كتاب التصميم بمساعدة الحاسوب

الفصل الثاني

حل مسائل تحليل الإجهادات باستخدام أسلوب العناصر المحدَّدة

(Solution of Stress Analysis Problems Using Finite Elements Method)

تأليف:

د. أسامة محمد المرضي سليمان خيَّال

Dr. Osama Mohammed Elmardi Suleiman Khayal

قسم الهندسة الميكانيكية

كلية الهندسة والتقنية

جامعة وادي النيل

عطبرة، السودان

الطبعة الأولي ديسمبر 1998م

الطبعة الثانية يناير 2019م

الفصل الثاني

حل مسائل تحليل الإجهادات باستخدام أسلوب العناصر المحدَّدة

(Solution of Stress Analysis Problems Using Finite Elements Method)

يمكن تلخيص خطوات الحل في خمس خطوات أساسية:

2.1 تعريف شبكة العناصر المحددة:

(Definition of the finite element mesh)

اعتماداً على المســألة التي بأيدينا، ســيكون من المناســب تمييزها كخط أو ذات بعدين أو ثلاث أبعاد.

2.2 اختيار نموذج الإزاحة: (Selection of the displacement model)

يجب أن تقابل الدالة التي يتم اختيارها لوصف نموذج الإزاحة لعنصر ما أحكاماً معينة:

أ/ عدد الاصــطلاحات أو العناصــر في المتســلســلة: (Number of terms in the series).

عدد الاصـطلاحات أو العناصـر في المتسـلسـلة التي يتم اختيارها يجب أن يسـاوي العدد الكلي لـدرجـة الحريـة (.i.e الإزاحــة العقـديـة (nodal displacement)، الـدوران (rotation)، الانفعال (strain)).

ب/ الانسجام: (Compatibility)

الدالة التقريبية وبعض مشتقاتها التفاضلية يجب أن تكون متصلة خلال العنصر ويجب أن يكون هنالك انسجام بين العناصر المتجاورة.

الجسم الجاسئ (rigid body) هو نموذج الإزاحة البسيط (ليس به انفعال) يليه في البساطة نموذج ثابت الانفعال، وعليه فإنَّ الدالة التي يتم اختيارها يجب أن تكون قادرة على تمثيل هذين الشرطين.

هذا يتضمن أنَّ تمثيل متسلسلة القدرة يجب أن يبدأ بثوابت (constants) واصطلاحات خطية (linear terms).

2.3 صياغة معادلة الكزازة المتقطعة:

(Formulating the discrete stiffness equation)

على أساس نموذج الإزاحة المفترض Q فإنَّ توزيع الانفعال خلال العنصر الفردي وتبعاً لذلك طاقة الوضع الكلية للتقريب المتقطع يمكن تحديدها من،

$$V = U + \Omega = \sum \left(U^e + \Omega^e \right) \qquad \text{(a)}$$

حيث، V = طاقة الانفعال الكلية.

U = طاقة الانفعال للعنصر.

Ω = طاقة الانفعال للأحمال المسلطة.

$$\mathrm{V} = \mathrm{v}\left(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \cdots, \mathrm{a}_\mathrm{n} \right) \qquad \text{(b)}$$

حيث $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \cdots, \mathrm{a}_\mathrm{n}$ هي إحداثيات الإزاحة.

بوضع الشرط dv = 0 للاتزان فإنَّ ذلك يقود لمعادلة الكزازة التالية،

$$[k][a]=[Q] \qquad (c)$$

2.4 حل معادلات الكزازة: (Solution of the stiffness equations)

يتم حل المعادلة (c) بالطريقة المعيارية للمصـــــفوفات الجبرية. [k] تكون متماثلة وغالباً العديد من عناصرها يساوي صفر.

المصفوفة المتماثلة: (Symmetric matrix)

مصفوفة (n×n) تُسمي متماثلة إذا كانت $A^T = A$

كمثال،

$$A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 7\end{bmatrix} \text{ ، } A^T=\begin{bmatrix}5 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 7\end{bmatrix}=A$$

2.5 تحديد انفعال وإجهاد العنصر:

(Determining the element strain and stress)

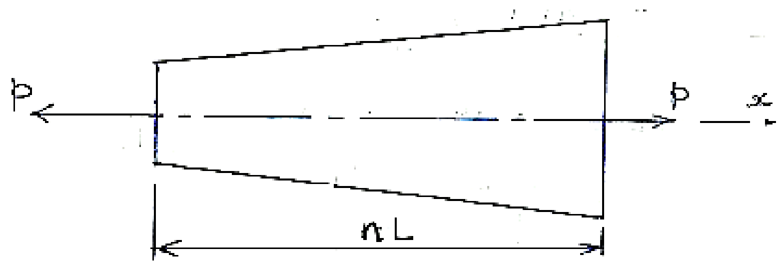
عندما يتم تحديد نموذج الإزاحة فإنَّه من السهولة بمكان حساب انفعال العنصر من نموذج الإزاحة بإســــتخدام علاقة الإزاحة / الانفعال. ويمكن الحصــــول على الإجهادات عندها بواسطة قانون هوك (Hook's law).

2.6 مثال (1):

صياغة إزاحة العناصر المحدَّدة لقضيب معرَّض لحمل شد:

(Displacement finite element formulation for bar extension)

اعتبر قضيباً مسلوباً أحادي محور الحمل كما موضح في الشكل (2.4) أدناه.

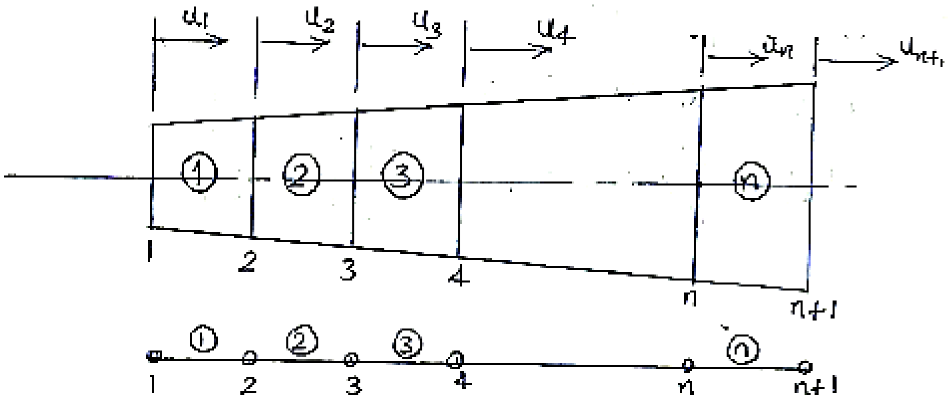


شكل (2.4)

الخطوة الأولي هي تعريف شبكة العناصر المحدَّدة:

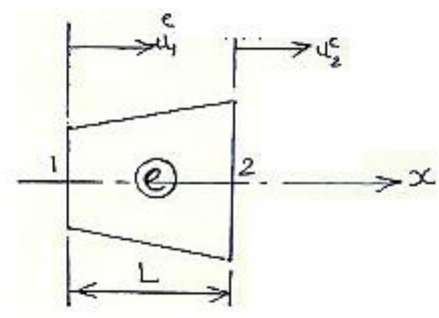
في هذه الحالة فإنَّ التقسيم هو ترتيب خطي للعناصر كما موضح في الشكل (2.5) أدناه.

نعرف من ميكانيكا المواد أن التشوه (تغير الشكل) باعتبار أن المسلوب قاسي يعتمد على الإزاحة المحورية u(x) للمقطع العرضي.



شكل (2.5)

نأخذ عنصراً نموذجياً e ونُعلِّم مواضع العقد الخارجية (External nodes) كـــــ 1 و2، والإحداثي الموضعي للعنصر x كما هو واضح في الشكل (2.6) أدناه.



شكل (2.6)

وعلى المقياس الموضعي، فإن تغير الشكل (deformation) يتم تحديده بالإزاحة العقدية للعنصر (element nodal displacement) u_1^e و u_2^e.

الخطوة التالية هي اختيار نموذج إزاحة للعنصر. من دراستنا لميكانيكا المواد فإننا نعلم أنَّ الانفعال يتفاوت على طول القضيب المسلوب بعلاقة لا خطية (non-linear fashion).

وعليه فإنَّ دالة u يمكن كتابتها كالآتي:

$$u^e(x) = a_0 + a_1 x = [1 \quad x]\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = [f(x)]\{a\} \qquad (1)$$

بالرجوع للشكل (2.6) عاليه وبوضع x = 0 و x = L يمكن كتابة المعادلة (1) كالآتي:

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

ويمكن تبسيطها كالآتي،

$$\{u\}^e = [A]\{a\} \qquad (3)$$

بجعل a موضع القانون،

$$\therefore \{a\} = [A]^{-1}\{u\}^e$$

بالتعويض في المعادلة (1)،

$$u^e(x) = [f(x)][A]^{-1}\{u\}^e \qquad (4)$$

في هذه الحالة،

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

من المعادلة (4)،

$$u^e(x) = [1 \quad x]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$$

يمكن القول أنَ،

$$u^e(x) = \left[\left(1 \quad -\frac{x}{L}\right) \quad \frac{x}{L}\right]\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

أو $;\mathrm{u^e(x)} = [\mathrm{N_1(x)} \quad \mathrm{N_2(x)}]\begin{Bmatrix} \mathrm{u_1^e} \\ \mathrm{u_2^e} \end{Bmatrix} \qquad (6)$

الخطوة الثالثة هي الحصول على الانفعال وطاقة الانفعال للعنصر:

الانفعال، $\varepsilon = \dfrac{du^e}{dx} = \dfrac{dN}{dx}\{u\}^e = [B]\{u\} \qquad (7)$

في هذه الحالة،

الانفعال، $\varepsilon = \left[-\dfrac{1}{L} \quad \dfrac{1}{L}\right]\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \qquad (8)$

من قانون هوك، (Hook's Law)،

$$\sigma = E\ \varepsilon$$

حيث يمكن كتابة صورتها العامة الآتي،

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \qquad (9)$$

بما أنَّ $\sigma = \dfrac{F}{A}$ ، $\varepsilon = \dfrac{\delta L}{\delta x}$

$U = \frac{1}{2} F \delta L$، طاقة الانفعال

$$= \frac{1}{2} \sigma \varepsilon A dx = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 A\, dx$$

يمكن كتابة طاقة الانفعال المختزنة في العنصر كالآتي:

$$U^e = \int \tfrac{1}{2} E \varepsilon^2 dV$$

$$= \int \tfrac{1}{2} \{\varepsilon\}^t [E] \{\varepsilon\} dV \qquad (10)$$

من المعادلتين (7) و (10)،

$$U^e = \int \tfrac{1}{2} [B]^t \{u^e\} [E][B] \{u^e\} dV$$

$$U^e = \tfrac{1}{2} \{u^e\}' \left(\int [B]^t [E][B] dV \right) \{u^e\} \qquad (11)$$

بتقييم حاصل ضرب المصفوفة وإجراء التكامل نحصل على،

$$U^e = \tfrac{1}{2} \{u^e\}' [k]^e \{u\}^e \qquad (12)$$

$$[k]^e = \int [B]^t [E][B] dV \qquad (13)$$

حيث $[k]^e$ = مصــفوفة كزازة العنصــر (element stiffness matrix) وهي مصــفوفة متماثلة بالرتبة (2×2)،

$U = \sum u^e$، طاقة الانفعال الكلية $\qquad (14)$

$\{\tilde{u}\} = \{\{u\}^e\} = \begin{Bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}^2 \\ \vdots \\ \{u\}^n \end{Bmatrix}$ ، إجعل $\qquad (15)$

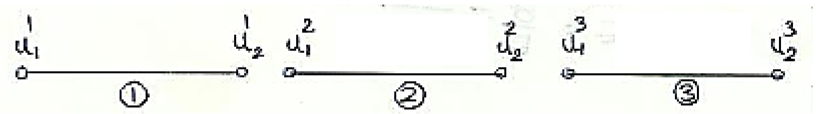
وأيضاً إجعل،

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} [k]^1 & 0 & \cdots \\ 0 & [k]^2 & \cdots \\ & \ddots & \\ & & [k]^n \end{bmatrix} \qquad (16)$$

المعادلة (14) يمكن كتابتها كالآتي من المعادلة (15) والمعادلة (12)،

$$U = \tfrac{1}{2}\{\tilde{u}\}^t[\tilde{K}]\{\tilde{u}\} \qquad (17)$$

والآن عناصر $\{u\}^e$هي ليست مطلقاً مستقلة.



$$u_2^1 = u_1^2 = u_2$$

$$u_2^2 = u_1^3 = u_3$$

$$\vdots$$

etc.

عليه يمكن كتابتها كالآتي،

$$\begin{Bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}^2 \\ \vdots \\ \{u\}^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [C]^1 \\ [C]^2 \\ \vdots \\ [C]^n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \qquad (18)$$

أو $\{\tilde{u}\} = [c]\{u\}$ (19)

بالتعويض في المعادلة (17)،

$$U = \tfrac{1}{2}\{u\}^t[C]^t[\tilde{k}][C]\{u\} \qquad (20)$$

أو $U = \tfrac{1}{2}\{u\}^t[k]\{u\}$ (21)

حيث، $k = [C]^t[\tilde{k}][C]$

والآن، طاقة الانفعال للأحمال المطبقة يمكن الحصول عليها من:

$$\Omega = -(-pu_1) - pu_{n+1} \qquad (22)$$

عموماً يمكن كتابتها كالآتي:

$$\Omega = -\{u\}^t [X] \qquad (23)$$

حيث X = القوي المسلطَّة خارجياً (External applied forces)

طاقة الانفعال الكلية = طاقة الانفعال للعنصر + طاقة الانفعال للأحمال المسلطَّة

$$V = \tfrac{1}{2}\{u\}^t [k]\{u\} - \{u\}^t [x] \qquad (24)$$

للاتزان، $\delta V = 0$، عليه،

$$\{\delta u\}^t ([k]\{u\} - \{x\}) = 0 \qquad (25)$$

$$[k]\{u\} = \{x\} \qquad (26)$$

هذه هي معادلة الاتزان المطلوبة للجسم التقريبي المجمع.

2.7 مثال (2):

لعنصر قضيب مسلوب مسلَّط عليه حمل محوري فقط كما في الشكل (2.7) أدناه، وضِّح أنَّ مصفوفة كزازة العنصر تعطي بالعلاقة التالية:

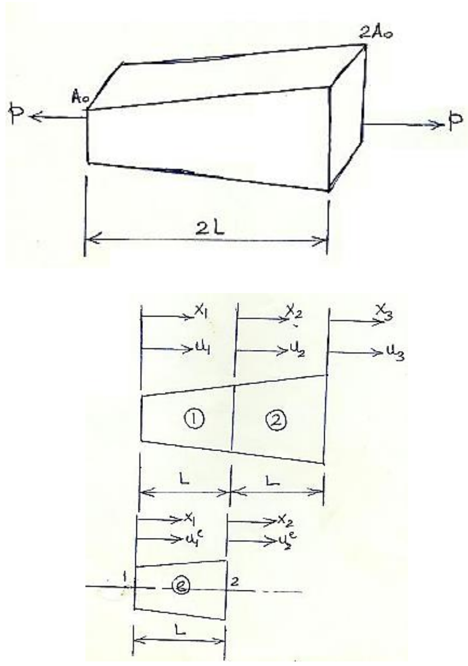
$$[k]^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث E = معاير يونق للمرونة.

A= مساحة المقطع العرضي للعنصر.

L = طول العنصر.

أيضاً ، أحسب متوسط الانفعال والإجهاد للقضيب.



شكل (2.7)

الحل:

قسِّم القضيب إلي عنصرين،

افترض أنَّ دالة الإزاحة هي،

$$u^e(x) = a_0 + a_1 x$$

أو $u^e(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$ ، (1)

عندما $x = 0$ و $x = L$ ،

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$$

أو $\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

عوِّض عن المعادلة (2) في المعادلة (1)،

$$u^e(x) = [1 \quad x]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$$

$$= \left[\left(1 \quad -\frac{x}{L}\right) \quad \frac{x}{L}\right]\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$$

أو $\quad u^e(x) = [N_1(x) \quad N_2(x)]\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \qquad (3)$

الانفعال، $\varepsilon = \dfrac{du^e(x)}{dx} = \dfrac{dN}{dx}\{u\}^e$

$$= [B]\{u\}^e \qquad (4)$$

$$\therefore \varepsilon = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$$

من قانون هوك،

$$\{\sigma\} = \{E\}\{\varepsilon\}$$

والآن، طاقة الانفعال المختزنة في العنصر يمكن إعطاؤها كالآتي:

$$U^e = \int_0^L \tfrac{1}{2} E\,\varepsilon^2 dV$$

$$= \int \tfrac{1}{2}\{\varepsilon\}^t [E]\{\varepsilon\} dv \qquad (5)$$

من المعادلتين (4) و (5) ،

$$U^e = \int \tfrac{1}{2}[B]^t \{u\}^{e^t} [E][B]\{u\}^e dV$$

$$U^e = \tfrac{1}{2}\{u^e\}^t \left(\int [B]^t [E][B] dV\right)\{u^e\} \qquad (6)$$

بإجراء التكامل نحصل على،

$$U^e = \tfrac{1}{2}\{u^e\}^t [k]^e \{u\}^e \qquad (7)$$

حيث $[k]^e$ هي مصفوفة كزازة العنصر،

بوضع ،

$$[k]^e = \int_0^L [B]^t [E][B] dV \qquad (8)$$

$$= \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A\,dx$$

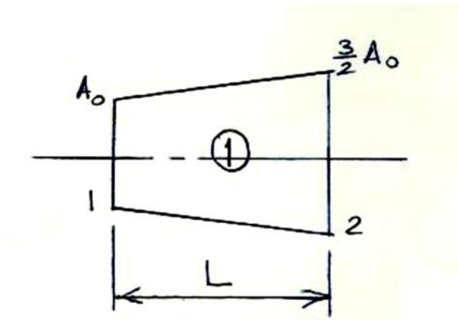
$$= \frac{E}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \{-1 \quad 1\} A\,dx$$

$$= \frac{EA}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} (x)_0^L$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

اعتبر العنصر (1):



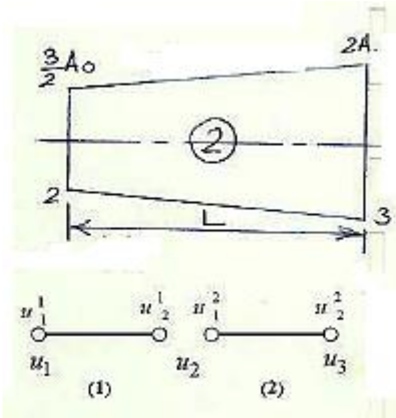
$$[k]^1 = \frac{EA_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

مساحة المقطع العرضي للعنصر (1) = A_1، حيث،

$$= \frac{1}{2}\left(A_0 + \frac{3}{2}A_0\right) = \frac{5}{4}A_0$$

$$\therefore [k]^1 = \frac{5EA_0}{4L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

اعتبر العنصر (2):



$$[k]^2 = \frac{EA_2}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}A_0 + 2A_0\right) = \frac{7}{4}A_0$$

$$\therefore [k]^2 = \frac{7EA_0}{4L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

$$\{\tilde{u}\} = [C]\{u\}$$

عليه، يمكن كتابة مصفوفة الإزاحة المحورية للعناصر (1) و(2) كالآتي:

$$\begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad (12)$$

أو $\{\tilde{u}\} = [C]\{u\}$

من المعادلتين (10) و (11)،

$$[\tilde{k}] = \frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

ولكن مصفوفة الكزازة للقضيب كله يمكن إعطاؤها كالآتي:

$$[k] = [C]^t[\tilde{k}][C]$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5&-5&0&0\\-5&5&0&0\\0&0&7&-7\\0&0&-7&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5&-5&0&0\\-5&5&7&-7\\0&0&-7&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5&-5&0\\-5&12&-7\\0&-7&7\end{bmatrix}$$

$$=\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5&-5&0\\-5&12&-7\\0&-7&7\end{bmatrix} \qquad (13)$$

من معادلة الاتزان، $[\mathrm{k}]\{\mathrm{u}\}=\{\mathrm{X}\}$،

$$\frac{EA_0}{4L}\begin{bmatrix}5&-5&0\\-5&12&-7\\0&-7&7\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{Bmatrix} \qquad (14)$$

بتطبيق الشروط الحدودية في المعادلة (14)،

$X_1 = X_1,\ X_2 = 0,\ X_3 = X_3$

$$\frac{EA_0}{4L}\begin{Bmatrix}5u_1-5u_2\\-5u_1+12u_2-7u_3\\-7u_2+7u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1\\0\\X_3\end{Bmatrix}$$

$$\frac{5EA_0}{4L}(u_1-u_2)=X_1 \qquad (15)$$

$$\frac{EA_0}{4L}(-5u_1+12u_2-7u_3)=0 \qquad (16)$$

$$\frac{7EA_0}{4L}(-u_2+u_3)=X_3 \qquad (17)$$

من المعادلة (16)،

$$-5u_1+12u_2-7u_3=0$$

$$-7u_3=5u_1-12u_2$$

$$\therefore u_3 = \frac{12u_2 - 5u_1}{7} = \frac{12}{7}u_2 - \frac{5}{7}u_1$$

بالتعويض عن قيمة u_3 في المعادلة (17)،

$$\frac{7EA_0}{4L}\left(-u_2 + \frac{12}{7}u_2 - \frac{5}{7}u_1\right) = X_3$$

$$\frac{7EA_0}{4L}\left(\frac{5}{7}u_2 - \frac{5}{7}u_1\right) = X_3$$

$$-\frac{5}{7} \times \frac{7EA_0}{4L}(u_1 - u_2) = X_3$$

$$\frac{-5EA_0}{4L}(u_1 - u_2) = X_3$$

قوتان متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه، $\therefore X_1 = -X_3$

لإيجاد الانفعالات والاجهادات:

اعتبر العنصر (1):

$$\varepsilon^1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = -\frac{u_1}{L} + \frac{u_2}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L}$$ ، الانفعال في العنصر (1)

من المعادلة (15)،

$$X_1 = \frac{-5EA_0}{4L}(u_2 - u_1)$$

$$\therefore \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{4X_1}{5EA_0}$$

$$\therefore \varepsilon^{(1)} = -\frac{4X_1}{5EA_0} = \frac{4X_3}{5EA_0}$$

$$\therefore \sigma^1 = E\varepsilon^1 = E \times \frac{-4X_1}{5EA_0} = -\frac{4X_1}{5A_0} = \frac{4X_3}{5A_0}$$ ، الإجهاد في العنصر (1)

بما أنَّ $X_1 = -X_3$

اعتبر العنصر (2):

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{u_3 - u_2}{L}$$

$$\therefore \frac{u_3 - u_2}{L} = \frac{4X_3}{7EA_0}$$

$$\therefore \varepsilon^{(2)} = \frac{4X_3}{7EA_0} = \frac{-4X_1}{7EA_0}$$

$$\therefore \sigma^{(2)} = E\varepsilon^{(2)} = E \times \frac{4X_3}{7EA_0} = \frac{4X_3}{7A_0} = \frac{-4X_1}{7A_0}$$

$$\therefore \varepsilon_{average} = \frac{\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{4X_3}{5EA_0} + \frac{4X_3}{7EA_0}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{28X_3 + 20X_3}{35EA_0}\right]$$

$$= \frac{24X_3}{35EA_0}$$

$$\sigma_{average} = E\ \varepsilon_{average} = \frac{24}{35}\frac{X_3}{A_0}$$

الكتب والمراجع

الكتب والمراجع العربية:

1. د. أسامة محمد المرضي سليمان ، "مذكرة محاضرات التصميم بمساعدة الحاسوب" ، جامعة وادي النيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، ديسمبر 1998م.

2. بروفيسور محمود يس عثمان، "مذكرة محاضرات أسلوب العناصر المحددة (F.E.M) في حل مسائل ميكانيكا المصمتات" ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، مارس 1990م.

الكتب والمراجع الإنجليزية

1. Alexandre Ern, Jean – Luc Guermond, "Theory and practice of finite elements", springer, New York, (2008), ISBN 0-387-20574-8.
2. Patricia L. Smith, Tillman J. Ragan, "Instructional design 3rd edition", (2004).
3. Narayan K. Lalit, "Computer aided design and manufacturing", New Delhi, Prentice Hall of India, (2008).
4. Daryl L. Lohan, "A first course in the finite element method", Cengage learning, (2011), ISBN 978 – 0495668251.
5. Ready J. N., "An introduction to finite element method 3rd edition", McGraw-Hill, (2006), ISBN 9780071267618.
6. Strang Gilbert, Fix George, "An analysis of the finite element method", Prentice Hall, (1973), ISBN 0 – 13 – 032946 – 0.
7. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z., "The finite element method: its basis and fundamentals sixth edition", Butterworth – Heinemann, (2005), ISBN 0750663200.

8. Bathe K. J., "Finite element procedures", Cambridge, (2006), ISBN 097900490X.
9. Smith I.M., Griffiths D. V., Margetts L., "Programming the finite element method fifth edition", Wiley, ISBN 978 – 1 – 119 – 97334 – 8.
10. Arregui Mena J. D., Margetts L., et al., "Practical application of the stochastic finite element method", Archives of computational methods in engineering, 23(1), PP. (171 – 190), (2014).
11. Arregui Mena J. D., et al., "Characterization of the spatial variability of material properties of gilso carbon and NBG – 18 using random fields", Journal of nuclear materials, 511, PP. (91 – 108), (2018).
12. Osama Mohammed Elmardi Suleiman, " lecture notes on computer aided design using finite element method ", Nile valley university, faculty of engineering and technology, department of mechanical engineering, (2002).
13. Osama Mohammed Elmardi Suleiman, " lecture notes on computer aided design using dynamic relaxation method coupled with finite differences ", Nile valley university, faculty of engineering and technology, department of mechanical engineering, (2002).

نبـذة عـن المـؤلـف:

أسـامة محمد المرضـي سـليمان وُلِدَ بمدينة عطبرة بالسـودان في العام 1966م. حـاز على دبلوم هندســة ميكـانيكية من كلية الهندسـة الميكانيكية – عطبرة في العام 1990م. تحصَّـل أيضـاً على درجة البكالوريوس في الهندســة الميكـانيكية من جامعة السـودان للعلوم والتكنولوجيا – الخرطوم في العام 1998م ، كما حاز على درجة الماجســتير في تخصــص ميكانيكا المواد من جامعة وادي النيل – عطبرة في العام 2003م ودرجة الدكتوراه من جامعة وادي النيل في العام 2017م. قام بالتدريس في العديد من الجامعات داخل الســودان، بالإضـــافة لتأليفه لأكثر من ثلاثين كتاباً باللغة العربية ولعشـرة كتب باللغة الإنجليزية بالإضـافة لخمسـين ورقة علمية منشـورة في دور نشـــر ومجلات عالمية إلى جانب إشـــرافه على أكثر من ثلاثمائة بحث تخرج لكل من طلاب الماجسـتير، الدبلوم العالي، البكالوريوس، والدبلوم العام. يشـغِل الآن وظيفة أسـتاذ مسـاعد بقسـم الميكانيكا بكلية الهندسـة والتقنية – جامعة وادي النيل. بالإضـافة لعمله كاسـتشـاري لبعض الورش الهندسية بالمنطقة الصناعية عطبرة. هذا بجانب عمله كمدير فني لمجموعة ورش الكمالي الهندســية لخراطة أعمدة المرافق واســطوانات الســيارات والخراطة العامة وكبس خراطيش الهيدروليك.