كتاب التصميم بمساعدة الحاسوب

الفصل الثالث

تطبيق طريقة العناصر المحدَّدة في إنتقال الحرارة

Application of Finite Element Method in Heat (Transfer)

تأليف:

د. أسامة محمد المرضي سليمان خيَّال

Dr. Osama Mohammed Elmardi Suleiman Khayal

قسم الهندسة الميكانيكية

كلية الهندسة والتقنية

جامعة وادي النيل

عطبرة، السودان

الطبعة الأولي ديسمبر 1998م

الطبعة الثانية يناير 2019م

الفصل الثالث

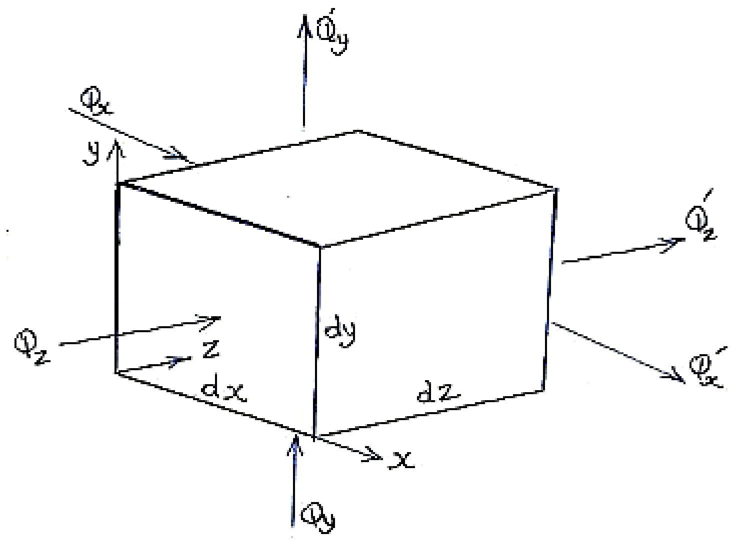
تطبيق طريقة العناصر المحدَّدة في إنتقال الحرارة

Application of Finite Element Method in Heat (Transfer)

3.1 المعادلة العامة للتوصيل للإحداثيات المستطيلة (الكارتيزية):

(General Conduction Equation of Cartesian Co-ordinates)

يمكن اشتقاق المعادلة العامة لجسم مصمت ذو ثلاث أبعاد تتولد فيه حرارة داخلية منتظمة نتيجة للتسخين الذري لجزيئات المادة، وتتغير فيه درجة الحرارة بالنسبة للزمن. إرجع للشكل (3.1) أدناه.



شكل (3.1)

من قانون فورير للتوصيل: (Fourier's Law of conduction)

يقول قانون فورير: معدَّل سريان الحرارة خلال معدن مصمت متجانس مفرد يتناسب طردياً مع مساحة المقطع المتعامد مع إتجاه السريان ومع التغير في درجة الحرارة بالنسبة لطول ممر السريان $\frac{dt}{dx}$. (هذا قانون تجريبي مؤسس على المشاهدة).

$$Q\alpha - A\frac{dt}{dx}$$

$Q=-kA\frac{dt}{dx}$ ، السريان في إتجاه x

$$Q\,dx=-kAdt$$

$$\int_0^x Qdx=-\int_{t_1}^{t_2} kadt$$

$$Qx=-kA(t_2-t_1)$$

$$\therefore Q=\frac{-kA}{x}(t_2-t_1)=\frac{kA}{x}(t_1-t_2)$$

$$Q_x=-kA\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$=-k(dy\,dz)\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$Q_y=-kA\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$=-k(dx\,dz)\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$Q_z=-kA\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$=-k(dx\,dy)\frac{\partial t}{\partial z}$$

التغير في سريان الحرارة في إتجاه x،

$$Q'_x-Q_x=\frac{\partial Q}{\partial x}dx=-k\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}dx\,dy\,dz$$

نفس الشئ بالنسبة لاتجاه z,y،

$$Q'_y - Q_y = \frac{\partial Q}{\partial y} dy = -k \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dx\, dy\, dz$$

$$Q'_z - Q_z = \frac{\partial Q}{\partial z} dz = -k \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dx\, dy\, dz$$

معدَّل توليد الحرارة: (rate of heat generation)

$$Q_g = q_g (dx\, dy\, dz)$$

حيث q_g هو معدَّل توليد الحرارة لكل وحدة حجم.

معدَّل زيادة طاقة العنصر:

معدَّل زيادة طاقة العنصر = الكتلة × الحرارة النوعية × معدَّل تغير الحرارة بالنسبة للزمن

معدَّل زيادة طاقة العنصر $= \ell (dx\, dy\, dz) C \dfrac{\partial t}{\partial \tau}$

موازنة الطاقة للعنصر تُعطي بالمعادلة التالية:

معدَّل زيادة طاقة العنصر = معدَّل توليد الحرارة – التغير في سريان الحرارة

$$q_g (dx\, dy\, dz) - \left[(Q'_x - Q_x) + (Q'_y - Q_y) + (Q'_z - Q_z) \right] = \ell C (dx\, dy\, dz) \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$q_g (dx\, dy\, dz) - \left[-k \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx\, dy\, dz - k \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dx\, dy\, dz - k \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dx\, dy\, dz \right]$$

$$= \ell C (dx\, dy\, dz) \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة طرفي المعادلة % dx dy dz نحصل على،

$$q_g - \left[-k \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - k \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] = \ell C \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة طرفي المعادلة % k،

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_g}{k} = \frac{\ell C}{k} \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

ولكن $\alpha = \frac{k}{\ell C}$ (الانتشارية الحرارية) (thermal diffusivity)

الانتشارية الحرارية هي النسبة بين الموصلية الحرارية k والسعة الحرارية ρC.

إذا كانت قيمة α كبيرة فهذا يعني إما أنَّ قيمة k كبيرة أو قيمة ρC صــــغيرة ففي الحالة الأولي يكون هنالك انتقال حراري سريع وفي الحالة الثانية يكون امتصاص الحرارة بواسطة الجسم صغير.

معادلة ثلاثية البعد غير مستقرة: $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_g}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial t}{\partial \tau}$

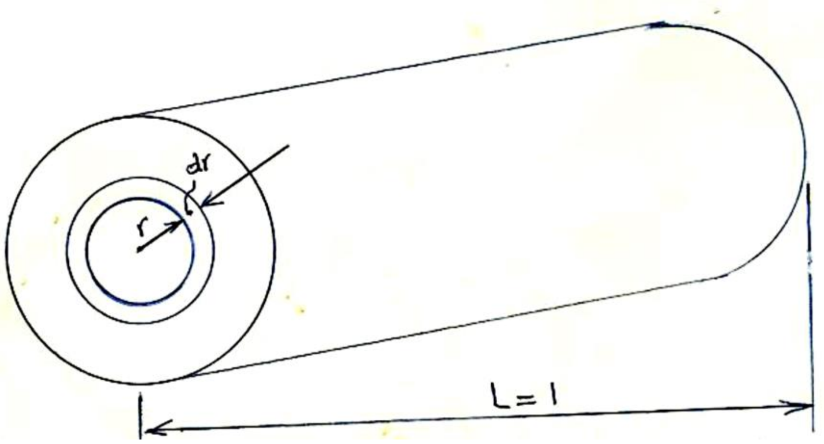
معادلة ثلاثية البعد مستقرة: $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_g}{k} = 0$

3.2 المعادلة العامة للتوصيل للإحداثيات الأسطوانية (القطبية):

(General Conduction Equation for Polar Co-ordinates)

اعتبر سريان الحرارة خلال عنصر صغير سمكه dr عند أي نصف قطر r، حيث درجة الحرارة هي t. أجعل الموصلية الحرارية للمادة k.

لوحدة طول في الاتجاه المحوري يمكن كتابة معادلة موازنة الطاقة كالآتي:



معادلة موازنة طاقة العنصر،

$$q_g\,2\pi r\,dr - \frac{\partial Q}{\partial r}dr = \rho c.2\pi r\,dr\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$q_g\,2\pi r\,dr - \frac{\partial}{\partial r}\left(-k2\pi r\frac{\partial t}{\partial r}\right)dr = \rho c.2\pi r\,dr\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة طرفي المعادلة ÷ $2\pi dr$،

$$q_g r + \frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial t}{\partial t}\right) = \rho cr\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$\therefore q_g r + \left(kr\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + k\frac{\partial t}{\partial r}\right) = \rho cr\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

بقسمة البسط والمقام ÷ kr

$$\therefore \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{q_g}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

معرفة توزيع درجة الحرارة خلال جسـم معين ذات أهمية كبيرة في الكثير من المسـائل الهندسـية. هذه المعلومة سـتكون مفيدة في حسـاب الحرارة المكتسـبة والحرارة المفقودة من الجسـم. وهي مفيدة في تصـميم الغلايات (Boilers)، التوربينات (Turbines)، الآلات النفاثة (Jet Engines)، وقوالب السباكة والصب (Casting and moulding dies).

المعادلات الأساسية لانتقال الحرارة، موازنة الطاقة ومعدَّل انتقال الحرارة يتم تلخيصـها فيما يلي:

$$E_{in}^0 + E_g^0 = E_{out}^0 + E_{i.e}^0 \qquad (1)$$

حيث E_{in}^0 = سريان الطاقة إلي المنظومة (الطاقة الداخلية).

E_g^0 = الطاقة المتولدة في المنظومة.

E_{out}^0 = سريان الطاقة خارج المنظومة (الطاقة الخارجية).

$E_{i.e}^0$ = التغير في الطاقة الداخلية.

3.3 معادلات معدَّل انتقال الحرارة: (Rate Equations)

هذه المعادلات تصف معدَّل سريان الطاقة:

(i) التوصيل (conduction) (2) $$q = -kA\frac{\partial t}{\partial x}$$

(ii) الحمل (convection) (3) $$q = hA(T - T_\infty)$$

(iii) الإشعاع (radiation) (4) $$q = \sigma \in A(T^4 - T_\infty^4)$$

(iv) الطاقة المتولدة في الجسم المصمت، E_g^0

$$E_g^0 = q^\circ V \qquad (5)$$

(v) الطاقة المختزنة، E_s^0

$$E_s^0 = \rho cv\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (6)$$

3.4 معادلة موازنة الطاقة : (Energy balance equation)

معادلة موازنة الطاقة هي،

الطاقة الداخلة في زمن dt + الطاقة المتولدة في زمن dt = الطاقة الخارجة في زمن dt

+ التغير في الطاقة الداخلية في زمن dt

ومنها نحصل على ،

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_g}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \qquad (7)$$

حيث $\alpha = \frac{k}{\rho c}$.

وهي معادلة تفاضلية ثلاثية البعد غير مستقرة بتوليد حراري.

3.5 طريقة جاليركن: (Galerkin Approach)

طريقة العناصر المحدَّدة باستخدام أسلوب جاليركن يمكن وصفها بالخطوات التالية:

(i) قسِّم المنظومة لعدد من العناصر المحددة E تمتلك عدد من العقد مقدارها p.

(ii) افترض شـكل مناسـب من التفاوت في درجة الحرارة T في كل عنصـر محدَّد وعبِّر عن $T^e(x,y,z,t)$ كالآتي:

$$T^e(x,y,z,t) = [N(x,y,z)]T^{-e}$$

في طريقة جاليركن فإنَّ المتبقي الوزنى لمنظومة العناصر يتم وضعه كصفر،

$$\iiint\limits_{V^e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T^e}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial T^e}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial T^e}{\partial z}\right)+q^\circ-\rho c\frac{\partial T^e}{\partial t}\right]dv=0 \quad (1)$$

ويمكن كتابتها كالآتي:

$$[k_1^e]T^e+[k_2^e]T^e+[k_3^e]T^e-p^e=0 \qquad (2)$$

حيث،

$$[k_1^e]=\int\iint[B]^t[D][B]dv \qquad (3)$$

$$[k_2^e]=\iint h[N]^t[N]ds \qquad (4)$$

$$[k_3^e]=\int\iint \rho c[N]^t[N]dv \qquad (5)$$

$$p^e=p_1^e-p_2^e+p_3^e \qquad (6)$$

$$p_1^e=\iiint \dot{q}[N]^t\,dv \qquad (7)$$

$$p_2^e=\iint q[N]^t\,dv \qquad (8)$$

$$p_3^e=\iiint hT_\infty[N]^t\,ds \qquad (9)$$

$$[D]=\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \qquad (10)$$

$$[N]=\begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & \cdots & N_p(x) \\ N_1(y) & N_2(y) & \cdots & N_p(y) \\ N_1(z) & N_2(z) & \cdots & N_p(z) \end{bmatrix}$$

$$[B]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

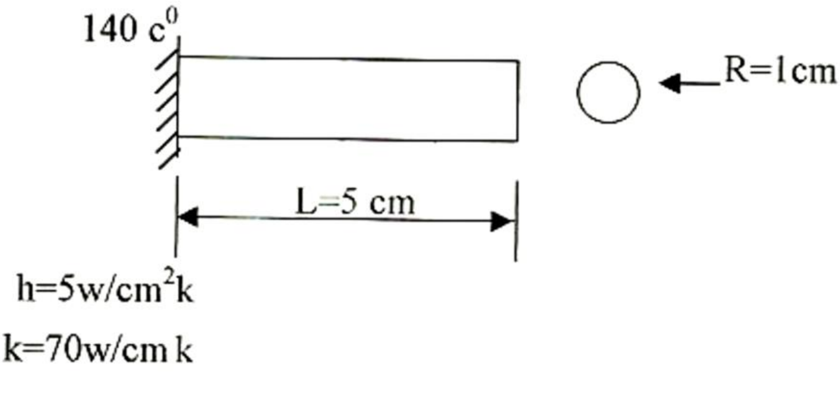
انتقال الحرارة أحادي البعد: (One dimensional heat transfer)

المعادلة التفاضلية كالآتي:

$$k=\frac{d^2T}{dx^2}+\dot{q}=0 \qquad (12)$$

3.6 مثال :

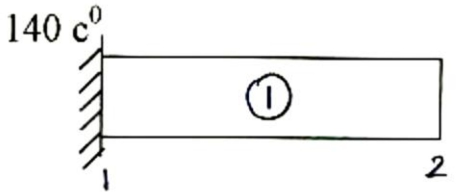
زعنف مستقيم منتظم: (straight uniform fin)



خطوات الحل:

(i) قسِّم القضيب إلي عدة عناصر محدَّدة

(idealize the rod into several finite elements)



(ii) افترض تفاوت درجة حرارة خطي في أي عنصر e،

$$T^e(x) = a_1 + a_2 x \qquad (1)$$

العناصر a_1 و a_2 يمكن تمثيلهما بدلالة درجة الحرارة العقدية كالآتي:

$$a_1 = q_1, \;\; and \;\; a_2 = \frac{q_2 - q_1}{L^e} \qquad (2)$$

$$T^e(x) = [N(x)]q^e$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L^e} & \frac{x}{L^e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

(iii) اشتقاق عناصر المصفوفات: (Derivation of elements matrices)

ولأن هذه المسألة أحادية البعد فإنَّ،

[D] = [k] الموصلية الحرارية

$$[N] = [N_1(x) \quad N_2(x)]$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{dx} & \frac{\partial N_2}{dx} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^e} & \frac{1}{L^e} \end{bmatrix}$$

$$[k_1^e] = \iiint [B]^t [D][B] dv$$

$$= \iiint_{x=0}^{L} [k] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^e} & \frac{1}{L^e} \end{bmatrix} A\, dx$$

$$= \frac{Ak}{L^{e^2}} \int \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{Ak}{L^{e^2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{Ak}{L^{e^2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} (x)_0^L = \frac{Ak}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$\left[k_2^e\right] = \iint h [N]^t [N] ds$$

$$= h \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x}{L} & \dfrac{x}{L} \end{bmatrix} p \, dx$$

حيث p هو المحيط، $p = 2\pi R$

$$\left[k_2^e\right] = h \int_0^L \begin{Bmatrix} \dfrac{L-x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{L-x}{L} & \dfrac{x}{L} \end{bmatrix} p \, dx$$

$$= \frac{hp}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} L-x \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L-x & x \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{hp}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} \left(L^2 - 2Lx + x^2\right) & \left(Lx - x^2\right) \\ \left(Lx - x^2\right) & x^2 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{hp}{L^2} \begin{bmatrix} \left(L^2 x - \dfrac{2Lx^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right) & \left(\dfrac{Lx^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right) \\ \left(\dfrac{Lx^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right) & \dfrac{x^3}{3} \end{bmatrix}_0^L$$

$$= \frac{hp}{L^2} \begin{bmatrix} \left(L^3 - L^3 + \dfrac{L^3}{3}\right) & \left(\dfrac{L^3}{2} - \dfrac{L^3}{3}\right) \\ \left(\dfrac{L^3}{2} - \dfrac{L^3}{3}\right) & \dfrac{L^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{hp}{L^2} \begin{bmatrix} \dfrac{L^3}{3} & \dfrac{L^3}{6} \\ \dfrac{L^3}{6} & \dfrac{L^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{hp}{L^2}\begin{bmatrix} \frac{2L^3}{6} & \frac{L^3}{6} \\ \frac{L^3}{6} & \frac{2L^3}{6} \end{bmatrix} = \frac{hpL^3}{6L^2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{hpL^e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

افترض حالة مستقرة، $[k_3^e] = 0$،

$$p^e = p_1^e - p_2^e + p_3^e \tag{6}$$

$$p_1^e = \iiint \dot{q}[N]^t \, dv \tag{7}$$

$$p_1^e = \int_{x=0}^{L} \dot{q} \begin{Bmatrix} 1-\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} A dx$$

$$p_1^e = \dot{q}A \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} 1-\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = \dot{q}A \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} \frac{L-x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = \frac{\dot{q}A}{L} \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} L-x \\ x \end{Bmatrix} dx$$

$$p_1^e = \frac{\dot{q}A}{L} \begin{Bmatrix} Lx - \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{q}A}{L} \begin{Bmatrix} L^2 - \frac{L^2}{2} \\ \frac{L^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{q}A}{L} \begin{Bmatrix} \frac{L^2}{2} \\ \frac{L^2}{2} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\dot{q}AL^2}{2L}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\dot{q}AL^e}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$p_2^e = \int_0^L \int q[N]^t \, ds \tag{9}$$

$$= \int_{x=0}^{L} q \begin{Bmatrix} 1-\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} p \, dx$$

$$= qp \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = qp \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} \dfrac{L-x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = \frac{qp}{L^e} \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} L-x \\ x \end{Bmatrix} dx$$

$$\frac{qp}{L} \begin{Bmatrix} Lx - \dfrac{x^2}{2} \\ \dfrac{x^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{qp}{L} \begin{Bmatrix} L^2 - \dfrac{L^2}{2} \\ \dfrac{L^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{qp}{L} \times \frac{L^2}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore\ p_2^e = \frac{qpL^e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{10}$$

$$p_3^e = \int hT_\infty [N]^t \, ds$$

$$= \int_{x=0}^{L} hT_\infty \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} pdx$$

$$= hT_\infty p \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = hT_\infty p \begin{Bmatrix} \dfrac{L-x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} dx$$

$$= \frac{hT_\infty p}{L} \int_{x=0}^{L} \begin{Bmatrix} L-x \\ x \end{Bmatrix} dx = \frac{hT_\infty p}{L} \begin{bmatrix} Lx - \dfrac{x^2}{2} \\ \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix}_0^L$$

$$= \frac{hT_\infty p}{L} \begin{Bmatrix} \dfrac{x^2}{2} \\ \dfrac{x^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{hT_\infty pL^2}{L} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{hT_\infty pL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

$$\left\lfloor \tilde{k} \right\rfloor \vec{T} = \vec{P} \tag{12}$$

$$[\tilde{k}] = \sum_{e=1}^{E} \left(\frac{Ak}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{hpL^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \tag{13}$$

$$[\tilde{k}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{Ak}{L} + \frac{2hpL}{6}\right) & \left(\frac{-Ak}{L} + \frac{2hpL}{6}\right) \\ \left(\frac{-Ak}{L} + \frac{2hpL}{6}\right) & \left(\frac{Ak}{L} + \frac{2hpL}{6}\right) \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\vec{p} = \sum_{e=1}^{E} \frac{1}{2}\left(\dot{q}AL^e - qpL^e + hT_\infty pL^e\right)\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} \tag{15}$$

في هذه الحالة $\dot{q} = 0 = q$،

وعليه عندما $E = 1$،

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{Ak}{L} + \frac{2hpL}{6}\right) & \left(\frac{-Ak}{L} + \frac{hpL}{6}\right) \\ \left(\frac{-Ak}{L} + \frac{hpL}{6}\right) & \left(\frac{Ak}{L} + \frac{2hpL}{6}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \frac{hpT_\infty L^e}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{hpL^2}{3kA}\right) & \left(-1 + \frac{hpL^2}{6kA}\right) \\ \left(-1 + \frac{hpL^2}{6kA}\right) & \left(1 + \frac{hpL^2}{3kA}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \frac{hpT_\infty L^2}{2kA}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

بالتعويض عن القيم المعطاة بالمسألة،

$$\frac{hpL^2}{kA} = \frac{5 \times 2\pi \times 1 \times 5^2}{70 \times \pi \times 1^2} = \frac{5 \times 2\pi \times 5^2}{70\pi} = \frac{25}{7}$$

$$\frac{hpT_\infty L^2}{2kA} = \frac{5 \times 2\pi \times 1 \times 40 \times 25}{2 \times 70 \times \pi \times 1^2} = \frac{500}{7}$$

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{25}{21}\right) & \left(-1 + \frac{25}{42}\right) \\ \left(-1 + \frac{25}{42}\right) & \left(1 + \frac{25}{21}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \frac{500}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بما أنَّ $T_1 = 140^oC$،

$$\begin{bmatrix} \frac{46}{21} & -\frac{17}{42} \\ -\frac{17}{42} & \frac{46}{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 140 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{500}{7} \\ \frac{500}{7} \end{bmatrix}$$

$$\frac{46}{21}\times 140-\frac{17}{42}T_2=\frac{500}{7} \qquad (1)$$

$$-\frac{17}{42}\times 140+\frac{46}{21}T_2=\frac{500}{7} \qquad (2)$$

من المعادلة (1)،

$$T_2=\left(\frac{46\times 140}{21}-\frac{500}{7}\right)\times\frac{42}{17}=\underline{581.2}°C$$ مرفوضة (rejected)

من المعادلة (2)،

$$T_2=\left(\frac{500}{7}+\frac{17}{42}\times 140\right)\times\frac{21}{46}=\underline{58.5}°C$$ (مقبولة)

من المعادلة (17) بالنسبة للعنصرين،

$$[\tilde{k}]=\begin{bmatrix}\left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right) & \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right) & 0 & 0\\ \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right) & \left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right) & \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right)\\ 0 & 0 & \left(-1+\frac{hpL^2}{6kA}\right) & \left(1+\frac{hpL^2}{3kA}\right)\end{bmatrix}$$

$$[\tilde{k}]=\begin{bmatrix}\left(1+\frac{hpL^2/4}{3kA}\right) & \left(-1+\frac{hpL^2/4}{6kA}\right) & 0\\ \left(-1+\frac{hpL^2/4}{6kA}\right) & 2\left(1+\frac{hpL^2/4}{3kA}\right) & \left(-1+\frac{hpL^2/4}{6kA}\right)\\ 0 & \left(-1+\frac{hpL^2/4}{6kA}\right) & \left(1+\frac{hpL^2/4}{3kA}\right)\end{bmatrix}$$

$$[\tilde{k}]=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & 0\\ a_2 & 2a_1 & a_2\\ 0 & a_2 & a_1\end{bmatrix}$$

حيث،

$$a_1=1+\frac{2hpL^2}{24kA},\quad a_2=-1+\frac{hpL^2}{24kA}$$

أيضاً من المعادلة (17)، بالنسبة لعنصرين،

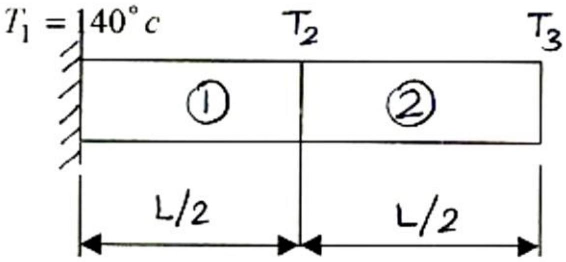
$$\vec{p}=\begin{bmatrix} \dfrac{hpT_{\infty}L^{2}/4}{2kA} & 0 \\ \dfrac{hpT_{\infty}L^{2}/4}{2kA} & \dfrac{hpT_{\infty}L^{2}/4}{2kA} \\ 0 & \dfrac{hpT_{\infty}L^{2}/4}{2kA} \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}=\begin{bmatrix} \dfrac{hpT_{\infty}L^{2}}{8kA} \\ \dfrac{2hpT_{\infty}L^{2}}{8kA} \\ \dfrac{hpT_{\infty}L^{2}}{8kA} \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}=\begin{bmatrix} b \\ 2b \\ b \end{bmatrix}$$

$\therefore$ المعادلة (17) ستصبح كالآتي:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_2 & 2a_1 & a_2 \\ 0 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}=\begin{Bmatrix} b \\ 2b \\ b \end{Bmatrix} \qquad (18)$$



عوِّض عن قيم A, k, L, p, h

$$a_1=1+\frac{2\times 25}{24\times 7}=\frac{109}{84}$$

$$a_2=-1+\frac{1\times 25}{24\times 7}=-\frac{143}{168}$$

$$b = \frac{hpT_\infty L^2}{8kA} = \frac{500}{28}$$

عوِّض في المعادلة (18)،

$$\begin{bmatrix} \frac{109}{84} & -\frac{143}{168} & 0 \\ -\frac{143}{168} & \frac{109}{42} & -\frac{143}{168} \\ 0 & -\frac{143}{168} & \frac{109}{84} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 140 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{500}{28} \\ \frac{1000}{28} \\ \frac{500}{28} \end{Bmatrix} \qquad (19)$$

حل المعادلة عندما $T_1 = 140^oC$،

$$\frac{109}{84}\times 140 - \frac{143}{168}T_2 = \frac{500}{28} \qquad (1)$$

$$T_2 = \left(\frac{109}{84}\times 140 - \frac{500}{28}\right)\frac{168}{143} = \underline{192.45}^oC$$ مرفوضة (rejected)

بما أنَّ 140< 192.45،

$$-\frac{143}{168}\times 140 + \frac{109}{42}T_2 - \frac{143}{168}T_3 = \frac{500}{28}$$

$$\frac{109}{42}T_2 - \frac{143}{168}T_3 = \frac{1000}{28} + \frac{143}{168}\times 140 \qquad (2)$$

$$-\frac{143}{168}T_2 + \frac{109}{84}T_3 = \frac{500}{28} \qquad (3)$$

بإختصار المعادلتين (2) و (3)، لتصبحا،

$$2.6T_2 - 0.851T_3 = 154.9 \qquad (2)$$

$$-0.851T_2 + 2.6T_3 = 17.86 \qquad (3)$$

بضرب المعادلة (3) في $\frac{0.851}{2.6}$ لتصبح،

$$-0.28T_2 + 0.851T_3 = 5.85 \qquad (4)$$

بجمع المعادلتين (2) و(4) نحصل على،

$$(2.6-0.28)T_2+0=154.9+5.85$$

$$2.32T_2=160.75$$

$$\therefore T_2=\frac{160.7}{2.32}=\underline{\underline{69.3}}°C$$

نعوِّض عن قيمة T_2 في المعادلة (2)،

$$2.6\times 69.3-0.851T_3=154.9$$

$$\therefore T_3=\frac{2.6\times 69.3-154.9}{0.851}=\underline{\underline{29.7}}°C$$

الكتب والمراجع

الكتب والمراجع العربية:

1. د. أسامة محمد المرضي سليمان ، "مذكرة محاضرات التصميم بمساعدة الحاسوب" ، جامعة وادي النيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، ديسمبر 1998م.

2. بروفيسـور محمود يس عثمان، "مذكرة محاضـرات أسـلوب العناصـر المحددة (F.E.M) في حل مسـائل ميكانيكا المصـمتات" ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسـة والتقنية ، قسـم الهندسـة الميكانيكية، مارس 1990م.

الكتب والمراجع الإنجليزية

1. Alexandre Ern, Jean – Luc Guermond, "Theory and practice of finite elements", springer, New York, (2008), ISBN 0-387-20574-8.
2. Patricia L. Smith, Tillman J. Ragan, "Instructional design 3rd edition", (2004).
3. Narayan K. Lalit, "Computer aided design and manufacturing", New Delhi, Prentice Hall of India, (2008).
4. Daryl L. Lohan, "A first course in the finite element method", Cengage learning, (2011), ISBN 978 – 0495668251.
5. Ready J. N., "An introduction to finite element method 3rd edition", McGraw-Hill, (2006), ISBN 9780071267618.
6. Strang Gilbert, Fix George, "An analysis of the finite element method", Prentice Hall, (1973), ISBN 0 – 13 – 032946 – 0.
7. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z., "The finite element method: its basis and fundamentals sixth edition", Butterworth – Heinemann, (2005), ISBN 0750663200.

8. Bathe K. J., "Finite element procedures", Cambridge, (2006), ISBN 097900490X.
9. Smith I.M., Griffiths D. V., Margetts L., "Programming the finite element method fifth edition", Wiley, ISBN 978 – 1 – 119 – 97334 – 8.
10. Arregui Mena J. D., Margetts L., et al., "Practical application of the stochastic finite element method", Archives of computational methods in engineering, 23(1), PP. (171 – 190), (2014).
11. Arregui Mena J. D., et al., "Characterization of the spatial variability of material properties of gilso carbon and NBG – 18 using random fields", Journal of nuclear materials, 511, PP. (91 – 108), (2018).
12. Osama Mohammed Elmardi Suleiman, " lecture notes on computer aided design using finite element method ", Nile valley university, faculty of engineering and technology, department of mechanical engineering, (2002).
13. Osama Mohammed Elmardi Suleiman, " lecture notes on computer aided design using dynamic relaxation method coupled with finite differences ", Nile valley university, faculty of engineering and technology, department of mechanical engineering, (2002).

نبذة عن المؤلف:

أسامة محمد المرضي سليمان وُلِدَ بمدينة عطبرة بالسودان في العام 1966م. حاز على دبلوم هندسة ميكانيكية من كلية الهندسة الميكانيكية – عطبرة في العام 1990م. تحصَّل أيضاً على درجة البكالوريوس في الهندسة الميكانيكية من جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا – الخرطوم في العام 1998م ، كما حاز على درجة الماجستير في تخصص ميكانيكا المواد من جامعة وادي النيل – عطبرة في العام 2003م ودرجة الدكتوراه من جامعة وادي النيل في العام 2017م. قام بالتدريس في العديد من الجامعات داخل السودان، بالإضافة لتأليفه لأكثر من ثلاثين كتاباً باللغة العربية ولعشرة كتب باللغة الإنجليزية بالإضافة لخمسين ورقة علمية منشورة في دور نشر ومجلات عالمية إلى جانب إشرافه على أكثر من ثلاثمائة بحث تخرج لكل من طلاب الماجستير، الدبلوم العالي، البكالوريوس، والدبلوم العام. يشغِل الآن وظيفة أستاذ مساعد بقسم الميكانيكا بكلية الهندسة والتقنية – جامعة وادي النيل. بالإضافة لعمله كاستشاري لبعض الورش الهندسية بالمنطقة الصناعية عطبرة. هذا بجانب عمله كمدير فني لمجموعة ورش الكمالي الهندسية لخراطة أعمدة المرافق واسطوانات السيارات والخراطة العامة وكبس خراطيش الهيدروليك.