مذكرة محاضرات في التروس العدلة أو القائمة

(Lecture Notes in Spur Gears)

إعداد

دكتور/ أسامة محمد المرضي سليمان خيال

Dr. Osama Mohammed Elmardi Suleiman Khayal

قسم الهندسة الميكانيكية

كلية الهندسة والتقنية

جامعة وادي النيل

عطبرة – السودان

فبراير 2019م

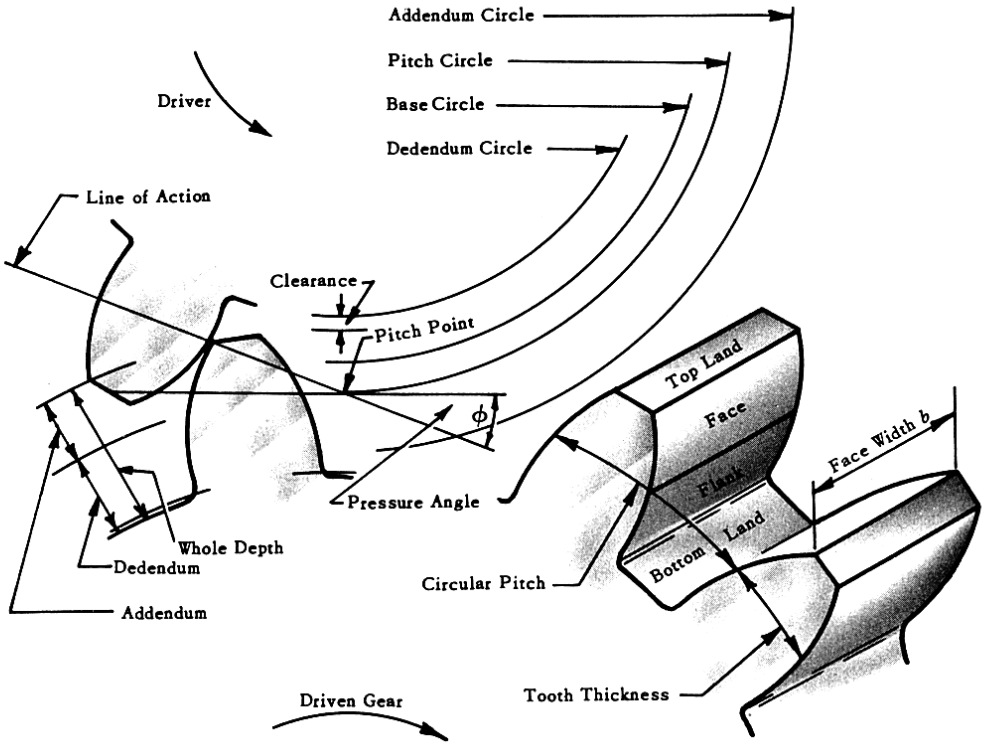
التروس العدلة

Spur Gears

تقوم التروس العدلة بنقل القدرة بين الأعمدة المتوازية بنسبة سرعة زاوية ثابتة. نسبة السرعة هي نفس التي يتم الحصول عليها بواسطة أسطوانتين يتم الضغط عليهما ويدوران بدون إنزلاق عند خط التلامس.

مصطلحات سنة الترس: (Gear Tooth Terminology)

الأجزاء الرئيسية لأسنان الترس يتم ترميزها كما موضَّح في الشكل (1) أدناه.



شكل (1)

تعريفات: (Definitions)

الخطوة الدائرية (Circular Pitch) P_c:- هي البعد من نقطة على أحد الأسنان إلي النقطة المناظرة على سنة مجاورة مقاسة على دائرة الخطوة.

$$P_c = \frac{\pi D}{N} = \frac{\text{محيط دائرة الخطوة}}{\text{عدد الأسنان}}$$

حيث D = قطر دائرة الخطوة، N = عدد الأسنان على الترس.

الموديول أو المقنِّن أو الوحدة (m) (Module):- هي قطر دائرة الخطوة بالـ mm مقسوماً على عدد الأسنان.

$$m = D / N$$

لاحظ أن $P_c / m = \pi$.

خط العمل (Line of Action):- هو خط متعامد مع زوج من الأسنان المعشقة عند نقطة تلامسهما.

زاوية الضغط (Pressure Angle) ϕ:- هي الزاوية المحصورة بين خط العمل والمماس المشترك لدوائر الخطوة.

نقطة الخطوة (Pitch Point):- هي نقطة التماس لدوائر الخطوة.

نسبة السرعة الزاوية (أو نسبة النقل):

{Angular velocity ratio (or transmission ratio)}

هي نسبة السرعة الزاوية للبنيون (الترس الصغير) إلي السرعة الزاوية للترس المعشق معه. وهي تتناسب عكسياً مع عدد الأسنان على الترسين، وللتروس العدلة يكون أيضاً متناسباً عكسياً لأقطار الخطوة.

$$\text{نسبة السرعة الزاويَّة} = \frac{N_g}{N_p} = \frac{D_g}{D_p}$$

مقاسات أسنان الترس المعيارية :-

PROPORTIONS OF STANDARD GEAR TEETH

	$14\frac{1}{2}°$ Composite	$14\frac{1}{2}°$ Full Depth Involute	20° Full Depth Involute	20° Stub Involute
Addendum	m	m	m	0.8m
Minimum dedendum	1.157m	1.157m	1.157m	m
Whole depth	2.157m	2.157m	2.157m	1.8m
Clearance	0.157m	0.157m	0.157m	0.2m

STANDARD MODULES. Standard modules taken from ISO/R54 are:
Preferred 1, 1.25, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 25, 32, 40, 50
Second Choice 1.125, 1.375, 1.75, 2.25, 2.75, 3.5, 4.5, 5.5, 7, 9, 11, 14, 18, 22, 28, 36, 45

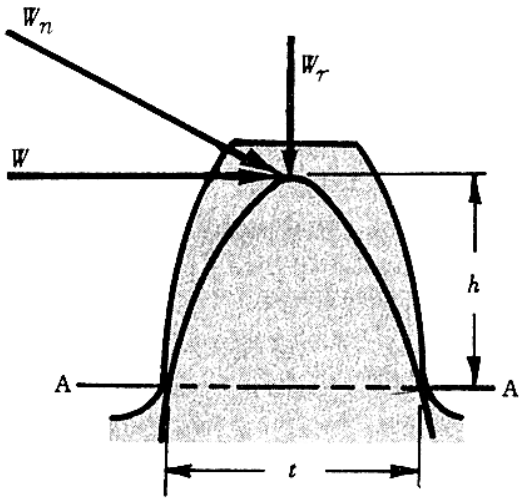
أهداف التصميم:- (Design Objectives)

يتضمَّن تصميم سنة الترس أساساً على تحديد الخطوة وعرض وجه الترس المناسبة لمتانة كافية، ديمومة في الاستخدام، وإقتصاد في التصنيع.

متانة أسنان الترس – معادلة لويس:-

(Strength of Gear Teeth – Lewis Equation)

عند بداية العمل بين زوج من أسنان الترس، فإن جانب السنة (flank) القائدة يلامس طرف السنة (tip) المنقادة. بتجاهل الاحتكاك، فإن الحمل الكلي W_n يكون متعامداً مع المقطع الجانبي للسنَّة ويفترض أن يكون الحمل محمولاً بهذه السنة الواحدة. W مكونة الحمل W_n المتعامد مع خط المنتصف للسنة تنتج إجهاداً للانحناء عند قاعدة السنَّة. يتم تجاهل المكوَّنة نصف القطرية W_r. القطع المكافئ (parabola) الموضَّح في الشكل (2) أدناه يؤطر لعارضة ذات متانة منتظمة. بالتالي فإن المقطع الأضعف لسنة الترس هو عند المقطع A – A حيث يكون القطع المكافئ مماساً لخط إطار السنة.



شكل (2)

يتم افتراض أن الحمل يكون موزَّعاً بإنتظام عبر وجه الترس.

إجهاد الانحناء الناتج S هو،

$$S = \frac{Mc}{I} = \frac{6M}{bt^2} = \frac{6Wh}{bt^2}$$

و $W = Sb\left(t^2/6h\right) = Sb\left(t^2/6hP_c\right)P_c$

حيث، $c = t/2,\ I = bt^3/12,\ and\ M = W\,h$

النسبة $t^2/6hP_c$ هي كمية لا بعدية تسمَّي بعامل الشكل y (form factor). عامل الشكل y هو دالة في شكل السنة، التي تعتمد أساساً على نظام السنة وعدد الأسنان على الترس.

للموائمة يتم تقريب W؛ بالقوة المنقولة F، التي يتم تعريفها بالعزم مقسوماً على نصف قطر الخطوة. عليه، عوِّض F بدلاً عن W و y بدلاً عن $t^2/6hP_c$، نحصل على الصورة المعتادة لمعادلة لويس،

$$F = S\,b\,P_c\,y$$

لشروط تصميم عادى، يكون عرض الوجه b محدوداً كحد أقصى بأربعة أضعاف الخطوة الدائرية.

إجعل $b = k\,P_c$، حيث $k \leq 4$

$$F = S P_c^2 k y = S \pi^2 k y m^2$$

في تصميم ترس للمتانة، يكون قطر الخطوة إما معلوماً أو غير معلوم. إذا كان قطر الخطوة معلوماً، فإن الشكل التالي لمعادلة لويس يمكن استخدامه،

$$\frac{1}{m^2 y} = S k \pi^2 / F$$

حيث:- S = الإجهاد المسموح به؛ k = 4، كحد أقصى؛ F = القوة المنقولة، $2M_t/D$. بالتالي فإن التعبير عاليه يعطي قيمة عددية مسموح بها للنسبة $\frac{1}{m^2 y}$ التي تسيطر على التصميم، بما أنها مؤسسة على إجهاد مسموح به.

إذا كان قطر الخطوة غير معلوم، يمكن استخدام الشكل التالي لمعادلة لويس:

$$S = \frac{2M_t}{m^3 k \pi^2 y N}$$

حيث:- S = الإجهاد ≥ الإجهاد المسموح به؛ M_t = عزم الالتواء على الترس الأضعف؛ k=4، الحد الأعلى؛ N = عدد الأسنان على الترس الأضعف. هذا التعبير يُعطي قيمة للإجهاد المنتج بدلالات الموديول. عدد الأسنان الأدنى، N، يكون عادة محدوداً بـ 15.

في كلا الحالتين أعلاه، فإن الموديول الأصغر الممكن سيعطي التصميم الاقتصادي الجيِّد. عموماً، حينما تكون الأقطار معلومة فإنَّ التصميم للعدد الأكبر للأسنان يكون ممكناً؛ وحينما تكون الأقطار غير معلومة، فإنَّ التصميم لأقطار الخطوة الأصغر يكون ممكناً.

إجهادات السنة المسموح بها:- (Allowable Tooth Stresses)

الإجهاد المسموح به لتصميم سنة الترس يعتمد على المادة المختارة وسرعة خط الخطوة. للتروس العدلة، تكون معادلة بارث (Barth's equation) في وحدات SI كالآتي،

$$allowableS = S_o\left(\frac{3}{3+V}\right) for\ V\ less than 10 m/s$$ ، الإجهاد المسموح به

$$= S_o\left(\frac{3}{6+V}\right) for\ V\ 10 to 20 m/s$$

$$= S_o\left(\frac{5.6}{5.6+\sqrt{V}}\right) for\ V\ \ greaterthan 20 m/s$$

حيث S_o هي متانة التحمل لتحميل معتق يتم تصحيحه لقيم إجهاد متوسطة لمادة الترس، P_a، و V هي سرعة خط الخطوة، m/s.

قيَّم S_o لمادة ترس متباينة يتم وضعها في شكل قوائم في نشرات اتحاد المصنعين الأمريكيين للتروس، وفي الدلائل الهندسية المختلفة (handbooks)، ومعظم كتب التصميم. قيم S_o للحديد الزهر والبرونز هي $55MN/m^2$ و$83MN/m^2$ على الترتيب. للفولاذ الكربوني تتراوح من حوالي 70 إلي $350MN/m^2$ معتمدة على المحتوى الكربوني ودرجة المعالجة الحرارية. عموماً، يمكن أخذ S_o تقريباً كـ ⅓ من المتانة القصوى للمادة.

التصميم القاعدي على الترس الأضعف:- (Base Design on Weaker Gear)

مقدار القوة التي يمكن نقلها إلي سنة ترس تكون دالة في حاصل ضرب S_oy كما موضَّح بمعادلة لويس. لترسين معشقين، فإن الأضعف سيمتلك قيمة S_oy الأصغر.

عندما يتم تصنيع الترسين المتزاوجين (المعشقين) من نفس المادة، فإن الترس الأصغر (البنيون) سيكون الأضعف وسيتحكم في التصميم.

أحمال السنة الديناميكية: (Dynamic Tooth Loads) – معادلة بكنجهام (Buckingham)

عدم الدقة للمقاطع الجانبية للسنة (tooth profile)، الفراغات، اللامحاذاة في التركيب، وإنحراف السنة تحت الحمل ينتج عنها تغييرات في السرعة والتي بدورها ينتج عنها قوى ديناميكية على الأسنان تكون أكبر من القوة المنقولة.

تكون معادلة بكنجهام كالأتي:-

$$F_d = \frac{21V(bc+F)}{21V+\sqrt{bc+F}}$$

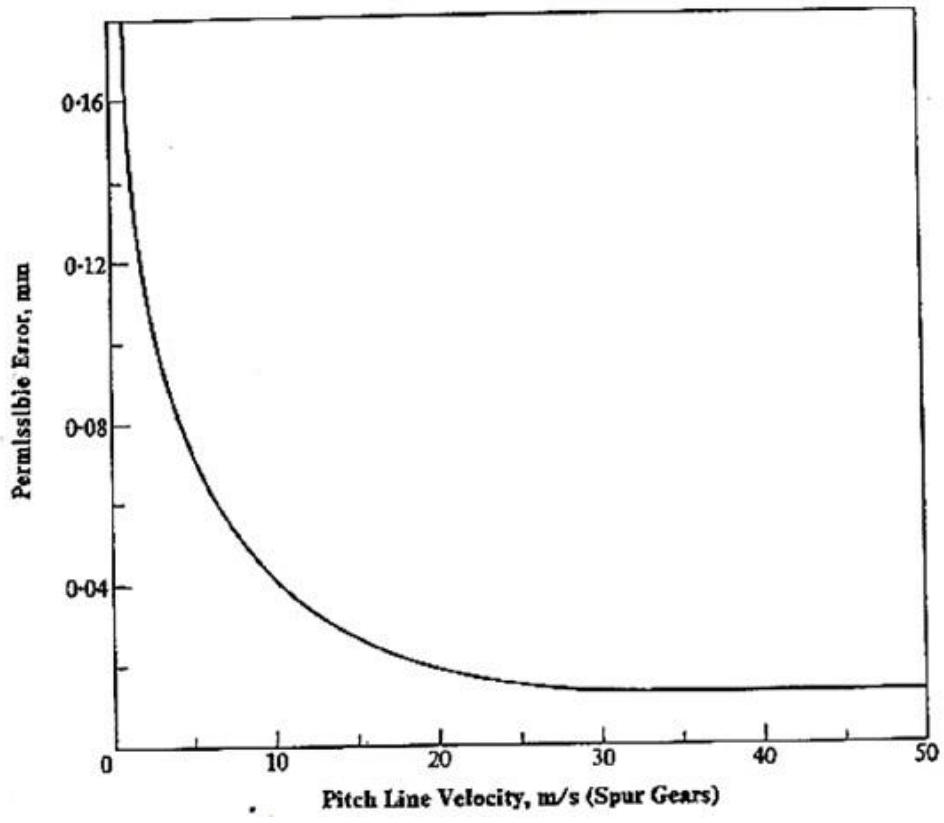
حيث، F_d = الحمل الديناميكي ، dynamic load, N

V = سرعة خط الخطوة، m/s

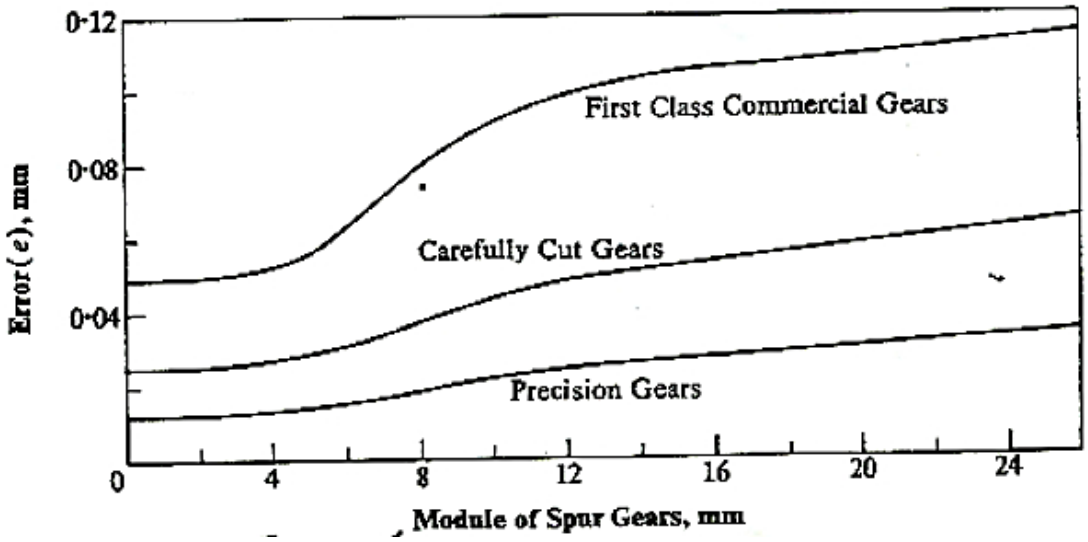
b = عرض الوجه، m

$$F = \frac{\text{عزم التـرس}}{\text{نصف قطر الخطوة للتـرس}} = 2M_t / D$$

c = ثابت بالـ N/m، يعتمد على شكل السنة، المادة، ودرجة الدقة التي يتم بها قطع السنة. بعض قيم c يتم جدولتها في الجدولII. المنحنيات التي توضِّح علاقة الأخطاء في المقاطع الجانبية للسنة ضد سرعة خط الخطوة والموديول يتم توضيحها في الأشكال (3) و(4) أدناه.



شكل (3)



شكل (4)

يجب أن تكون F_d أقلَّ من حمل التحمل المسموح به F_o، حيث $F_o = S_o\ b\ y\ P_c$. في هذه المعادلة، S_o تكون مؤسسة على متوسط قيم تركيز الإجهاد.

أحمال تآكل أو بلي السنة:- (Wear Tooth Loads) – معادلة بكنجهام

لضمان استدامة الاستخدام لزوج التروس، فإن الأشكال الجانبية للسنة يجب أن الاَّ تمتلك إجهاد تلامس زائد كما يحدده حمل البلي F_w،

$$F_w = D_p b K Q$$

حيث, D_p = قطر الخطوة للترس الأصغر (بنيون), m.

b = عرض وجه الترس , m.

K = عامل الإجهاد للكلال , N/m^2.

$Q = 2N_g/(N_p+N_g)$.

N_g = عدد الأسنان على الترس

N_p = عدد الأسنان على البنيون.

و $K = \dfrac{S_{es}^2 (\sin\phi)(1/E_p + 1/E_g)}{1.4}$

حيث،

S_{es} = حد التحمل السطحي لزوج التروس, N/m^2

E_p = معاير المرونة لمادة البنيون, N/m^2.

E_g = معاير المرونة لمادة الترس, N/m^2.

ϕ = زاوية الضغط.

يتم تحديد أو تقدير حد التحمل السطحي من المعادلة،

$$S_{es} = (2.75(BHN) - 70)MN/m^2$$

يمكن تقدير BHN برقم صلادة برينيل المتوسط للترس والبنيون حتى BHN حوالي 350 للفولاذ

حمل البلي F_w هو حمل مسموح به ويجب أن يكون أكبر من الحمل الديناميكي ، F_d.

قيم عديدة لـ K لمواد متباينة ولأشكال سنة متباينة يتم جدولتها في الجدول III.

TABLE I – Form Factors y – for use in Lewis strength equation.

Number of Teeth	$14\frac{1}{2}°$ Full-Depth Involute or Composite	20° Full-Depth Involute	20° Stub Involute
12	0.067	0.078	0.099
13	0.071	0.083	0.103
14	0.075	0.088	0.108
15	0.078	0.092	0.111
16	0.081	0.094	0.115
17	0.084	0.096	0.117
18	0.086	0.098	0.120
19	0.088	0.100	0.123
20	0.090	0.102	0.125
21	0.092	0.104	0.127
23	0.094	0.106	0.130
25	0.097	0.108	0.133
27	0.099	0.111	0.136
30	0.101	0.114	0.139
34	0.104	0.118	0.142
38	0.106	0.122	0.145
43	0.108	0.126	0.147
50	0.110	0.130	0.151
60	0.113	0.134	0.154
75	0.115	0.138	0.158
100	0.117	0.142	0.161
150	0.119	0.146	0.165
300	0.122	0.150	0.170
Rack	0.124	0.154	0.175

TABLE II – Values of Deformation Factor C in kN/m – for dynamic load check

Materials		Involute tooth form	Tooth Error – mm				
Pinion	Gear		0.01	0.02	0.04	0.06	0.08
cast iron	cast iron	$14\frac{1}{2}°$	55	110	220	330	440
steel	cast iron	$14\frac{1}{2}°$	76	152	304	456	608
steel	steel	$14\frac{1}{2}°$	110	220	440	660	880
cast iron	cast iron	20° full depth	57	114	228	342	456
steel	cast iron	20° full depth	79	158	316	474	632
steel	steel	20° full depth	114	228	456	684	912
cast iron	cast iron	20° stub	59	118	236	354	472
steel	cast iron	20° stub	81	162	324	486	648
steel	steel	20° stub	119	238	476	714	952

TABLE III

Values for s_{es} as used in the wear load equation depend upon a combination of the gear and pinion materials. Some values for various materials for both s_{es} and K are tabulated.

Average Brinell Hardness Number of steel pinion and steel gear		Surface Endurance Limit s_{es}(MN/m^2)	Stress Fatigue Factor K(kN/m^2)	
			$14\frac{1}{2}°$	20°
150		342	205	282
200		480	405	555
250		618	673	919
300		755	1004	1372
400		1030	1869	2553
Brinnel Hardness Number, BHN				
Steel pinion	Gear			
150	C.I.	342	303	414
200	C.I.	480	600	820
250	C.I.	618	1000	1310
150	Phosphor Bronze	342	317	427
200	Phosphor Bronze	445	503	689
C.I. Pinion	C.I. Gear	549	1050	1420
C.I. Pinion	C.I. Gear	618	1330	1960

مسائل محلولة:-

1/ زوج من التروس العدلة المعشَّقة لها أسنان بعمق كامل $14\frac{1}{2}°$ بموديول 10. قطر دائرة الخطوة للترس الأصغر 160mm. إذا كانت نسبة النقل 3:2 أحسب:-

a/ عدد الأسنان لكل ترس؛ b/ الإرتفاع العلوى (addendum)؛ k العمق الكلى؛ c/ العمق الكامل؛ d/ الخلوص؛ e/ الأقطار الخارجية؛ f/ أقطار الجذر؛ g/ جذر السنة (dedendum)؛ h/ أقطار دائرة الأساس، و (i) فحص التداخل (check for interference).

الحل:

(a) $D_p = \underline{160}\text{mm}$ ، $D_g = 160 \times \frac{3}{2} = \underline{240} mm$

المودیول , $m = \frac{D}{N}$; $m = \frac{D_p}{N_p} = \frac{D_g}{N_g} = 10$

$$m = \frac{D_p}{N_p} \quad \therefore N_p = \frac{D_p}{m} = \frac{160}{10} = \underline{\underline{16}} teeth$$

$$\because \frac{D_g}{D_p} = \frac{3}{2} \qquad \therefore N_g = 16 \times \frac{3}{2} = \underline{\underline{24}} teeth$$

b/ الارتفاع العلوى، addendum،

$$\text{addendum} = \text{m} = \underline{\underline{10}}\,\text{mm}$$

c/ العمق الكامل،

$whole\ depth = 2.157(m) = 2.157 \times 10 = \underline{\underline{21.57}}\, mm$ (من الجداول)

d/ الخلوص،

$$clearance = 0.157(m) = 0.157 \times 10 = \underline{\underline{1.57}} mm$$

/e outside diameter = pitch diameter + 2 ×addendum

outside diameter of pinion= 160 + 2 ×10 = $\underline{\underline{180}}$ mm

outside diameter of gear = 240 + 2 ×10 = $\underline{\underline{260}}$ mm

/f Root diameter = outside diameter – 2 × whole depth

Root diameter of pinion = 180 – 2 × 21.57 = $\underline{\underline{136.86}}$ mm

Root diameter of gear = 260 – 2 × 21.57 = $\underline{\underline{216.86}}$ mm

g/ جذر السنَّة،

$$\text{dedendum} = 1.157\,(m) = 1.157 \times 10 = \underline{11.57}\ \text{mm}$$

h/ نصف قطر دائرة الأساس = نصف قطر دائرة الخطوة × $\cos 14\frac{1}{2}°$

$$\text{Radius of base circle} = \text{pitch radius} \times \cos 14\tfrac{1}{2}°$$

D_b = $\underline{154.90}$mm قطر دائرة الأساس, $\therefore R_b(160/2)\cos 14.5° = \underline{77.45}mm$ للبنيون

D_b = $\underline{232.36}$mm قطر دائرة الأساس, $\therefore R_b(240/2)\cos 14.5° = \underline{116.18}mm$ للترس

i/ يتم تفادي التداخل إذا كان نصف قطر الارتفاع العلوى للترس ،

$$\text{addendum radius} \le \sqrt{(\text{base circle radius})^2 + (\text{center distance})^2(\sin\phi)^2}$$

$$= \sqrt{(116.18)^2 + \left[\tfrac{1}{2}(160+240)\right]^2(\sin 14.5°)^2}$$

$$= \underline{126.51}\ \text{mm}$$

بما أنَّ نصف قطر الارتفاع العلوى للترس $\underline{130}mm = \frac{260}{2}$ فسيكون هنالك تداخلاً وبالتالي يجب عمل بعض التعديلات في التصميم. تخفيض الموديول إلي 8 وزيادة قطر دائرة الخطوة للبنيون إلي 192 سيكون بالكاد كافياً لتفادي التداخل.

2/ بنيون عدل من البرونز ($S_o = 83MN/m^2$) يدور بسرعة 600rev/min ويُدير ترس عدل من الفولاذ السبائكي ($S_o = 103MN/m^2$) بنسبة نقل القدرة 4:1. للبنبون 16 سنة بالمواصفات التالية: زاوية ضغط 20° عمق كامل التفافي (full depth involute) بموديول 8. عرض الوجه لكلا الترسين هو 90mm. ما هي القدرة التي يمكن نقلها من وجهة نظر المتانة.

الحل:

من الضروري أولاً تحديد أيهما أضعف الترس أم البنيون.

	Number of teeth	s_o	Form factor y	$s_o y$
Pinion	16	83×10^6	0.094	7.8×10^6
Gear	64	103×10^6	0.135	13.9×10^6

بما أنَّ سعة حمل الحمولة للسنة هي دالة في حاصل الضرب S_o y، فإن البنيون يعتبر الأضعف.

سرعة خط الخطوة (pitch line velocity) يتم تحديدها تالياً لكى يتم اختيار عامل السرعة الصحيح المطلوب لحساب الإجهاد المسموح به :

$$V = \left(\frac{600\times 2\pi}{60}\right)\left(\frac{1}{2}\times\frac{16\times 8}{1000}\right) = \underline{\underline{4.02}} m/s$$

حيث $V = \omega r = \omega\frac{D}{2}, D = m\,N$

$$\therefore V = \omega\left(\frac{1}{2} m\,N\right)$$

بما أنَّ V تكون أقلَّ من 10mm/s،

$$allowable S_o = S_o\left(\frac{3}{3+V}\right) = 83\times 10^6\left(\frac{3}{3+4.02}\right) = \underline{35.5}\,\mathrm{MN/m^2}$$

بالتالي، فإنَّ مقدار القوة التي يمكن نقلها طبقاً لمعادلة لويس هي ،

$$F = S\,b\,y\,P_c = (35.5\times 10^6)(0.09)(0.094)(\pi\times 8/1000) = \underline{7.54} kN$$

القدرة التي يمكن نقلها،

$$power, P = FV = 7542\times 4.02 = \underline{\underline{30.3}} kW$$

3/ بنيون عدل من الفولاذ السبائكي (S_o = 140MN/m^2) يُدير ترساً عدلاً من الحديد الزهر (S_o = 55MN/m^2). تكون نسبة النقل مساوية لـ $1:2\frac{1}{3}$. يكون قطر البنيون مساوياً لـ 105mm ويتم نقل 20kW بسرعة مقدارها 900rev/min للبنيون. تكون الأسنان بالمواصفات التالية:- زاوية الضغط 20° لعمق كامل لشكل التفافي (full depth involute form). صمِّم للعدد الأكبر من الأسنان. حدِّد الموديول الضروري وعرض الوجه للترسان للمتانة فقط.

الحل:-

في البداية حدِّد الترس الأضعف المحتمل من الترسين بافتراض مجموعة اعتباطية من أسنان التروس مثل 30 و70 التي تحقِّق النسبة $2\frac{1}{3}:1$.

من بعد للبنيون: $S_o y = 140\times10^6 \times 0.114 = 15.96\times10^6$

و للترس: $S_o y = 55\times10^6 \times 0.137 = 7.54\times10^6$

يكون الترس هو الأضعف المحتمل بما أنَّ $7.54\times10^6 < 15.9\times10^6$

$D_p = 105mm,\ D_g = 105\times7/3 = 245mm$

بما أنَّ الأقطار معلومة إستخدم الشكل التالي لمعادلة لويس :-

$$\frac{1}{m^2 y} = Sk\pi^2 / F$$

العزم المنقول بواسطة البنيون $M_t = \frac{20{,}000\times60}{900\times2\pi} = \underline{212} N.m$,

القوة المنقولة $F = \frac{M_t}{r} = \frac{212}{0.0525} = \underline{4040} N$,

سرعة خط الخطوة $V = r\omega = 0.0525(900\times2\pi/60) = \underline{4.95} m/s$,

بما أنَّ V < 10،

الإجهاد المسموح به $S\,(allowable) = 55\times10^6\left(\frac{3}{3+4.95}\right) = \underline{20.8}\, MN/m^2$ ،

$1/m^2 y = 20.8\times10^6\,(4)\pi^2/4040 = \underline{203\times10^3}\ allowable$

افترض $y \approx 0.1$ ، $m = 7.02$ ، حاول $m = 7$: بالتالي

$\frac{1}{m^2 y} = 171.5\times10^3$; (من الجداول) $y = 0.119$ ، $N_g = \frac{D_g}{m} = \frac{245}{7} = \underline{35}\ teeth$

يكون الترس قوياً.

الموديول 6، 8 أو 9 لا يمكن استخدامها نتيجة لنسبة السرعة المطلوبة. الموديول 5 سيعطي ترساً ضعيفاً جداً. بالتالي خفض قيمة k إلي $k = 4(171.5)/(202.8) = 3.383$

بالتالي، $b = 3.383 \times 7\pi = \underline{74.4} mm$

استخدم $N_g = 35$ ،$N_p = 15$ ،$m = 7$ ،$b = \underline{75}mm$

فحص نهائي لتحديد الأضعف من الترسين مؤسساً على عدد الأسنان المختارة :

البنيون: $S_o y = 140 \times 10^6 \times 0.092 = \underline{12.88 \times 10^6}$

الترس: (الأضعف) $S_o y = 55 \times 10^6 \times 0.119 = \underline{6.545 \times 10^6}$

4/ ترس عدل من البرونز ($S_o = 83MN/m^2$) يُدير بنيون من الفولاذ الطري ($S_o =$ $103MN/m^2$). تكون نسبة السرعة الزاوية مساوية لـ $3\frac{1}{2}$. تكون زاوية الضغط مساوية لـ $14\frac{1}{2}°$. حدَّد التروس ذات القطر الأصغر التي يمكن استخدامها وعرض الوجه الضروري لنقل 5kW عند سرعة 1800rev/min للبنيون. صمَّم للمتانة فقط. لا يتم استخدام عدد من الأسنان أقل من 15 على كلا الترسين.

الحل:-

عدد أسنان ترس البنيون $N_p = \underline{16}teeth$ نسبة السرعة الزاوية = $3\frac{1}{2}$.

بالتالي، $N_g = 16 \times (3\frac{1}{2}) = \underline{56} teeth$

للترس: $S_o y = 83 \times 10^6 (0.112) = \underline{9.30 \times 10^6}$

للبنيون: $S_o y = 103 \times 10^6 (0.081) = \underline{8.34 \times 10^6}$

بالتالي فإنَّ البنيون هو الأضعف.

العزم , $M_t = \dfrac{5{,}000 \times 60}{1800 \times 2\pi} = \underline{26.5} N.m$

بما أنَّ الأقطار غير معلومة، يكون الإجهاد الناتج،

$$S = 2M_t / m^3 k \pi^2 y N = 2 \times 26.5 / m^3 \times 4\pi^2 (0.081) 16 = 1.037 / m^3$$

افترض إجهاد مسموح به،

$$S \approx \frac{1}{2}S_o = \frac{1}{2}\left(103\times10^6\right) = \underline{51.5}MN/m^2$$

يسمح هذا الافتراض بتحديد موديول تقريبي. بالتالي،

$$m^3 = 1.037/51.5\times10^6 \text{ ؛ } \therefore m = \underline{2.72}mm$$

حاول، m = 2.5، بالتالي ،

$$V = 0.02\left(\frac{1800\times2\pi}{60}\right) = \underline{3.77}m/s \text{ ، } D_p = 16\times2.5 = \underline{40}mm$$

(أو S المنتجة) induced S؛

$$allowable\ S = 103\times10^6\left(\frac{3}{3+3.77}\right) = \underline{57.4}\,MN/m^2$$

$$\text{المنتجة } S = 1.037/(0.0025)^3 = \underline{66.4}MN/m^2$$

يكون البنيون ضعيف بما أن 66.4 > 57.4

حاول سنَّة أقوى، m = 3: بالتالي $D_p = 16\times3 = 48mm$،

$$V = 0.024\left(\frac{1800\times2\pi}{60}\right) = \underline{4.52}m/s$$

$$allowable\ S = 103\times10^6\left(\frac{3}{3+4.52}\right) = \underline{41.1}MN/m^2$$

والإجهاد المنتج،

Induced S = 1.037 / $(0.003)^3$ = $\underline{38.4}$ MN/m^2 والآن، يكون البنيون قوياً .

بالتالي، خفض k إلي $\underline{3.74}$=(38.4/41.1)4؛ بالتالي فإنَّ عرض الوجه b،

$$b = m\,k\,\pi = 3\times3.74\pi = \underline{35.2}mm$$

استخدم $\underline{3}$ = m ، $\underline{35}$mm = b، $\underline{48}$ mm = D_p، $D_g = 48 \times 3.5 = \underline{168}$mm

5/ بنيون من الفولاذ السبائكي ($S_o = 103MN/m^2$) يدور بسرعة 900rev/min ويقوم بإدارة ترس من الحديد الزهر ($S_o = 55MN/m^2$) بسرعة 144rev/min. للأسنان زاوية ضغط مقدارها 20° (stub involute profiles) والقدرة القصوى التي يتم نقلها هي 25kW. حدَّد الموديول

المناسب، عدد الأسنان، وعرض الوجه لهذه التروس من وجهة نظر المتانة، الحمل الديناميكي، والبلي. يتم تصليد سطح البنيون إلي BHN 250.

الحل:-

أقطار التروس غير معلومة، سيتم افتراض عدد أسنان التروس، باختيار عدد أسنان لا تقل عن 15 للبنيون. لاحظ أنَّ العدد الأدنى للأسنان التي يمكن أن يمتلكها البنيون هو 16 حتى يتم تحقيق نسبة النقل المطلوبة؛ ستكون عدد أسنان الترس $16(900/144) = \underline{100}$ teeth.

للبنيون: $S_o y = 103\times10^6(0.115) = \underline{11.85\times10^6} MN/m^2$

للترس: $S_o y = 55\times10^6(0.161) = \underline{8.86\times10^6} MN/m^2$

يكون الترس هو الأضعف بما أنَّ $8.86<11.85$. بما أنَّ الأقطار غير معلومة، فإن شكل أو صورة معادلة لويس بدلالات العزم سيتم استخدامها وسيكون التصميم مؤسساً على الترس.

$$M_t = \frac{25{,}000\times60}{144\times2\pi} = \underline{1658} N$$

لمحاولة التصميم الأولي، دائماً إجعل k=4. بالتالي فإنَّ الإجهاد المنتج هو ،

$$S = 2M_t/m^3 k\pi^2 y N_g = 2\times1658/m^3 4\pi^2(0.161)(100) = \underline{5.217/m^3}$$

افترض إجهاد مسموح به،

$$S(allowable) = S = \tfrac{1}{2}S_o = \tfrac{1}{2}(55) = \underline{27.5} MN/m^2$$

بالتالي $m^3 = \frac{5.217}{27.5\times10^6}$, $\therefore \; m = 5.75$. من وجهة نظر الاقتصاد، من الأفضل (من المرغوب فيه) استخدم الموديول الأصغر الممكن؛ بالتالي سنجرب 6 ومن المحتمل 5.

لـ $\underline{6} = m$ ، $D_g = 100 \times 6 = \underline{600}$mm ، $V = 0.3\left(\frac{144\times2\pi}{60}\right) = \underline{4.524} m/s$

الإجهاد المسموح به ، $S(allowable) = 55\times10^6\left(\frac{3}{3+4.524}\right) = \underline{21.93} MN/m^2$

والإجهاد المنتج، $S(induced) = 5.217/(0.006)^3 = \underline{24.15} MN/m^2$. يكون الترس ضعيفاً جداً بما أنَّ $21.93 < 24.15$. بالتالي سنحاول السنة المعيارية التالية بموديول مقداره 7. بالمواكبة كما في سابقه، $D_g = \underline{700} mm,\ m = \underline{7}$ ، V = $\underline{5.278}$m/s ،

S(induced) = 15.2MN/m^2 ،S (allowable) = 19.93MN/m^2.

عليه لـ m=7 سيكون الترس أقوى من الضروري. بتخفيض k إلي

4(15.21)/(19.93)=3.053. عرض الوجه المطلوب،

$$b = kP_c = 7(3.053)\pi = 67.13mm$$

بالتالي من وجهة نظر المتانة، استخدم m = 7، b = 68mm.

من بعد افحص التصميم البديل (tentative design) من وجهة نظر الحمل الديناميكي (dynamic load) وتأثيرات البلي (wear effects). حمل التحمل (endurance load) F_o وحمل البلي F_w هي قيم ذات سماحية.

$$F_o = S_o b y P_c = 55\times10^6 (0.068)(0.161)(0.007\pi) = \underline{13.24} kN$$

$$F_w = D_p b K Q = (0.122)(0.068)(1310\times10^3)(1.724) = \underline{17.20} kN$$

حيث، $D_p = 700(144/900) = \underline{112} mm$ ، K = 1310kN/m^2 from table III،

$$Q = 2N_g/(N_g + N_p) = 2(100)/(100+10) = \underline{1.724}$$

F_o وF_w يجب أن تكون كُلٍ منهما أكبر من F_d.

$$F_d = \frac{21V(bc + F)}{21V + \sqrt{bc + F}} + F$$

حيث، V = $\underline{5.28}$m/s، b = 68mm ، $F = M_t/(\frac{1}{2}D) = 1658/0.350 = \underline{4737} N$

من منحني سرعة خط الخطوة ضد الخطأ المسموح به، نجد أنَّه ولـ V=5.28m/s يمكن السماح بخطأ مقداره 0.08mm من وجهة نظر الضجيج. بالرجوع للشكل الذي يوضح موديول التروس العدلة من الخطأ، جرِّب ترساً تجارياً من الدرجة الأولي (first class commercial gear)

بخطأ مقداره 0.07mm لـ m=7. بالتالي من الجدول II، c=590kN/m، بتعويض القيَّم في المعادلة عاليه، i.e. F_d = 20.15kN عليه سيكون التصميم غير مقنع لكلٍ من وجهتي نظر استدامة الاستخدام أو البلي ومن وجهة نظر المتانة.

بالتالي يجب اختيار ترس يتم قطعه بعناية، قل بخطأ مقداره 0.035mm كما موضَّح في الشكل (3)؛ هذا يُعطي c قيمة مقدارها 283kN/m. بإعادة حساب F_d لـ c =283، سنجد F_d = 14.74kN. الآن F_w=17.20<14.74 و $F_o = 13.24 \neq 14.74$ (في حدود10%) وسيكون التصميم مقنعاً بدون الرجوع لقطع دقيق للترس.

6/ بنيون من الفولاذ بقطر 80mm (S_o=140MN/m^2) يُدير ترساً من الحديد الرمادي (Gray Iron) بقطر 240mm (S_o=85MN/m^2). يشتغل البنيون بسرعة 1200rev.min وينقل قدرة مقدارها 5kW. تكون الأسنان 20°stub. حدِّد العدد الأكبر من الأسنان (الذي يعطي تشغيلاً ناعماً وخراطة أرخص) وعرض الوجه الضروري. أسَّس التصميم على معادلة لويس للمتانة. سيتم اتباع الحل بحل بديل.

الحل:

بدون معرفة أيهما الأضعف، سنصمِّم للترس ونعمل فحصاً أخيراً لمعرفة ما إذا كان الترس هو الأضعف بعد تأسيس الحل. سنقوم بمقارنة حمل التحمل المسموح به المؤسس على معادلة لويس بالحمل الديناميكي الفعلي التقريبي باستخدام عامل السرعة لبارث (Barth velocity factor).

قارن الحمل المسموح به F_o،

$$F_o = S_o b \pi y m = 85\times10^6 (4\pi m) y m \pi = \underline{3.355\times10^9 y m^2}$$

بالحمل الفعلي التقريبي،

$$F_d = \frac{F}{\text{عامل السرعة}} = \frac{995}{3/(3+5.03)} = \underline{2663N}$$

إذا تم تقريب y بحوالي 0.1،

$$m = \sqrt{2663/(0.1)(3.355\times10^{9})} = \underline{2.817}mm$$

جرِّب m=2.5 : N_g = 96، y = 0.161،

$$F_o = 3.355\times10^{6}(0.161)(0.0025)^2 = \underline{3376}N \text{ (قوى جداً)}$$

جرِّب ترساً أضعف، m=2، N_g=120، y=0.162، و F_o=2174N (ضعيف جداً)

باستخدام خيار ثانٍ، m=2.25 يكون غير ممكناً بما أنَّه لا يمكن تحقيق نسبة الترس. عليه يجب استخدام m=2.5 معطياً F_o = 3376N، بالتالي افحص،

$$S_oy \text{ (للبنيون)} = 140\times10^{6}(0.148) = \underline{20.72\times10^{6}}$$

$$S_oy \text{(للترس)} = 85\times10^{6}(0.162) = \underline{13.77\times10^{6}}$$

(أضعف كما تم افتراضه ابتدائياً).

خفِّض k إلي $\underline{3.155}$=4(2663)/(3376)

$$\therefore b = 3.155\pi(2.5) = \underline{24.78}mm$$

استخدم b = $\underline{25}$ mm

7/ هنالك تطبيقاً بديلاً لمعادلات التصميم سيتم استخدامه لحل المسألة (4).

الحل:

العدد الأدنى من الأسنان على البنيون = $\underline{16}$ لنسبة سرعة $3\frac{1}{2}$.

ستكون بالتالي عدد أسنان الترس $16\times3\frac{1}{2} = \underline{56}teeth$.

إفحص أيهما الأضعف في الترسان:-

للترس: $S_oy = 83\times10^{6}(0.112) = \underline{9.30\times10^{6}}$

للبنيون: $S_oy = 103\times10^{6}(0.81) = \underline{8.34\times10^{6}}$ $(wea\,\ker)$

$$\text{العزم على البنيون} = \frac{5{,}000\times60}{1800\times2\pi} = \underline{26.53}N/m$$

يمكن التعبير عن معادلة لويس بدلالات العزم،

$$F\,R = S\,b\,\pi\,y\,R\,m == M_t$$

العزم المسموح به، باستخدام متانة التحمل هو،

$$M_o = S_o b\,\pi y\,R\,m = \frac{S_o\,b\,\pi y\,N_p m^2}{2}$$

$$= 103\times10^6\,(4\pi m)\pi(0.081)(16)\frac{m^2}{2} = \underline{2.635\times10^9\,m^3}$$

العزم الديناميكي الفعلي،

$$M_d = \frac{FR}{\text{عامل السرعة}} = \frac{M_1}{\text{عامل السرعة}} = \frac{26.63}{\text{عامل السرعة}}$$

إذا تم تقريب عامل السرعة لـ ½، بالتالي،

$$2.635\times10^9\,m^3 = \frac{26.53}{1/2},\ m = \underline{2.72}mm$$

جرِّب m=2.5: $D_p=16\times2.5=40mm$، $V = 0.02\left(\frac{1800\times2\pi}{60}\right) = 3.77m/s$

بالتالي،

$$M_o = 2.635\times10^9\,(0.0025)^3 = \underline{41.17}N.m$$

و $M_d = \frac{26.53}{3/(3+3.77)} = \underline{59.87}N$

والتي تشير إلي أنَّ m=2.5 ضعيفة.

جرِّب m=3: $D_p=16\times3=48mm$، $V = 0.024\left(\frac{1800\times2\pi}{60}\right) = 4.52m/s$

بالتالي،

$$M_o = 2.635\times10^9\,(0.003)^3 = \underline{71.15}N.m$$

و $M_d = \frac{26.53}{3/(3+4.52)} = \underline{66.50}N$

والتي تشير إلي أنَّ m=3 قوية.

خفِّض k إلي $4\left(\frac{66.50}{71.15}\right)=3.74$ ،

$$\therefore b = k\,\pi\, m = 3.74\times\pi\times 3 = \underline{\underline{35.23}}mm$$

استخدم $b = \underline{\underline{35.23}}mm$

مسائل إضافية (Supplementary Problems)

1. A spur steel pinion (S_o = 200MN/m^2) is to drive a spur steel gear (S_o=140MN/m^2). The diameter of the pinion is to be 100mm and the center distance 200mm. The pinion is to transmit 5kW at 900 rev/min. The teeth are to be 20° full depth. Determine the necessary module and width of face to give the greatest number of teeth. Design for strength only, using the Lewis equation.

Ans. {m = 2mm, b = 21.2mm (use 22mm)}

2. Two spur gears are to be used for a rock crusher drive and are to be of minimum size. The gears are to be designed for the following requirements: power to be transmitted 18kW, speed of pinion 1200 rev/min, angular velocity ratio 3.5 to 1, tooth profile 20° stub, S_o value for pinion 100MN/m^2, S_o value for gear 70MN/m^2. Determine the necessary face width and module for strength requirements only, using the Lewis equation.

Ans. {m = 5, b=57mm}

3. A pair of spur gears transmitting power from a motor to a pump impeller shaft is to be designed with as small a center distance as possible. The forged steel pinion (S_o=160MN/m^2) is to transmit 4kW at 600rev/min to a cast steel gear (S_o=100MN/m^2) with transmission ratio $4\frac{1}{2}$ to 1, and 20°

full depth involute teeth are to be used. Determine the necessary face width and module for strength only, using the Lewis equation.

Ans. {m = 3mm, b = 30.9mm (use 31mm)}

4. A pair of spur gears for a crane hoist drive is to be made to the following specifications: 20° full depth teeth; S_o pinion = 80MN/m^2, S_o gear = 55MN/m^2, Np = 20 teeth, N_g= 80 teeth. The pinion is to transmit 5kW at 200rev/min.

(a) What standard module and width of face will satisfy these conditions with a minimum center distance? Use the Lewis equation.

(b) If the dynamic load for this pair is computed to be 3.8kN, determine whether or not the design is safe from the standpoint of strength.

(c) Check the design for wear or surface fatigue if the fatigue constant K =1350kN/m^2.

Ans. {(a) m=5, b=53.6mm (use 54mm).

(b) F_o, = 6485N (satisfactory).

(c) F_w = 11.660N (satisfactory)}

5. A cast steel 24 tooth spur pinion operating at 1150 rpm transmits 3kW to a cast steel 56 tooth spur gear. The gears have the following specifications: module of 3, S_o value of 100MN/m^2, face width of 35mm, $14\frac{1}{2}°$ tooth profile, C factor of 350kN/m for dynamic load, K factor of 280kN/m^2 for wear load. Determine (a) induced stress in weaker gear, (b) dynamic load, (c) wear load. (d) allowable static load.

Ans. {22.0MN/m^2, 6445N, 988N, 3150N}

Unsatisfactory from the standpoint of wear and dynamics effects.

6. In the layout of the drive for a packaging machine, a pair of 20° full

depth spur gears is to transmit $3\frac{1}{2}$kW at a transmission ratio of 2.5 to 1. The pinion operates at 1200 rpm. For initial design, a forged steel pinion (S_o=100MN/m^2) and a semi-steel gear(S_o=60MN/m^2) have been selected. The gears are to be carefully cut and from data tables the C factor for dynamic load is 160kN/m and the *K* factor for wear is 1100kN/m^2.

(a) Determine diameters, face width and tooth numbers for minimum size gears of adequate strength, using the Lewis equation.

(b) Solve for dynamic and wear loads, stating whether the gears are satisfactory or not.

(c) If the gears are not satisfactory from the standpoint of wear and strength, state what changes should be made.

Ans. {(a) D_p=48mm, D_g=120mm, b =32.2 (say 34mm), N_p=16, N_g=40.

(b) F_d = 4105N, F_w = 2565N, F_o = 2348N.

(d) The gears are not satisfactory from the standpoint of strength and wear because F_d is greater than the allowable values F_o and F_w. One or more of the following changes would be required: decrease the tooth error, decrease the module, increase the face width, or case harden}

نبذة عن المؤلف:

أسامة محمد المرضي سليمان وُلِدَ بمدينة عطبرة بالسودان في العام 1966م. حاز على دبلوم هندسة ميكانيكية من كلية الهندسة الميكانيكية – عطبرة في العام 1990م. تحصَّل أيضاً على درجة البكالوريوس في الهندسة الميكانيكية من جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا – الخرطوم في العام 1998م ، كما حاز على درجة الماجستير في تخصص ميكانيكا المواد من جامعة وادي النيل – عطبرة في العام 2003م ودرجة الدكتوراه من جامعة وادي النيل في العام 2017م. قام بالتدريس في العديد من الجامعات داخل السودان، بالإضافة لتأليفه لأكثر من ثلاثين كتاباً باللغة العربية ولعشرة كتب باللغة الإنجليزية بالإضافة لخمسين ورقة علمية منشورة في دور نشر ومجلات عالمية إلى جانب إشرافه على أكثر من ثلاثمائة بحث تخرج لكل من طلاب الماجستير، الدبلوم العالي، البكالوريوس، والدبلوم العام. يشغِل الآن وظيفة أستاذ مساعد بقسم الميكانيكا بكلية الهندسة والتقنية – جامعة وادي النيل. بالإضافة لعمله كاستشاري لبعض الورش الهندسية بالمنطقة الصناعية عطبرة. هذا بجانب عمله كمدير فني لمجموعة ورش الكمالي الهندسية لخراطة أعمدة المرافق واسطوانات السيارات والخراطة العامة وكبس خراطيش الهيدروليك.