\dot{q}A}{L} \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} L-x \\ x \end{Bmatrix} dx$$

$$p_1^e = \frac{\dot{q}A}{L} \begin{Bmatrix} Lx - \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{q}A}{L} \begin{Bmatrix} L^2 - \frac{L^2}{2} \\ \frac{L^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{q}A}{L} \begin{Bmatrix} \frac{L^2}{2} \\ \frac{L^2}{2} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\dot{q}AL^2}{2L}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\dot{q}AL^e}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

$$p_2^e = \int_0^L \int q[N]^t \, ds \qquad (9)$$

$$= \int_{x=0}^{L} q \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} p \, dx$$

$$= qp \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = qp \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} \frac{L-x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = \frac{qp}{L^e} \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} L-x \\ x \end{Bmatrix} dx$$

$$\frac{qp}{L}\begin{Bmatrix} Lx-\frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{qp}{L}\begin{Bmatrix} L^2-\frac{L^2}{2} \\ \frac{L^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{qp}{L}\times\frac{L^2}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore\ p_2^e = \frac{qpL^e}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{10}$$

$$p_3^e = \int hT_\infty [N]^t\, ds$$

$$= \int_{x=0}^{L} hT_\infty \begin{Bmatrix} 1-\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} p dx$$

$$= hT_\infty p \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} 1-\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = hT_\infty p \begin{Bmatrix} \frac{L-x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} dx$$

$$= \frac{hT_\infty p}{L}\int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} L-x \\ x \end{Bmatrix} dx = \frac{hT_\infty p}{L}\begin{bmatrix} Lx-\frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} \end{bmatrix}_0^L$$

$$= \frac{hT_\infty p}{L}\begin{Bmatrix} \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{hT_\infty pL^2}{L}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{hT_\infty pL}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

$$\left[\tilde{k}\right]\vec{T} = \vec{P} \tag{12}$$

$$[\tilde{k}] = \sum_{e=1}^{E}\left(\frac{Ak}{L^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{hpL^e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) \tag{13}$$

$$[\tilde{k}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{Ak}{L}+\frac{2hpL}{6}\right) & \left(\frac{-Ak}{L}+\frac{2hpL}{6}\right) \\ \left(\frac{-Ak}{L}+\frac{2hpL}{6}\right) & \left(\frac{Ak}{L}+\frac{2hpL}{6}\right) \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\vec{p} = \sum_{e=1}^{E}\frac{1}{2}\left(\dot{q}AL^e - qpL^e + hT_\infty pL^e\right)\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

في هذه الحالة $\dot{q} = 0 = q$،

وعليه عندما $E = 1$،

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{Ak}{L}+\frac{2hpL}{6}\right) & \left(\frac{-Ak}{L}+\frac{hpL}{6}\right) \\ \left(\frac{-Ak}{L}+\frac{hpL}{6}\right) & \left(\frac{Ak}{L}+\frac{2hpL}{6}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \frac{hpT_\infty L^e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right) & \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right) \\ \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right) & \left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \frac{hpT_\infty L^2}{2kA} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

بالتعويض عن القيم المعطاة بالمسألة،

$$\frac{hpL^2}{kA} = \frac{5\times 2\pi \times 1\times 5^2}{70\times \pi \times 1^2} = \frac{5\times 2\pi \times 5^2}{70\pi} = \frac{25}{7}$$

$$\frac{hpT_\infty L^2}{2kA} = \frac{5\times 2\pi \times 1\times 40\times 25}{2\times 70\times \pi \times 1^2} = \frac{500}{7}$$

$$\begin{bmatrix} \left(1+\frac{25}{21}\right) & \left(-1+\frac{25}{42}\right) \\ \left(-1+\frac{25}{42}\right) & \left(1+\frac{25}{21}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \frac{500}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بما أنَّ $T_1 = 140^oC$،

$$\begin{bmatrix} \frac{46}{21} & -\frac{17}{42} \\ -\frac{17}{42} & \frac{46}{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 140 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{500}{7} \\ \frac{500}{7} \end{bmatrix}$$

$$\frac{46}{21}\times 140 - \frac{17}{42}T_2 = \frac{500}{7} \quad (1)$$

$$-\frac{17}{42}\times 140 + \frac{46}{21}T_2 = \frac{500}{7} \quad (2)$$

من المعادلة (1)،

$$T_2 = \left(\frac{46\times 140}{21} - \frac{500}{7} \right) \times \frac{42}{17} = \underline{581.2}°C$$ (rejected) مرفوضة

من المعادلة (2)،

$$T_2 = \left(\frac{500}{7} + \frac{17}{42}\times 140 \right) \times \frac{21}{46} = \underline{58.5}°C$$ (مقبولة)

من المعادلة (17) بالنسبة للعنصرين،

$$[\tilde{k}] = \begin{bmatrix} \left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right) & \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right) & 0 & 0 \\ \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right) & \left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right) & \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right) \\ 0 & 0 & \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right) & \left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right) \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{k}] = \begin{bmatrix} \left(1+\frac{hpL^2/4}{3kA}\right) & \left(-1+\frac{hpL^2/4}{6kA}\right) & 0 \\ \left(-1+\frac{hpL^2/4}{6kA}\right) & 2\left(1+\frac{hpL^2/4}{3kA}\right) & \left(-1+\frac{hpL^2/4}{6kA}\right) \\ 0 & \left(-1+\frac{hpL^2/4}{6kA}\right) & \left(1+\frac{hpL^2/4}{3kA}\right) \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{k}] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_2 & 2a_1 & a_2 \\ 0 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

حيث،

$$a_1 = 1 + \frac{2hpL^2}{24kA}, \quad a_2 = -1 + \frac{hpL^2}{24kA}$$

أيضاً من المعادلة (17)، بالنسبة لعنصرين،

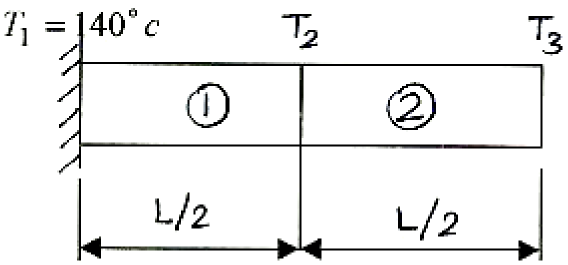
$$\vec{p} = \begin{bmatrix} \dfrac{hpT_\infty L^2/4}{2kA} & 0 \\ \dfrac{hpT_\infty L^2/4}{2kA} & \dfrac{hpT_\infty L^2/4}{2kA} \\ 0 & \dfrac{hpT_\infty L^2/4}{2kA} \end{bmatrix}$$

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} \dfrac{hpT_\infty L^2}{8kA} \\ \dfrac{2hpT_\infty L^2}{8kA} \\ \dfrac{hpT_\infty L^2}{8kA} \end{bmatrix}$$

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} b \\ 2b \\ b \end{bmatrix}$$

$\therefore$ المعادلة (17) ستصبح كالآتي:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_2 & 2a_1 & a_2 \\ 0 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} b \\ 2b \\ b \end{Bmatrix} \qquad (18)$$



عوِّض عن قيم A, k, L, p, h

$$a_1 = 1 + \frac{2\times 25}{24\times 7} = \frac{109}{84}$$

$$a_2 = -1 + \frac{1\times 25}{24\times 7} = -\frac{143}{168}$$

$$b = \frac{hpT_\infty L^2}{8kA} = \frac{500}{28}$$

عوِّض في المعادلة (18)،

$$\begin{bmatrix} \frac{109}{84} & -\frac{143}{168} & 0 \\ -\frac{143}{168} & \frac{109}{42} & -\frac{143}{168} \\ 0 & -\frac{143}{168} & \frac{109}{84} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 140 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{500}{28} \\ \frac{1000}{28} \\ \frac{500}{28} \end{Bmatrix} \qquad (19)$$

حل المعادلة عندما $T_1 = 140^oC$،

$$\frac{109}{84} \times 140 - \frac{143}{168} T_2 = \frac{500}{28} \qquad (1)$$

مرفوضة (rejected) $T_2 = \left(\frac{109}{84} \times 140 - \frac{500}{28} \right) \frac{168}{143} = \underline{192.45}°C$

بما أنَّ 140< 192.45،

$$-\frac{143}{168} \times 140 + \frac{109}{42} T_2 - \frac{143}{168} T_3 = \frac{500}{28}$$

$$\frac{109}{42} T_2 - \frac{143}{168} T_3 = \frac{1000}{28} + \frac{143}{168} \times 140 \qquad (2)$$

$$-\frac{143}{168} T_2 + \frac{109}{84} T_3 = \frac{500}{28} \qquad (3)$$

بإختصار المعادلتين (2) و (3)، لتصبحا،

$$2.6T_2 - 0.851T_3 = 154.9 \qquad (2)$$

$$-0.851T_2 + 2.6T_3 = 17.86 \qquad (3)$$

بضرب المعادلة (3) في $\frac{0.851}{2.6}$ لتصبح،

$$-0.28T_2 + 0.851T_3 = 5.85 \qquad (4)$$

بجمع المعادلتين (2) و(4) نحصل على،

$$(2.6 - 0.28)T_2 + 0 = 154.9 + 5.85$$

$$2.32T_2 = 160.75$$

$$\therefore T_2 = \frac{160.7}{2.32} = \underline{\underline{69.3}}°C$$

نعوِّض عن قيمة T_2 في المعادلة (2)،

$$2.6 \times 69.3 - 0.851T_3 = 154.9$$

$$\therefore T_3 = \frac{2.6 \times 69.3 - 154.9}{0.851} = \underline{\underline{29.7}}°C$$

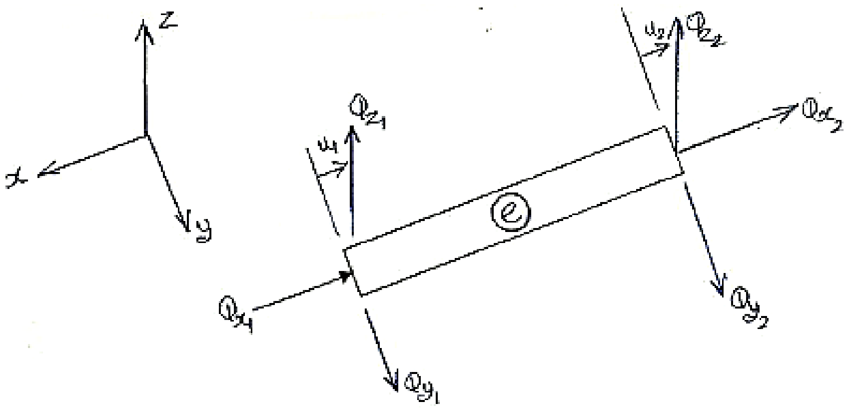
الفصل الرابع

تحليل الجملونات

(Analysis of Trusses)

4.1 العنصر الفراغي للجملون: (Space Truss Element)

اعتبر عنصر الوصلة المسمارية الموضَّح في الشكل (4.1) أدناه:



شكل (4.1)

u_1، u_2 تمثِّل درجات الحرية العقدية في الإحداثيات الموضعية للمنظومة. Q_x, Q_y, Q_z تمثِّل الإزاحة الكونية للمنظومة.

عليه،

$$u_1 = L_{12}Q_{x1} + m_{12}Q_{y1} + n_{12}Q_{z1}$$

$$u_2 = L_{12}Q_{x2} + m_{12}Q_{y2} + n_{12}Q_{z2}$$

حيث،

$$L_{12} = \cos\theta_x$$

$$m_{12} = \cos\theta_y$$

$$n_{12} = \cos\theta_z$$

$$\{u\}^e = [C]\{\theta\}$$

حيث،

$$[C] = \begin{bmatrix} L_{12} & m_{12} & n_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{12} & m_{12} & n_{12} \end{bmatrix}$$

وتُسمي بمصفوفة التحويل (transformation matrix).

$$L_{12} = \frac{x_2 - x_1}{L}$$

$$m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{L}$$

$$n_{12} = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

حيث،

$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ، الطول

متجه الحمل يمكن الحصول عليه من:

$$\{p\} = [C]^t \{p\}$$

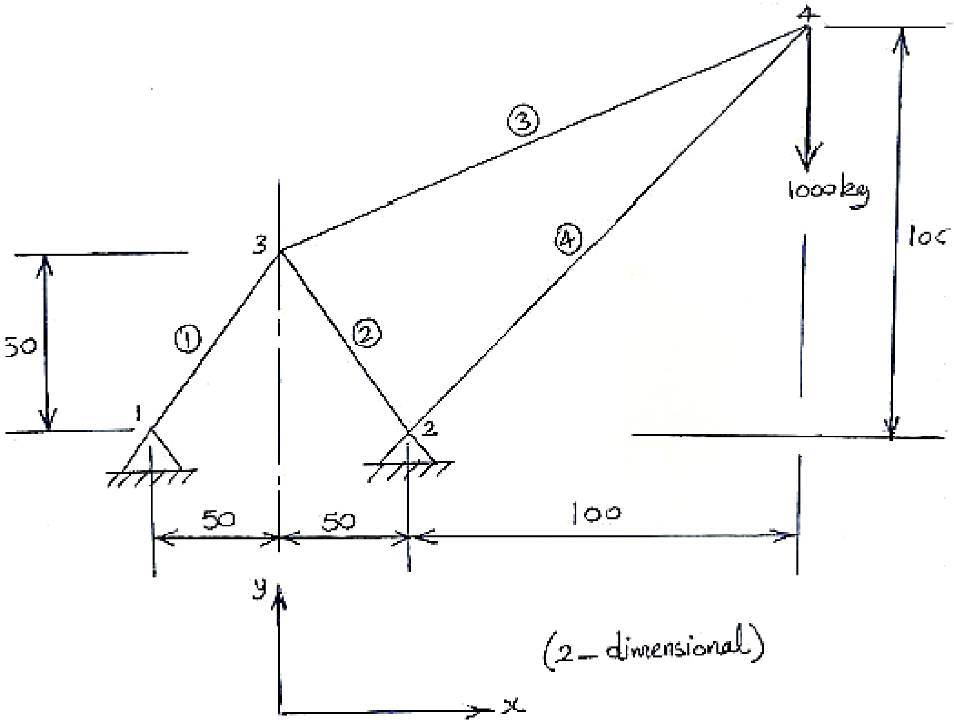
مصفوفة الكزازة هي،

$$[k] = [C]^t [k][C]$$

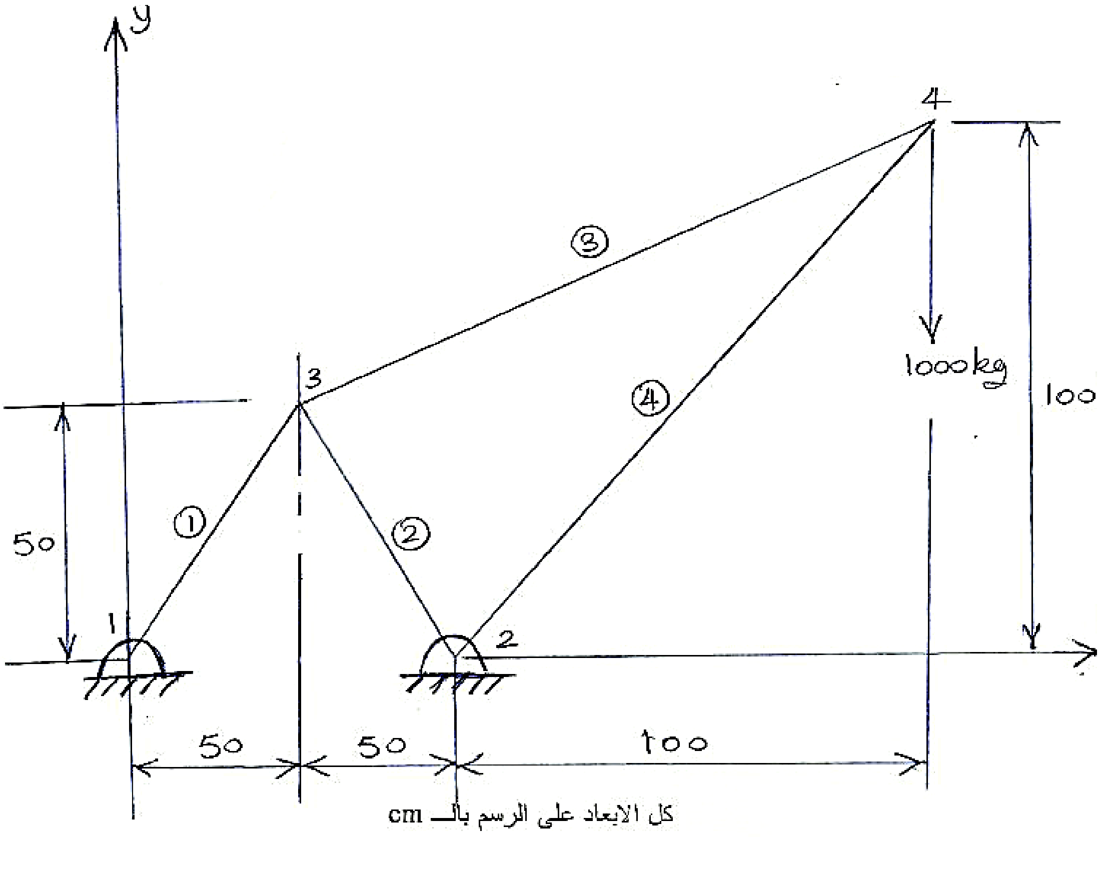
4.2 مثال:

أوجد الإزاحة العقدية والإجهادات الداخلية التي تنشأ في الجملون الموضَّح في الشكل أدناه عندما يتم تطبيق قوة رأسية إلي أسفل عند العقدة 4 مقدارها 1000kg. معاير يونق للمرونة يعادل 2×10^6kg/cm^2 ومساحة المقطع العرضي للأجزاء الأربعة كالآتي:

A1	A2	A3	A4
2cm^2	2cm^2	1cm^2	1cm^2



كل الابعاد علي الرسم بالـــ cm



كل الابعاد على الرسم بالـــ cm

رقم العنصر أو الجزء	العقدة الكونية المقابلة لـ		x_1	y_1	x_2	y_2	الطول L	جيوب التمام	
	العقدة الموضعية 1	العقدة الموضعية 2						L_{12}	m_{12}
1	1	3	0	0	50	50	$50\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
2	3	2	50	50	100	0	$50\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
3	3	4	50	50	200	100	$50\sqrt{10}$	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$
4	2	4	100	0	200	100	$100\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

العنصر رقم (1)، الطول L،

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$L = \sqrt{50^2 + 50^2 + 0^2} = \sqrt{5000} = \sqrt{2500 \times 2} = \underline{50\sqrt{2}}$$

العنصر رقم (2)،

$$L = \sqrt{50^2 + (-50^2)} = \underline{50\sqrt{2}}$$

العنصر رقم (3)،

$$L = \sqrt{150^2 + 50^2} = \sqrt{25{,}000} = \sqrt{2500 \times 10} = \underline{50\sqrt{2}}$$

العنصر رقم (4)،

$$L = \sqrt{100^2 + 100^2} = \sqrt{20{,}000} = \sqrt{10{,}000 \times 2} = \underline{100\sqrt{2}}$$

جيوب تمام الاتجاه: (Direction cosines)

العنصر رقم (1)،

$$L_{12} = \frac{x_2 - x_1}{L} = \frac{50}{50\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$m_{12}=\frac{y_2-y_1}{L}=\frac{50}{50\sqrt{2}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

العنصر رقم (2)،

$$\mathrm{L}_{12}=\frac{50}{50\sqrt{2}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$m_{12}=-\frac{50}{50\sqrt{2}}=-\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

العنصر رقم (3)،

$$L_{12}=\frac{150}{50\sqrt{10}}=\underline{\frac{3}{\sqrt{10}}}$$

$$m_{12}=\frac{50}{50\sqrt{10}}=-\underline{\frac{1}{\sqrt{10}}}$$

العنصر رقم (4)،

$$L_{12}=\frac{100}{100\sqrt{2}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$m_{12}=\frac{100}{100\sqrt{2}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

تحديد مصفوفة الكزازة للعناصر الأربعة:

العنصر رقم (1)،

$$[k]^1=[C]^t[k]^e[C]$$

$$[C]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$[C]^t=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\frac{EA_1}{L_1}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\frac{2\times10^6\times2}{50\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2}\times10^4\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & -1\\-1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2}\times10^4\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\1 & 1 & -1 & -1\\-1 & -1 & 1 & 1\\-1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix} kg/cm \qquad (1)$$

العنصر رقم (2)،

$$[k]^2 = \frac{EA_2}{L_2}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} = \frac{2\times10^6\times2}{50\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$[C]^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 0\\0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 0\\0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\frac{2\times10^6\times2}{50\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2}\times 10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2}\times 10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} kg/cm \qquad (2)$$

العنصر رقم (3)،

$$[k]^e = \frac{EA_3}{L_3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2\times 10^6 \times 1}{50\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2\sqrt{10}}{5}\times 10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad [C]^t = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^3 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{2\sqrt{10}}{5}\times 10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 4\sqrt{10}\times 10^2 \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \\ -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 4\sqrt{10}\times 10^2 \begin{bmatrix} 9 & 3 & -9 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ -9 & -3 & 9 & 3 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} kg/cm \qquad (3)$$

العنصر رقم (4)،

$$[k]^4 = \frac{EA_4}{L_4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2\times 10^6 \times 1}{100\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{2}\times 10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad [C]^t=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^4=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\sqrt{2}\times 10^4\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore [k]^4=4\sqrt{2}\times 10^2\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix} kg/cm \qquad (4)$$

للانسجام بين العناصر المتجاورة: (For compatibility)

$$\{u\}^e=[C]\{Q\}$$

$$\begin{Bmatrix}u^1x_1\\ u^1y_1\\ u^1x_2\\ u^1y_2\\ u^2x_1\\ u^2y_1\\ u^2x_2\\ u^2y_2\\ u^3x_1\\ u^3y_1\\ u^3x_2\\ u^3y_2\\ u^4x_1\\ u^4y_1\\ u^4x_2\\ u^4y_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Qx_1\\ Qy_1\\ Qx_2\\ Qy_2\\ Qx_3\\ Qy_3\\ Qx_4\\ Qy_4\end{Bmatrix}$$

مصفوفة الكزازة الكلية يمكن إعطاؤها كالآتي:

$$[k]=[C]^t\left[\tilde{k}\right][C]$$

$$
\left[\tilde{k}\right]=\begin{bmatrix} [k]^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [k]^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [k]^4 \end{bmatrix}
$$

$$
\left[\tilde{k}\right]=\begin{bmatrix}
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}
\end{bmatrix}
$$

$$
\therefore [k]=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$\times\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-9}{10\sqrt{5}} & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{9}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-1}{10\sqrt{5}} & \frac{3}{10\sqrt{5}} & \frac{1}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$2\sqrt{2}\times 10^4\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \frac{20\sqrt{5}+9}{10\sqrt{5}} & \frac{7.5\sqrt{5}+3}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & \frac{7.5\sqrt{5}+3}{10\sqrt{5}} & \frac{22.5\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2.5\sqrt{5}-9}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2.5\sqrt{5}-3}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}} & \frac{-2.5\sqrt{5}+3}{10\sqrt{5}} & \frac{2.5\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

(For equilibrium) :للاتزان

$$[k]\{u\}=\{P\}$$

$$2\sqrt{2}\times10^{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \frac{9+20\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{3+7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & \frac{3+7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{1+22.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{-3-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{-1-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-9-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{-1-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{3+2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} & \frac{1+2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} Px_1 \\ Py_1 \\ Px_2 \\ Py_2 \\ Px_3 \\ Py_3 \\ Px_4 \\ Py_4 \end{Bmatrix}$$

(Boundary conditions) :**الشروط الحدودية**

$$u_1=0,\quad u_2=0$$

$$Py_4=1000kg,\quad Px_4=0$$

$$2\sqrt{2}\times10^{4}\left(u_3-u_3-u_4\right)=Px_1$$

$$\therefore Px_1=-2\sqrt{2}\times10^{4}u_4 \qquad (1)$$

$$2\sqrt{2}\times10^{4}\left(u_3-u_3-u_4\right)=Py_1$$

$$\therefore Py_1=-2\sqrt{2}\times10^{4}u_4 \qquad (2)$$

$$2\sqrt{2}\times10^{4}\left(-u_3+u_3\right)=Px_2$$

$$\therefore Px_2=0 \qquad (3)$$

$$2\sqrt{2}\times10^{4}\left(-u_3+u_3\right)=Py_2$$

$$\therefore Py_2=0 \qquad (4)$$

$$2\sqrt{2}\times10^{4}\left(-u_3-u_3+\left(\frac{9+20\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_3+\left(\frac{3+7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_4\right)=Px_3 \quad (5)$$

$$2\sqrt{2}\times10^4\left(-u_3+u_3+\left(\frac{3+7.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_3+\left(\frac{1+22.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_4+\left(\frac{-1-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_4\right)=Py_3 \quad (6)$$

$$2\sqrt{2}\times10^4\left(\frac{-9-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_3=Px_4 \quad (7)$$

$$2\sqrt{2}\times10^4\left(\frac{-3-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_3+\left(\frac{-1+2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_4+\left(\frac{1+2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_4=Py_4 \quad (8)$$

من المعادلة (8)،

$$2\sqrt{2}\times10^4\left(\frac{-3-2.5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\right)u_3=100$$

$$\therefore u_3=\frac{1000}{2\sqrt{2}\times10^4}\times\frac{10\sqrt{5}}{-3-2.5\sqrt{5}}$$

$$=\underline{\underline{-0.09203}}cm$$

الفصل الخامس

انحراف العارضات باستخدام طريقة العناصر المحدَّدة

(Deflection of Beams Using Finite Element Method)

5.1 مقدمة : (Introduction)

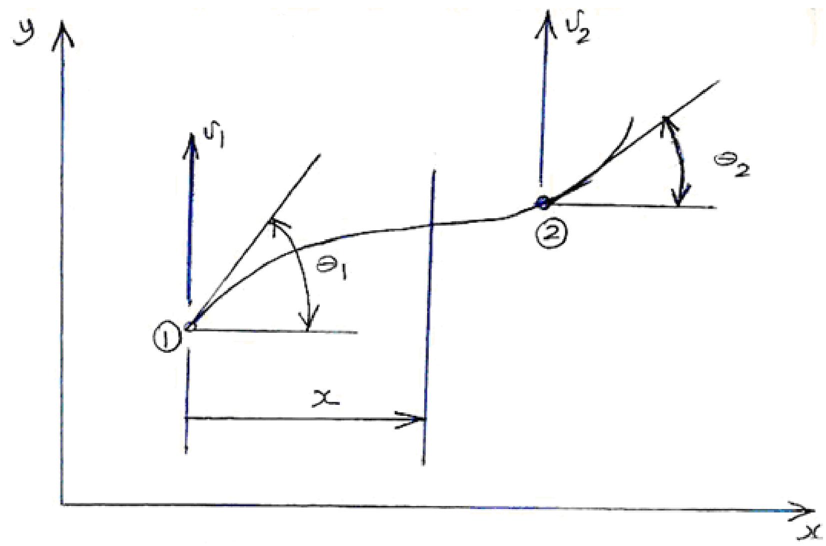
طبقاً للنظرية الهندسية لانحراف العارضات فإنَّ تغير الشكل يتم تحديده بمنحني الانحراف (deflection curve) v(x) المأخوذ عند خط منتصف القضيب، وهكذا فإنَّ مسألة انحراف العارضات هي أحادية البعد ومحدَّدة العنصر تحتوي على عنصر خطي.

نعرف من ميكانيكا المواد أنَّ طاقة الانفعال تحتوي على v''(x)، عليه وللاستمرارية،

$$v(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=[f(x)]\{a\} \qquad (1)$$

وهكذا فإنَّ العنصر يجب أن يمتلك أربعة درجات حرية.

كما في السابق فإننا نعتبر الإزاحات العقدية والميلانات ككميات متجهة، كما في الشكل (5.1) أدناه.



شكل (5.1)

$$\left[u^e\right]^t = \left[v_1 \left(\frac{dv(x)}{dx}\right)_1 \quad v_2 \left(\frac{dv(x)}{dx}\right)_2\right]$$ ، الإزاحة العقدية (2)

عند x = 0 و x = L في المعادلة (1)،

$$v(x) = [f(x)]\{a\} \tag{1}$$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

$$[u]^e = [A]\{a\} \tag{4}$$

$$\{a\} = [A]^{-1}\{u\}^e$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة (1) كالآتي:

$$v^e(x) = [f(x)][A]^{-1}\{u\}^e$$

$$= [N(x)]\{u\}^e \tag{5}$$

حقيقة،

$$[N(x)] = [f(x)][A]^{-1}$$

$$= \left[1 \quad x \quad x^2 \quad x^3\right][A]^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{C^T}{|A|}$$

$$|A| = 1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L & L^2 & L^3 \\ 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} + 0 = 1 \times \begin{bmatrix} L^2 & L^3 \\ 2L & 3L^2 \end{bmatrix} = 3L^4 - 2L^4 = L^4$$

مصفوفة العوامل المرافقة C،

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ L & L^2 & L^3\\ 1 & 2L & 3L^2\end{vmatrix}=L^4$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & L^2 & L^3\\ 0 & 2L & 3L^2\end{vmatrix}=0$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & L & L^3\\ 0 & 1 & 3L^2\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1 & L^3\\ 0 & 3L^2\end{vmatrix}=-3L^2$$

$$A_{14}=-\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & L & L^2\\ 0 & 1 & 2L\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & L^2\\ 0 & 2L\end{vmatrix}=2L$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ L & L^2 & L^3\\ 1 & 2L & 3L^2\end{vmatrix}=0$$

$$A_{22}=+\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & L^2 & L^3\\ 0 & 2L & 3L^2\end{vmatrix}=+\begin{vmatrix}L^2 & L^3\\ 2L & 3L^2\end{vmatrix}=3L^4-2L^4=L^4$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & L & L^3\\ 0 & 1 & 3L^2\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}L & L^3\\ 1 & 3L^2\end{vmatrix}=3L^3-L^3=2L^3=-2L^3$$

$$A_{24}=+\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & L & L^2\\ 0 & 1 & 2L\end{vmatrix}=+\begin{vmatrix}L & L^2\\ 1 & 2L\end{vmatrix}=2L^2-L^2=L^2$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2L & 3L^2\end{vmatrix}=0$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2L & 3L^2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0 & 0\\ 2L & 3L^2\end{vmatrix}=0$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3L^2 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3L^2 \end{vmatrix} = 3L^2$$

$$A_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2L \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2L \end{vmatrix} = 2L$$

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ L & L^2 & L^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{42} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & L^2 & L^3 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ L^2 & L^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & L^3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ L & L^3 \end{vmatrix} = -L^3$$

$$A_{44} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & L^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & L \\ L & L^2 \end{vmatrix} = L^2$$

$$C = \begin{bmatrix} L^4 & 0 & -3L^2 & 2L \\ 0 & L^4 & -2L^3 & L^2 \\ 0 & 0 & 3L^2 & 2L \\ 0 & 0 & -L^3 & L^2 \end{bmatrix}$$

$$adj\,A = C^T = \begin{bmatrix} L^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^4 & 0 & 0 \\ -3L^2 & -2L^3 & 3L^2 & -L^3 \\ 2L & L^2 & 2L & L^2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$[N(x)] = [f(x)][A]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L}\\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2}\end{bmatrix}$$

$$=\left[\left(1-\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3}\right)\quad\left(x-\frac{2x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}\right)\quad\left(\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3}\right)\quad\left(-\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}\right)\right] \qquad (6)$$

لنخطو خطوة للأمام فإننا نحتاج لإيجاد v''(x)،

$$v''(x)=[N''(x)]\{u\}^e \qquad (7)$$

طاقة الانفعال للانحراف تُعطي كالآتي:

$$U^e=\frac{1}{2}\int_0^L EI(v''(x))^2dx \qquad (8)$$

$$U=\int M^2dx/2EI$$

$$M=EI\frac{d^2v}{dx^2}$$

بوضع EI = [D]،

$$U^e=\frac{1}{2}\{u^e\}^t\left(\int_0^L [B]^t[D][B]dx\right)\{u\}^e \qquad (9)$$

لقضيب منتظم الشكل: (for a uniform bar)

$$[k]^e=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12 & 6L & -12 & 6L\\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2\\ -12 & -6L & 12 & -6L\\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2\end{bmatrix} \qquad (10)$$

$$[k]^e=\int_0^L [B]^t[D][B]dx$$

يتم الحصول على المعادلة (10) عاليه كالآتي:

للعنصر الأول،

$$[N(x)] = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)$$

$$N'(x) = 0 - \frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3}$$

$$N''(x) = \frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

$$[k]^e = EI\int_0^L \left(\frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)^2 dx$$

$$= EI\int_0^L \left(\frac{36}{L^4} - \frac{144x}{L^5} + \frac{144x^2}{L^6}\right)dx$$

$$= EI\left[\frac{36x}{L^4} - \frac{144x^2}{2L^5} + \frac{144x^3}{3L^6}\right]_0^L$$

$$= EI\left(\frac{36L}{L^4} - \frac{144L^2}{2L^5} + \frac{144L^3}{3L^6}\right)$$

$$= \frac{EI}{L^3}(36 - 72 + 48) = \frac{EI}{L^3}(12)$$

بمتابعة بقية العناصر يمكن الحصول على المعادلة (10)،

طاقة الوضع للأحمال الخارجية،

$$\Omega = -\sum\int_0^L \{u^e\}^t [N(x)]^t P(x)dx - \{u\}^e [P_c] \qquad (11)$$

حيث، $\{P_c\} = P_1, M_1, P_2, M_2$

أو $\Omega = -\sum \{u^e\}^t [P_d]^e - \{u\}^e \{P_c\}$ (12)

للانسجام: (For compatibility)

$$v_1^1 = v_1$$

$$\theta_1^1 = \theta_1$$

$$v_2^1 = v_2$$

$$\theta_2^1 = \theta_2$$

$$\{\tilde{u}\} = [C]\{u\}$$

طاقة الوضع الكلية،

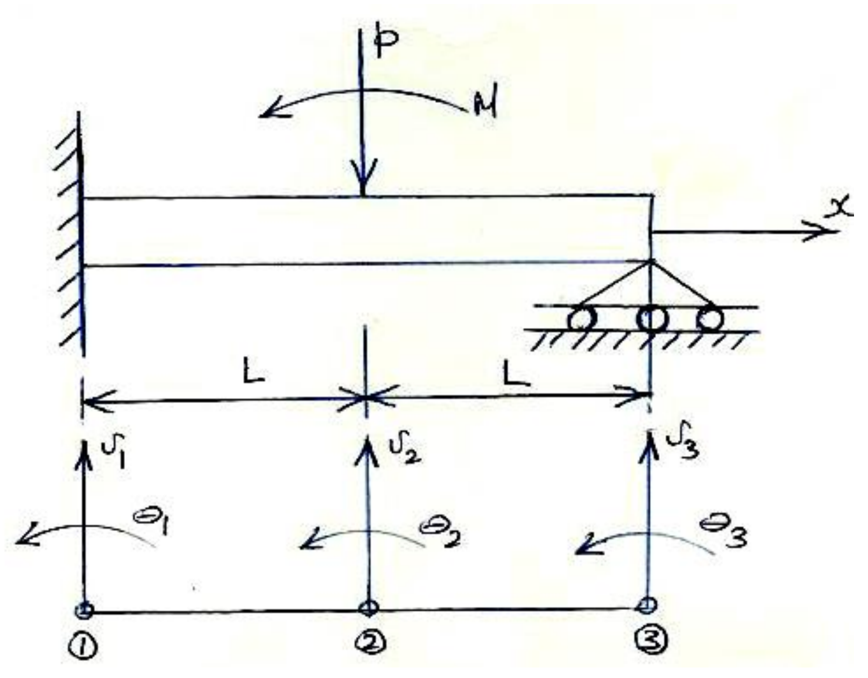
$$V = \frac{1}{2}\{u\}^t[k]\{u\} - \{u\}^t(\{P_d\} + \{P_c\})$$

للاتزان، $\delta V = 0$، عليه سنتحصل على،

$$[k]\{u\} = \{P\}$$

$$= \{\{P_d\} + \{P_c\}\}$$

5.2 مثال (1):



للانسجام: (For compatibility)

$$\begin{Bmatrix} v_1^1 \\ \theta_1^1 \\ v_2^1 \\ \theta_2^1 \\ v_1^2 \\ \theta_1^2 \\ v_2^2 \\ \theta_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

بإجراء عملية التجميع: (carrying out the assembly process)

$$[k] = [C]^t [\tilde{k}][C]$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & \left(k_{33}^1 + k_{11}^2\right) & \left(k_{34}^1 + k_{12}^2\right) & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & \left(k_{43}^1 + k_{21}^2\right) & \left(k_{44}^1 + k_{22}^2\right) & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

الشروط الحدودية: (B. conditions)

$$v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$$

أحذف الصفوف والأعمدة المناظرة لـ $v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} \left(k_{33}^1 + k_{11}^2\right) & \left(k_{34}^1 + k_{12}^2\right) & k_{14}^2 \\ \left(k_{43}^1 + k_{11}^2\right) & \left(k_{44}^1 + k_{22}^2\right) & k_{24}^2 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \\ 0 \end{Bmatrix}$$

أخيراً سنحصل على،

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[k]^{-1} = \begin{bmatrix} 7L^2 & 3L & -12L \\ 3L & 15 & -12 \\ -12L & -12 & 48 \end{bmatrix}$$

5.3 مثال (2):

تُعطي مصفوفة الكزازة لعنصر قضيب تحت تأثير الانحناء كالآتي:

$$[k]^e = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^4 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^4 \end{bmatrix}$$

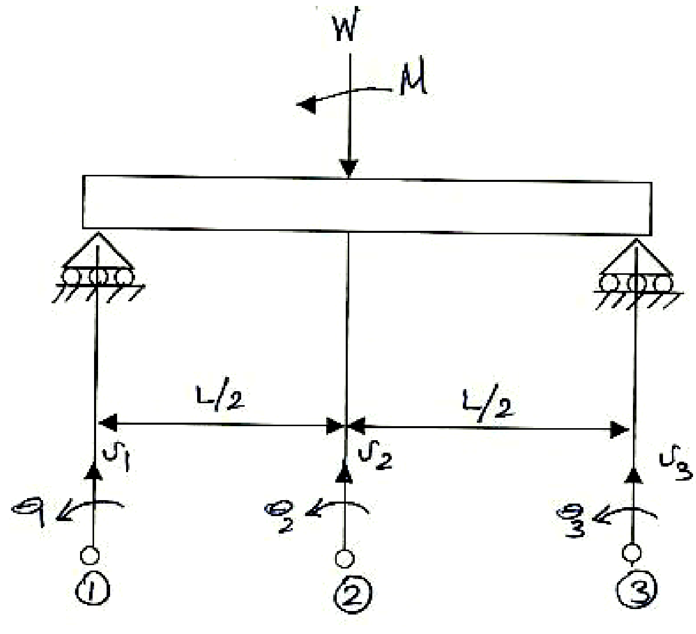
حيث،

E = معاير يونق للمرونة.

I = العزام الثاني للمساحة.

L = طول العنصر.

أوجد الإزاحة القصوى لعارضة مسندة إسناداً بسيطاً تحمل حملاً متمركزاً W عند منتصفها إذا كان طولها L. قارن إجابتك بالحل التحليلي للمسألة.



للإنسجام: (For compatibility)

$$\begin{Bmatrix} v_1^1 \\ \theta_1^1 \\ v_2^1 \\ \theta_2^1 \\ v_1^2 \\ \theta_1^2 \\ v_2^2 \\ \theta_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = [C]^t \left[\tilde{k}\right][C]$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & \left(k_{33}^1 + k_{11}^2\right) & \left(k_{34}^1 + k_{12}^2\right) & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix}$$

معادلة الاتزان ،

$$[k] = \{u\} = \{P\}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & \left(k_{33}^1 + k_{11}^2\right) & \left(k_{34}^1 + k_{12}^2\right) & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & \left(k_{43}^1 + k_{21}^2\right) & \left(k_{44}^1 + k_{22}^2\right) & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

الشروط الحدودية: (Boundary conditions)

$$v_1 = v_3 = \theta_2 = 0$$

$$P_1 = \frac{W}{2},\ P_2 = 0,\ P_3 = -\frac{W}{2}$$

$$M_1 = 0,\ M_2 = M,\ M_3 = 0$$

أحذف الأعمدة والصفوف المناظرة للشروط الحدودية عاليه،

$$\begin{bmatrix} k_{22}^1 & k_{23}^1 & 0 \\ k_{32}^1 & \left(k_{33}^1 + k_{11}^2\right) & k_{14}^2 \\ 0 & k_{41}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{W}{2} \\ M \\ -\frac{W}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & -6L & 0 \\ -6L & 24 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{W}{2} \\ M \\ -\frac{W}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3}\left[4L^2\theta_1 - 6Lv_2\right] = \frac{W}{2} \qquad (1)$$

$$\frac{EI}{L^3}\left[-6L\theta_1 + 24v_2 + 6L\theta_3\right] = M \qquad (2)$$

$$\frac{EI}{L^3}\left[6Lv^2 + 4L^2\theta_3\right] = -\frac{W}{2} \qquad (3)$$

من المعادلة (1)،

$$\theta_1 = \left[\frac{WL^3}{2EI} + 6Lv^2\right] \times \frac{1}{4L^2} \qquad (4)$$

من المعادلة (3)،

$$\theta_3 = \left[-\frac{WL^3}{2EI} - 6Lv^2\right] \times \frac{1}{4L^2} \qquad (5)$$

من المعادلتين (4) و(5)،

$$\theta_1 = -\theta_3 = \theta$$

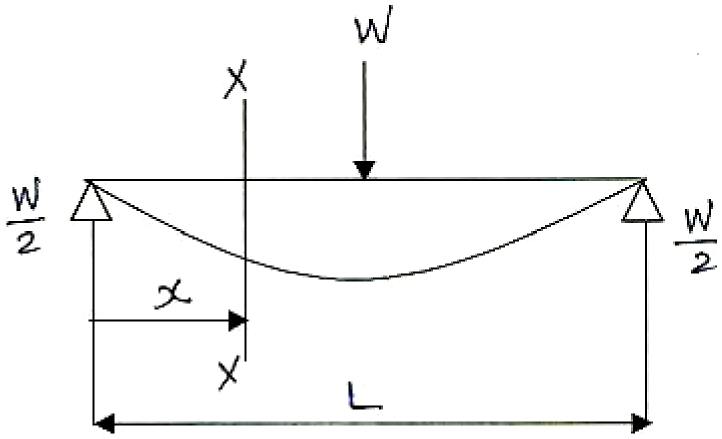
من المعادلة (2)،

$$\frac{EI}{L^3}\left[-6L^2\theta_3 + 24v_2 + 6L\theta_3\right] = M$$

$$\frac{EI}{L^3}\left[zero - 12L\theta_3 + 24v_2\right] = M = \frac{WL}{2}$$

$$24v_2\frac{EI}{L^3} = \frac{WL}{2}, \quad \therefore v_2 = \frac{WL^4}{48EI}$$

بالحل التحليلي،



$$-M = \frac{W}{2}x$$

$$M = -EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}Wx$$

بالتكامل،

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}W\frac{x^2}{2} + A = -\frac{1}{4}Wx^2 + A \qquad \text{(i)}$$

يمكن إيجاد قيمة ثابت التكامل باستخدام شروط منتصف العارضة عندما $x = \frac{1}{2}L$ فإن

الميل $\frac{dy}{dx}$ يساوي صفر،

$$0 = -\frac{1}{4}W\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + A$$

$$\therefore A = \frac{WL^2}{16}$$

عوِّض عن قيمة A في المعادلة (i) وكامل مرة أخرى،

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}Wx^2 + \frac{WL^2}{16}$$

$$EIy = -\frac{Wx^3}{12} + \frac{WL^2x}{16} + B$$

B = 0، بما أنَّ الانحراف y يساوي صفر عند الأصل (عند x = 0)،

الانحراف الأقصى يحدث عند منتصف العارضة $\left(x = \frac{1}{2}L\right)$

$$y_{\max} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{W\left(\frac{1}{2}L\right)^3}{12} + \frac{WL^2\left(\frac{1}{2}L\right)}{16}\right] = \frac{WL^3}{48EI}$$

الكتب والمراجع

الكتب والمراجع العربية:

1. د. أسامة محمد المرضي سليمان ، "مذكرة محاضرات التصميم بمساعدة الحاسوب" ، جامعة وادي النيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، ديسمبر 1998م.

2. بروفيسور محمود يس عثمان، "مذكرة محاضرات أسلوب العناصر المحددة (F.E.M) في حل مسائل ميكانيكا المصمتات" ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، مارس 1990م.

الكتب والمراجع الإنجليزية

1. Alexandre Ern, Jean – Luc Guermond, "Theory and practice of finite elements", springer, New York, (2008), ISBN 0-387-20574-8.
2. Patricia L. Smith, Tillman J. Ragan, "Instructional design 3rd edition", (2004).
3. Narayan K. Lalit, "Computer aided design and manufacturing", New Delhi, Prentice Hall of India, (2008).
4. Daryl L. Lohan, "A first course in the finite element method", Cengage learning, (2011), ISBN 978 – 0495668251.
5. Ready J. N., "An introduction to finite element method 3rd edition", McGraw-Hill, (2006), ISBN 9780071267618.
6. Strang Gilbert, Fix George, "An analysis of the finite element method", Prentice Hall, (1973), ISBN 0 – 13 – 032946 – 0.
7. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z., "The finite element method: its basis and fundamentals sixth edition", Butterworth – Heinemann, (2005), ISBN 0750663200.

8. Bathe K. J., "Finite element procedures", Cambridge, (2006), ISBN 097900490X.
9. Smith I.M., Griffiths D. V., Margetts L., "Programming the finite element method fifth edition", Wiley, ISBN 978 – 1 – 119 – 97334 – 8.
10. Arregui Mena J. D., Margetts L., et al., "Practical application of the stochastic finite element method", Archives of computational methods in engineering, 23(1), PP. (171 – 190), (2014).
11. Arregui Mena J. D., et al., "Characterization of the spatial variability of material properties of gilso carbon and NBG – 18 using random fields", Journal of nuclear materials, 511, PP. (91 – 108), (2018).

نبـذة عن المـؤلـف:

أسـامة محمـد المرضـي سـليمان وُلِدَ بمدينـة عطبـرة بالسـودان فـي العام 1966م. حاز على دبلوم هندسة ميكانيكية من كلية الهندسة الميكانيكية – عطبرة في العام 1990م. تحصَّل أيضاً على درجة البكـالوريوس فـي الهندسـة الميكانيكيـة مـن جامعـة السـودان للعلـوم والتكنولوجيا – الخرطوم في العام 1998م ، كما حاز على درجة الماجستير في تخصص ميكانيكا المواد من جامعة وادي النيل – عطبرة في العام 2003م ودرجة الدكتوراه من جامعة وادي النيل في العام 2017م. قام بالتدريس في العديد من الجامعات داخل السودان، بالإضـافة لتأليفه لأكثر من ثلاثين كتاباً باللغة العربيـة ولعشرة كتب باللغة الإنجليزية بالإضافة لخمسين ورقة علمية منشورة في دور نشر ومجلات عالمية إلى جانب إشرافه على أكثر من ثلاثمائة بحث تخرج لكل من طلاب الماجستير، الدبلوم العالي، البكالوريوس، والدبلوم العام. يشغِل الآن وظيفة أستاذ مساعد بقسم الميكانيكا بكلية الهندسة والتقنية – جامعـة وادي النيـل. بالإضـافة لعملـه كاستشـاري لـبعض الـورش الهندسـية بالمنطقـة الصـناعية عطبـرة. هذا بجانـب عملـه كمـدير فنـي لمجموعـة ورش الكمـالي الهندسـية لخراطـة أعمـدة المرافـق واسطوانات السيارات والخراطة العامة وكبس خراطيش الهيدروليك.