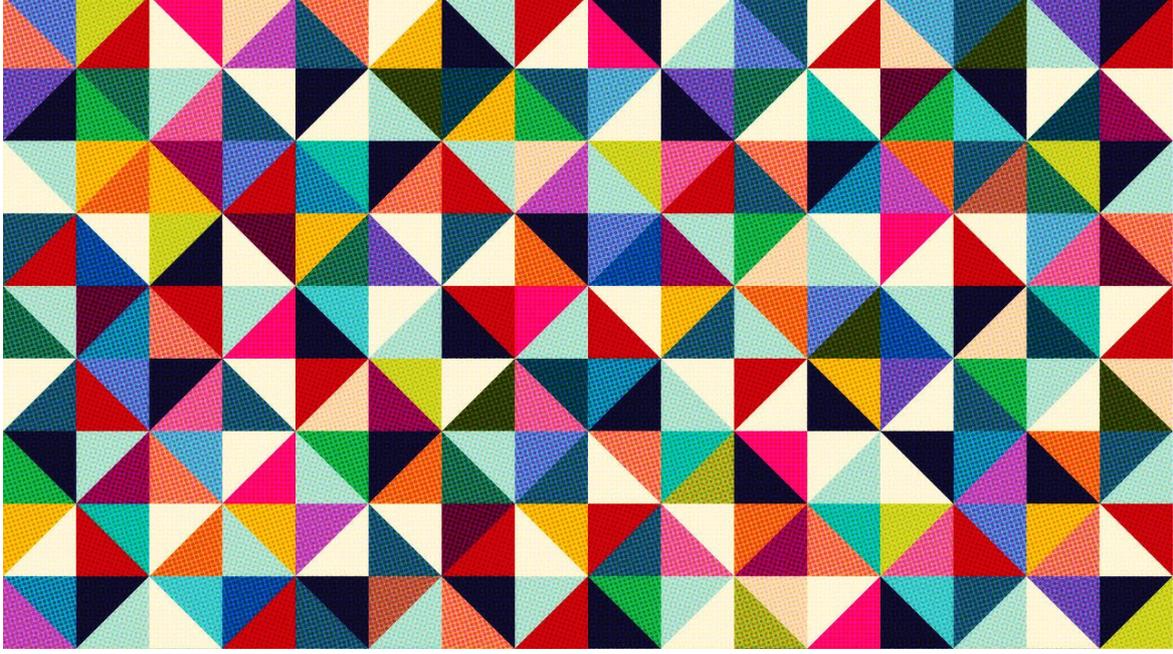


مذكرة محاضرات ميكانيكا المواد

الجزء الثالث

## Lecture Notes on Mechanics of Materials Part Three



تأليف

بروفيسور / محمود يس عثمان

دكتور / أسامة محمد المرضي سليمان خيال

قسم الهندسة الميكانيكية

كلية الهندسة والتقنية

جامعة وادي النيل

عظبرة - السودان

إبريل 2019م

## شكر وعرّفان

الشكر والعرّفان لله والتبريكات والصلوات على رسوله وخادمه محمد وعلى آله وصحابته وجميع من تبعه وتَقَى أثره إلى يوم القيامة.

يود الكاتب ان يتقدم بالشكر أجذله لكل من ساهم بجهد وفكره ووقته في إخراج هذه المذكرة بالصورة المطلوبة ، ويخص بذلك الزملاء/ الأساتذة بقسم الهندسة الميكانيكية بجامعة وادي النيل .  
عطبرة ، وأيضاً الإخوة/ الأساتذة بقسم الهندسة الميكانيكية بجامعة البحر الأحمر . بورتسودان.

الشكر والتقدير والعرّفان للبروفيسور/ محمود يس عثمان الذي ساهم بقدر كبير في مراجعة وإعادة مراجعة محتويات المذكرة.

اهدي هذه المذكرة بصفة أساسية لطلاب دبلوم وبيكالوريوس الهندسة في جميع التخصصات خاصة طلاب قسم الهندسة الميكانيكية ، حيث تستعرض هذه المذكرة الكثير من التطبيقات في مجال الهندسة الميكانيكية وبالأخص في مجال ميكانيكا المواد.

وأعبر عن شكري وامتناني إلى المهندس/ أسامة محمود محمد علي بمركز دانية لخدمات الحاسوب والطباعة بمدينة عطبرة، الذي أنفق العديد من الساعات في طباعة ، مراجعة وتعديل وإعادة طباعة هذه المذكرة أكثر من مرة. والشكر موصول أيضاً للمهندس/ عوض علي بكري الذي شارك في تنسيق هذا العمل.

أخيراً ، أرجو من الله سبحانه وتعالى أن يتقبل هذا العمل المتواضع والذي أمل أن يكون ذا فائدة للقارئ.

## مقدمة

إنَّ مؤلّف هذه المذكرة وإيماناً منه بالدور العظيم والمُقدَّر للأستاذ الجامعي في إثراء حركة التأليف والتعريب والترجمة للمراجع والكتب الهندسية يأمل أن تفي هذه المذكرة بمتطلبات برامج البكالوريوس والدبلوم لطلاب الهندسة الميكانيكية ، هندسة الإنتاج أو التصنيع ، الهندسة الكهربائية والهندسة المدنية حيث يُغطّي مناهج نظرية ومختبرية في انتقال الحرارة والكتلة. تتفق هذه المذكرة لغوياً مع القاموس الهندسي الموحد السوداني ، وتُعد المذكرة مرجعاً في مجاله حيث يمكن أن يستفيد منه الطالب والمهندس والباحث. هذه المذكرة مقتبسة من مُذكرات مؤلفه في تدريسه لهذا المُقرر لفترة لا تقل عن أربعين عاماً.

تهدف هذه المذكرة لتأكيد أهمية دراسة ميكانيكا المصمّات أو المواد. فقد اشتملت هذه المذكرة على صياغة بعض النماذج الرياضية المستخدمة في ميكانيكا المواد واشتقاقها حتى الوصول إلى الصيغ النهائية المستخدمة في حل المسائل بالإضافة لإيراده بعض الأمثلة لنظم مستخدمة في التطبيقات العملية والمُختبرية.

تشتمل هذه المذكرة على تسع فصول. يتناول الفصل الأول أساليب طاقة الإنفعال مشفوعاً ببعض الأمثلة المحلولة والمسائل.

أما الفصل الثاني فيتضمن الإنهيار اللدن في العارضات والهياكل البسيطة (الجزء الأول) من وجهة نظر طريقة مخطط عزم الإنحناء وطريقة الشغل الافتراضي. يحتوي هذا الفصل على نماذج من الأمثلة المحلولة وبعض التدريبات.

يوصل الفصل الثالث في دراسة الإنهيار اللدن في العارضات والهياكل البسيطة (الجزء الثاني) ويستعرض العديد من الأمثلة المحلولة والمسائل.

يتناول الفصل الرابع نظرية المرونة (1) (الإجهادات المستوية - الإحداثيات الكارتيزية) حيث يناقش معادلات الإلتزان، معادلات الإنفعال - الإزاحة، معادلات التوافق، معادلات الإجهاد -

الإنفعال، والحالات الحدودية أو الطرفية متضمناً العديد من الأمثلة والمسائل.

يستعرض الفصل الخامس نظرية المرونة (2) (نظام الإجهادات الثلاثية - الإحداثيات الكارتيزية) من وجهة نظر معادلة الإتنان، معادلات الإنفعال - الإزاحة، معادلات الإجهاد - الإنفعال، ومعادلات التوافق.

أما الفصل السادس فيتناول نظرية المرونة لحالة الإجهادات الثلاثية - الكارتيزية لتحليل لوح مستطيل مسطاً عليه حمل عرضي ويشتمل هذا الفصل على العديد من الأمثلة النموذجية والمسائل.

يوصل الفصل السابع في دراسة نظرية المرونة (3) (الإجهادات المستوية - الإحداثيات القطبية) من وجهة نظر معادلة الإتنان، معادلات الإنفعال - الإزاحة، معادلات الإجهاد - الإنفعال، ومعادلة البايهارمونيك إضافة للعديد من الأمثلة والمسائل.

أما الفصل الثامن فيستعرض نظرية المرونة (4) (الإجهادات الثلاثية - الإحداثيات الأسطوانية) من وجهات نظر معادلة الإتنان، معادلات الإنفعال - الإزاحة، معادلات الإجهاد - الإنفعال. يشتمل الفصل التاسع والأخير على دراسة الألواح الدائرية من وجهات نظر معادلات الإتنان، معادلات الإنفعال - الإزاحة بالإضافة للعديد من الأمثلة المحلولة والمسائل الإضافية.

إنَّ الكاتب يأمل أن تساهم هذه المذكرة في إثراء المكتبة الجامعية داخل السودان وخارجه في هذا المجال من المعرفة ويأمل من القارئ ضرورة إرسال تغذية راجعة إن كانت هنالك ثمة أخطاء حتى يستطيع الكاتب تصويبها في الطبعة التالية للمذكرة.

والله الموفق

المؤلف

إبريل 2019م

# المحتويات

الصفحة	الموضوع
I	شكر و عرفان
II	مقدمة
IV	المحتويات
	<b>الفصل الأول : أساليب طاقة الإنفعال</b>
1	1.1 مدخل
2	1.2 أمثلة محلولة
12	1.3 تمرين
	<b>الفصل الثاني : الإنهيار اللدن في العارضات والهياكل البسيطة (1)</b>
17	2.1 مدخل
18	2.2 أمثلة محلولة
28	2.3 تمرين
	<b>الفصل الثالث : الإنهيار اللدن في العارضات والهياكل البسيطة (2)</b>
31	3.1 مدخل
31	3.2 أمثلة محلولة
38	3.3 تمرين
	<b>الفصل الرابع : إجهاد الإنحناء</b>
39	4.1 مدخل
39	4.2 معادلات الإتزان
40	4.3 معادلات الإنفعال – الإزاحة
41	4.4 معادلة التوافق
41	4.5 معادلات الإجهاد – الإنفعال
41	4.6 الحالات الحدودية أو الطرفية
45	4.7 أمثلة محلولة

52	4.8	تمرين
<b>الفصل الخامس : نظرية المرونة (2)</b>		
<b>نظام الإجهادات الثلاثية – الإحداثيات الكارتيزية</b>		
58	5.1	معادلة الإتران
59	5.2	معادلات الإنفعال – الإزاحة
59	5.3	معادلات الإجهاد – الإنفعال
60	5.4	معادلة التوافق
<b>الفصل السادس : الألواح (1)</b>		
<b>الألواح المستطيلة</b>		
61	6.1	مدخل
67	6.2	أمثلة محلولة
74	6.3	تمرين
<b>الفصل السابع : نظرية المرونة (3)</b>		
<b>الإجهادات المستوية – الإجهادات القطبية</b>		
75	7.1	معادلة الإتران
76	7.2	معادلات الإنفعال – الإزاحة
76	7.3	معادلات الإجهاد – الإنفعال
85	7.4	أمثلة محلولة
96	7.5	تمرين
<b>الفصل الثامن : نظرية المرونة (4)</b>		
<b>نظام الإجهادات الثلاثية – الإحداثيات الأسطوانية</b>		
103	8.1	معادلة الإتران
104	8.2	معادلات الإنفعال – الإزاحة
104	8.3	معادلات الإجهاد – الإنفعال
<b>الفصل التاسع : نظريات الإنهيار</b>		
106	9.1	معادلة الإتران
106	9.2	معادلات الإنفعال – الإزاحة
109	9.3	أمثلة محلولة

112	9.4 تمرين
	<b>الكتب والمراجع</b>
116	الكتب والمراجع العربية
116	الكتب والمراجع الإنجليزية
117	<b>المصطلحات</b>

## الفصل الأول

### اساليب طاقة الانفعال

#### ( Strain Energy Method )

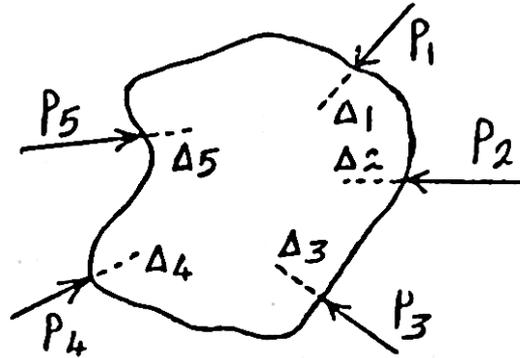
##### 1.1 مدخل:

تستخدم هذه الاساليب لحل المسائل بمساواة الشغل المبذول بواسطة الأحمال الخارجية مع طاقة الانفعال المخزونة في الجسم نتيجة التشوه. سنختصر الحديث في هذا الفصل على واحدة من طرق الطاقة تعرف بنظرية كاستقليانو. و هذه الطريقة مفيدة لإيجاد الإزاحات لأجسام مرنة معرضة لأحمال محورية أو التواء أو انحناء أو أي مجموعة من هذه الأحمال. و النظرية تفيد أن التفاضل الجزئي لطاقة الانفعال الكلية بالنسبة لأي من الأحمال الخارجية المسلطة تعطي الإزاحة عند نقطة تسليط الحمل و في اتجاهه. و مصطلح قوة و إزاحة هنا يعني المعني العام و بالتالي يمكن أن تكون القوة قوة عادية أو عزم، و الإزاحة يمكن أن تكون إزاحة خطية أو زاوية. و يمكن التعبير عن نظرية كاستقليانو رياضياً كما يلي: (الرسم (1.1)).

$$\Delta n = \frac{\partial U}{\partial P_n} \quad (n=1,2,\dots)$$

حيث أن:  $U$  هي طاقة الانفعال.

$\Delta$  هي الإزاحة.



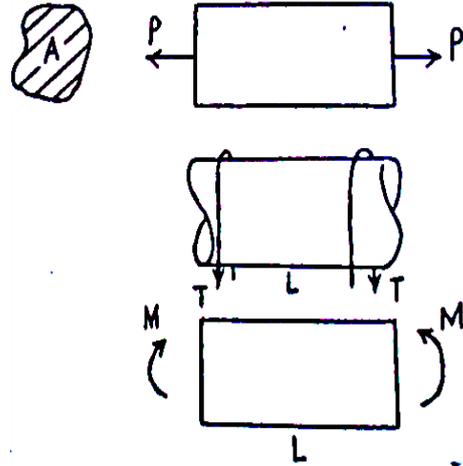
الرسم (1.1)

حاول أن تبرهن الصيغ التالية لطاقة الانفعال، كما في الرسم (1.2) أدناه.

$$U = \frac{P^2 L}{2AE}$$

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

$$U = \frac{M^2 L}{2EI}$$



الرسم (1.2)

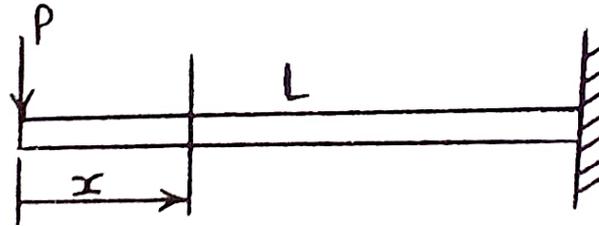
حيث أن  $I$  هي العزم الثاني للمساحة حول محور التعادل.

1.2 أمثلة محلولة:

مثال (1):

عارضة وتدنية كما في الرسم (1.3) أدناه لها مقطع منتظم مسلط عليها حمل مركز في الطرف

الحر. أوجد الانحراف تحت الحمل المسلط باستخدام نظرية كاستغليانو.



الرسم (1.3)

الحل:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

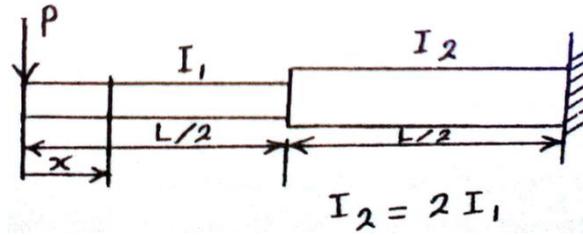
$$M = -Px \quad \therefore \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

$$\therefore v = \frac{1}{EI} \int_0^L (-Px)(-x) dx = \frac{P}{EI} \int_0^L x^2 dx$$

$$\therefore v = \frac{PL^3}{3EI}$$

مثال (2):

عارضة وتدنية لها مقطع متدرج كما في الرسم (1.4) أدناه سلت عليها حمل مركز في الطرف الحر. أوجد الانحراف تحت الحمل باستخدام نظرية كاستغليانو.



الرسم (1.4)

الحل:

$$U = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M_1^2}{2EI_1} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{M_2^2}{2EI_2} dx$$

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI_1} \int_0^{\frac{L}{2}} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x} dx + \frac{1}{EI_2} \int_{\frac{L}{2}}^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial x} dx$$

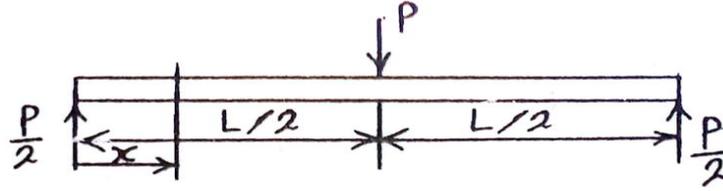
$$M_1 = M_2 = -Px, \quad \frac{\partial M_1}{\partial P} = \frac{\partial M_2}{\partial P} = -x$$

$$v = \frac{1}{EI_1} \int_0^{\frac{L}{2}} (-Px)(-x) dx + \frac{1}{EI_2} \int_{\frac{L}{2}}^L (-Px)(-x) dx$$

$$v = \frac{9PL^3}{48EI_1}$$

مثال (3):

استخدم نظرية كاستقليانو لإيجاد الانحراف الأقصى في عارضة مسنودة إسناد بسيط مسلط عليها حمل مركز في الوسط كما في الرسم (1.5).



الرسم (1.5)

الحل:

$$U = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M_1^2}{2EI_1} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{M_2^2}{2EI_2} dx$$

نتيجة التماثل،

$$U = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M_1^2}{2EI} dx$$

$$\therefore v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P} dx$$

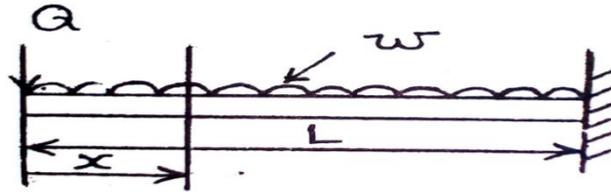
$$M_1 = \frac{P}{2} x, \quad \frac{\partial M_1}{\partial P} = \frac{x}{2}$$

$$\therefore v = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left( \frac{P}{2} x \right) \left( \frac{x}{2} \right) dx = \frac{P}{2EI} \int_0^{\frac{L}{2}} x^2 dx$$

$$v = \frac{PL^3}{48EI}$$

مثال (4):

استخدم نظرية كاستقليانو لإيجاد الانحراف عند طرف عارضة وتدنية مسلط عليها حمل موزع بانتظام كما في الرسم (1.6).



الرسم (1.6)

الحل:

نسبة لعدم وجود حمل مركز عند طرف العارضة حيث الانحراف مطلوب. فإننا نسلط حمل وهمي

$$. Q = 0$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$M = -Qx - \frac{wx^2}{2}, \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = -x$$

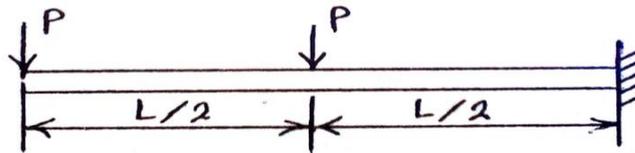
$$v = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{EI} \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial Q} dx$$

$$\therefore v = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( -\frac{wx^2}{2} \right) (-x) dx$$

$$\therefore v = \frac{w}{2EI} \int_0^L x^3 dx = \frac{wL^4}{8EI}$$

مثال (5):

أوجد الانحراف في الطرف الحر للعارضة الوتدية الموضحة في الرسم (1.7) أدناه.



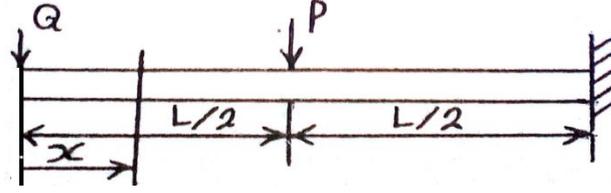
الرسم (1.7)

الحل:

يجب الانتباه للمسائل التي تحتوي علي أكثر من حمل واحد له نفس الرمز، و ذلك لأن استخدام

نظرية كاستقليانو سيؤدي إلى حساب مجموع الانحراف عند هذه النقاط. لعلاج هذا الوضع يجب

تغيير رمز أحد الحملين في المسألة التي أمامنا مثلاً  $Q = P$  كما في الرسم (1.8).



الرسم (1.8)

$$U = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M_1^2}{2EI_1} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{M_2^2}{2EI_2} dx$$

$$v = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial Q} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial Q} dx$$

$$M_1 = -Qx, \quad \frac{\partial M_1}{\partial P} = -x$$

$$M_2 = -Qx - P(x - \frac{L}{2}), \quad \frac{\partial M_2}{\partial P} = -x$$

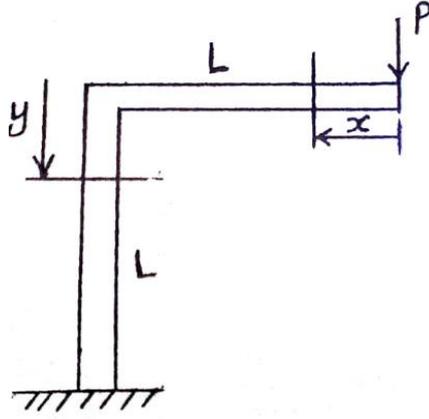
$$\therefore v = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} (-Px)(-x) dx + \frac{1}{EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left( -2Px - \frac{PL}{2} \right) (-x) dx$$

$$v = \frac{P}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} x^2 dx + \frac{P}{EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left( 2x^2 - \frac{L}{2}x \right) dx$$

$$v = \frac{25PL^3}{48EI}$$

مثال (6):

أوجد الانحراف الرأسي تحت الحمل  $P$  في الهيكل الموضَّح في الرسم (1.9) أدناه.



الرسم (1.9)

الحل:

$$U = \int_0^L \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_0^L \frac{M_2^2}{2EI} dy$$

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P} dx + \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P} dy$$

$$M_1 = Px, \quad \frac{\partial M_1}{\partial P} = x$$

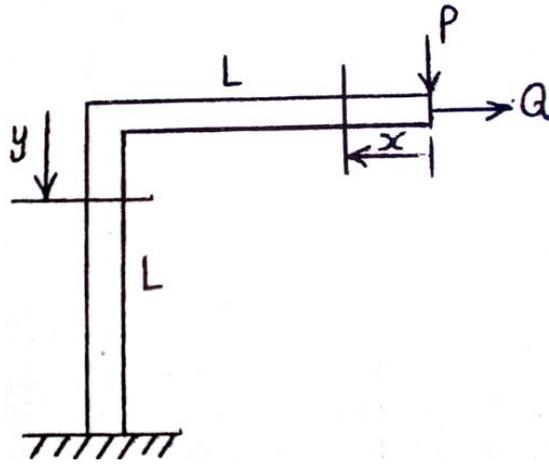
$$M_2 = PL, \quad \frac{\partial M_2}{\partial P} = L$$

$$\therefore v = \frac{1}{EI} \int_0^L (Px)(x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^L (PL)(L) dy$$

$$\therefore v = \frac{P}{EI} \int_0^L x^2 dx + \frac{PL^2}{EI} \int_0^L dy = \frac{4PL^3}{3EI}$$

مثال (7):

أوجد الانحراف الأفقي في المثال (6) كما في الرسم (1.10).



الرسم (1.10)

الحل:

لعدم وجود حمل أفقي عند الطرف الحر حيث الإزاحة مطلوبة فإننا نسلط حمل وهمي  $Q=0$

$$U = \int_0^L \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_0^L \frac{M_2^2}{2EI} dy$$

$$u = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{EI} \int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial Q} dx + \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial Q} dy$$

$$M_1 = Px, \quad \frac{\partial M_1}{\partial Q} = 0$$

$$M_2 = PL + Qy, \quad \frac{\partial M_2}{\partial P} = y$$

$$u = \frac{1}{EI} \int_0^L (Px)(0) dx + \frac{1}{EI} \int_0^L (PL)(y) dy$$

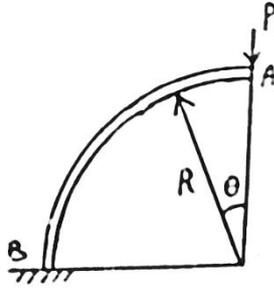
$$u = \frac{PL}{EI} \int_0^L y dy = \frac{PL^3}{2EI}$$

مثال (8):

قضيب نحيف مقوس على شكل ربع دائرة نصف قطرها R مثبت عند الطرف B بينما الطرف A

يخضع لحمل رأسي P كما في الرسم (1.11). استخدم نظرية كاستقليانو لإيجاد الإزاحة الرأسية

للطرف A .



الرسم (1.11)

الحل:

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EI} ds$$

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} M \frac{\partial M}{\partial P} ds$$

$$M = PR \sin \theta, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = R \sin \theta, \quad ds = R d\theta$$

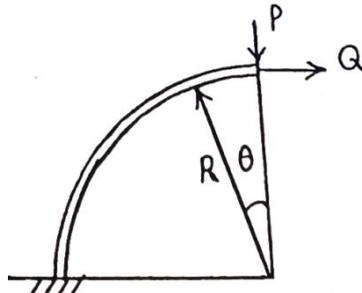
$$\therefore v = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (PR \sin \theta)(R \sin \theta) R d\theta$$

$$v = \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$v = \frac{PR^3}{2EI} \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi PR^3}{4EI}$$

مثال (9):

أوجد الإزاحة الأفقية عند الطرف A في المثال (8) كما في الرسم (1.12).



الرسم (1.12)

الحل:

نسبة لوجود حمل أفقي عند الطرف A ، نسلط حمل و همي  $Q = 0$  ،

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EI} ds$$

$$u = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} M \frac{\partial M}{\partial Q} ds$$

$$M = PR \sin \theta + QR(1 - \cos 2\theta), \quad \frac{\partial M}{\partial P} = R(1 - \cos 2\theta), \quad ds = R d\theta$$

$$u = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (PR \sin \theta) R(1 - \cos 2\theta) R d\theta$$

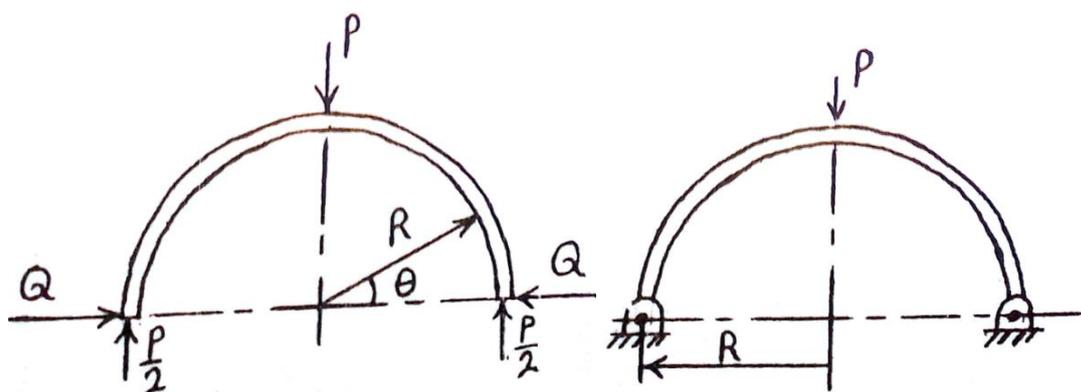
$$u = \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \left( \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$u = \frac{PR^3}{2EI} \left[ -\cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{PR^3}{2EI}$$

مثال (10):

حلقة على شكل نصف دائرة مثبتة بمسمار عند كل طرف كما موضَّح بالرسم (1.13) أدناه.

أحسب رد الفعل الأفقي عند كل طرف.



الرسم (1.13)

الحل:

مخطط الجسم الحر موضَّح في الرسم حيث أن Q تمثل رد الفعل المطلوب. نتيجة للتماثل فإن،

$$U = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EI} ds$$

$$v = 2 \int_0^{\pi/2} M \frac{\partial M}{\partial Q} ds = 0$$

$$M = \frac{PR}{2}(1 - \cos 2\theta) - QR \sin \theta$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = -R \sin \theta, \quad ds = R d\theta$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{PR}{2}(1 - \cos 2\theta) - QR \sin \theta \right] (-R \sin \theta) R d\theta = 0$$

نخلص من  $R^2 -$  ،

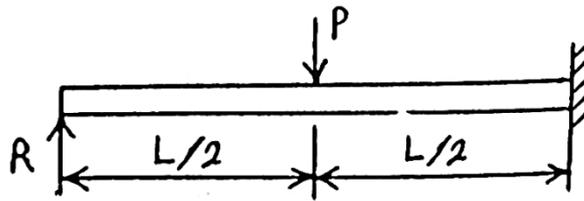
$$\int_0^{\pi/2} \left[ \frac{PR}{2} \left( \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) - \frac{QR}{2}(1 - \cos 2\theta) \right] d\theta = 0$$

و هذه تقود إلى قيمة Q المجهولة

$$Q = \frac{P}{\pi}$$

مثال (11):

أوجد رد الفعل لدي الدعامة في العارضة الوتدية الموضحة في الرسم (1.14) أدناه.



الرسم (1.14)

الحل:

$$U = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M_1^2}{2EI_1} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{M_2^2}{2EI_2} dx$$

$$v = \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial R} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial R} dx$$

$$M_1 = Rx, \quad \frac{\partial M_1}{\partial R} = x$$

$$M_2 = Rx - P\left(x - \frac{L}{2}\right), \quad \frac{\partial M_2}{\partial P} = x$$

$$v = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} (Rx)(x) dx + \frac{1}{EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left( Rx - P\left(x - \frac{L}{2}\right) \right) (x) dx$$

$$v = \frac{R}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} x^2 dx + \frac{1}{EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left( (R-P)x^2 + \frac{PL}{2}x \right) dx$$

بالتبع  $v = 0$ ،

$$\therefore \frac{R}{EI} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{L}{2}} + \frac{1}{EI} \left[ (R-P) \frac{x^3}{3} + \frac{PL}{4} x^2 \right]_{\frac{L}{2}}^L = 0$$

و هذه المعادلة تقود إلى الإجابة المطلوبة،

$$R = \frac{P}{8}$$

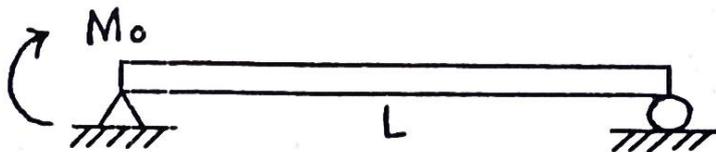
### 1.3 تمرين:

1. في المثال (10) أوجد الإزاحة الرأسية تحت الحمل المركز  $P$ .

$$\text{Ans.} \left( \frac{PR^3}{EI} \left( \frac{3\pi}{8} + \frac{3}{2\pi} - 1 \right) \right)$$

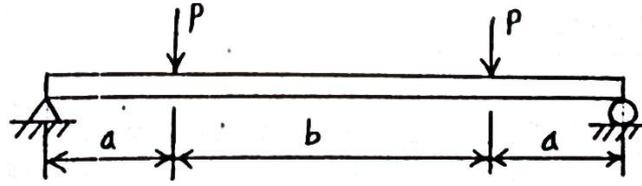
2. عارضة مسنودة إسناد بسيط مسلط عليها عزم  $M_o$  على الطرف اليسار كما في الرسم أدناه.

استخدم نظرية كاستقليانو لإيجاد الانحراف عند منتصف العارضة.



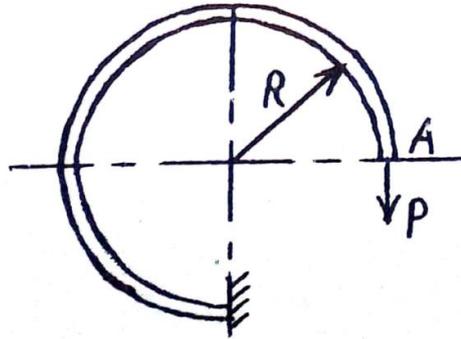
$$\text{Ans.} \left( \frac{M_o L^2}{16EI} \right)$$

3. عارضة مسنودة إسناد بسيط مسلط عليها حملان متماثلان في الوضع. استخدم نظرية كاستغليانو لإيجاد الانحراف عند منتصف العارضة.



$$\text{Ans.} \left( -\frac{2Pa^3}{3EI} + \frac{Pa^2L}{2EI} \right)$$

4. إنشاء موضوع في مستوي رأسي على شكل ثلاثة أرباع حلقة (أنظر الرسم). أحد الطرفين مثبت و الآخر مسلط عليه حمل P . أوجد الإزاحة الرأسية للطرف A . خذ في الاعتبار طاقة الانحناء فقط .

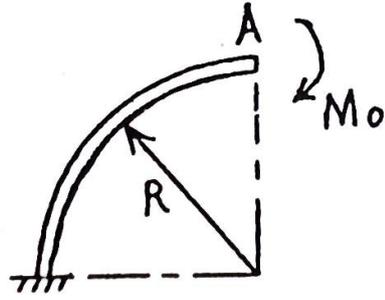


$$\text{Ans.} \left( \frac{PR^3}{2EI} \right)$$

5. أوجد زاوية الدوران عند النقطة A في المثال (8).

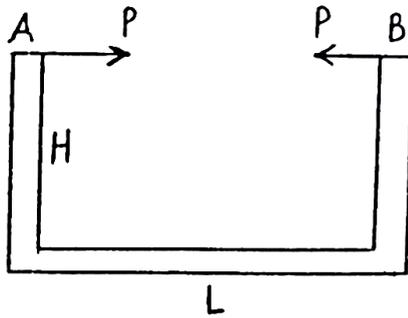
$$\text{Ans.} \left( \frac{PR^3}{EI} \right)$$

6. أوجد زاوية الدوران بالإضافة إلى الانحراف الرأسي و الأفقي عند النقطة A في الشكل أدناه.



Ans.  $\left( 0.571 \frac{M_o R^2}{EI}, \frac{M_o R^2}{EI}, \frac{M_o \pi R}{2EI} \right)$

7. أوجد المسافة التي تقترب بها النقطتان A و B من بعضهما نتيجة لتسليط الحمل P.

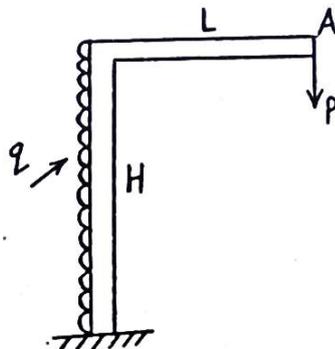


Ans.  $\left( \frac{PH^2(2H + 3L)}{2EI} \right)$

8. حل المسألة (7) إذا استبدل الحمل P بعزم مركز  $M_o$ .

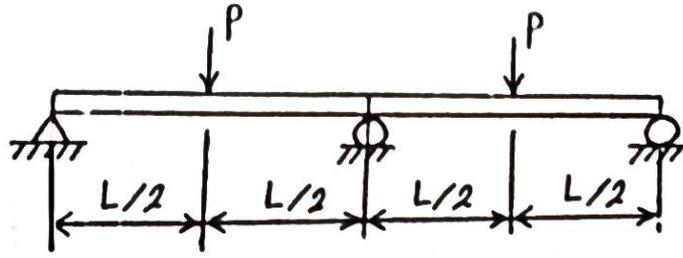
Ans.  $\left( \frac{M_o H(H + L)}{EI} \right)$

9. أوجد الإزاحة الراسية عند النقطة A في الشكل الموضَّح في الرسم أدناه.



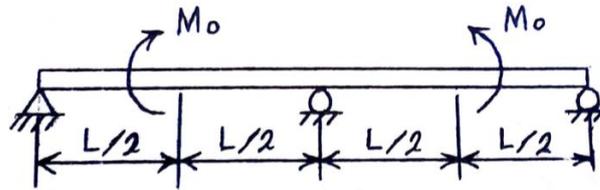
Ans.  $\left( \frac{PL^3}{3EI}, \frac{PL^2 H}{EI}, \frac{qLH^3}{6EI} \right)$

10. العارضة المستمرة الموضحة في الرسم أدناه تخضع لحملين متساويين كما في الرسم أدناه .  
استخدم نظرية كاستقليانو لإيجاد رد الفعل في الوسط .



Ans.(1.375 P)

11. إذا تم استبدال الحمل P في العارضة المذكورة في السؤال (10) بعزم مركز كما موضَّح في الرسم أدناه أوجد رد الفعل في الوسط.



Ans.  $\left(2.25 \frac{M_o}{L}\right)$

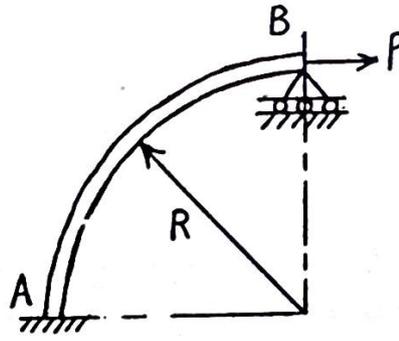
12. أوجد رد الفعل لدي الدعامة في العارضة التوتدية الموضحة في الرسم أدناه.



Ans.  $\left(\frac{3M_o}{2L}\right)$

13. قضيب نحيف مقوس على شكل ربع دائرة نصف قطرها R . الطرف A مثبت و الطرف B

حر في الحركة الأفقية نتيجة لتسليط الحمل P . أوجد رد الفعل الراسي عند B .



Ans.  $\left(\frac{2P}{\pi}\right)$

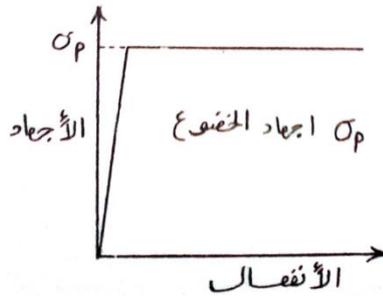
## الفصل الثاني

### الانهيار اللدن في العارضات والهياكل البسيطة (1)

#### (Plastic Deformation in Beams and Simple Frames 1)

##### 2.1 مدخل:

في حالات تصميم إنشائي معين يمكن السماح بقدر محدد من التشوهات اللدنة في العناصر الإنشائية، و بالتالي يمكن السماح بأحمال أكبر من تلك التي تقدرها نظرية المرونة و التي لا تقبل أي إجهاد أكبر من إجهاد الخضوع. هذا التجاوز يعني استخدام أفضل للمواد الإنشائية و يسمى التصميم اللدن. و في الحقيقة هذا الاستخدام الأفضل يعود لبعض المواد التي لديها قابلية كبيرة في التشوه اللدن قبل أن تنهار. و من أهم هذه المواد و أكثرها استخداماً هو صلب الإنشاءات. و لدواعي التبسيط فإننا نمثل منحنى الإجهاد - الانفعال لهذه المواد كما موضَّح في الرسم (2.1) أدناه و نسميها مواد مرنة مثالية اللدنة.



الرسم (2.1)

و فيما يخص العارضات فإنه كلما زادت الأحمال العرضية زادت عزوم الانحناء و بالتالي الاجهادات. و يبدأ الخضوع في الشرائح الخارجية عند المقطع الذي يتعرض لعزم إنحناء أقصى، ثم تنتقل هذه التشوهات اللدنة سريعاً إلي الداخل. و عندما تعم التشوهات اللدنة المقطع بأكمله فإننا نسمي ذلك المقطع مفصلة لدنة. و عندما يصبح مقطع ما مفصلة لدنة فإن العزم عنده يسمى

بالعزم اللدن أو عزم اللدونة الكاملة . و لن يتجاوز العزم عند المفصلة اللدنة عزم اللدونة الكاملة مهما زادت الأحمال العرضية على العارضة. و فيما يلي سنمثل المفصلة اللدنة بدائرة صغيرة. وكما ذكر فإن المفصلة اللدنة تحدث عند المقطع الذي يتعرض لأقصى عزم انحناء. و إذا كانت الأحمال مركزة فإن أقصى عزم انحناء يحدث تحت أحد الأحمال أو ريدود الأفعال. إما إذا كان الحمل موزع بانتظام فإن الأمر يتطلب عناية خاصة. و عندما تتكون مفصلات لدنة كافية في أي إنشاء، فإن أجزاء من الإنشاء بين المفصلات قد تتحرك بدون أي زيادة في الحمل. و هذا يعني أن هذه الأجزاء القابلة للتحرك و الإزاحة تسلك سلوك الآليات. و لهذا يمكن تمثيل الإنشاء بين مفصلتين بخط مستقيم.

الحمل الذي يؤدي إلي نشوء عدد كاف من المفصلات اللدنة و التي تقود إلي الانهيار يسمى الحمل الحدي. هنالك عدة طرق لإيجاد الحمل الحدي.

## 2.2 أمثلة محلولة:

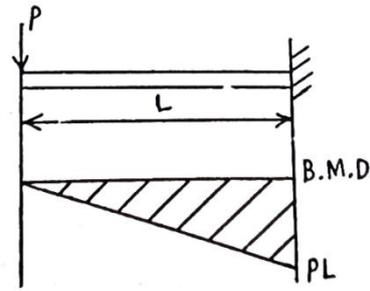
### 1. طريقة مخطط عزم الانحناء:-

مثال (1):

أوجد الحمل الحدي للعارضة الوتدية الموضحة في الرسم (2.2) أدناه.

**الحل:**

عزم الانحناء الأقصى عند الطرف المقيد. و لهذا عندما تنشأ مفصلة لدنة فإنها ستنشأ عند الطرف المقيد و هي كافية لانهيار العارضة .



الرسم (2.2)

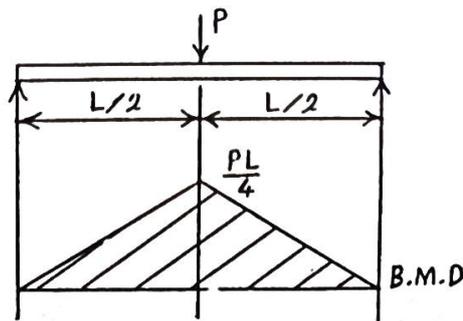
إذا رمزنا للوزم اللدن بـ  $M_p$  و الحمل الحدي بـ  $P_o$  نجد أنّ،

$$M_p = P_o L$$

$$\therefore P_o = \frac{M_p}{L}$$

مثال (2):

أوجد الحمل الحدي للعارضة الموضّحة في الرسم (2.3) أدناه.



الرسم (2.3)

الحل:

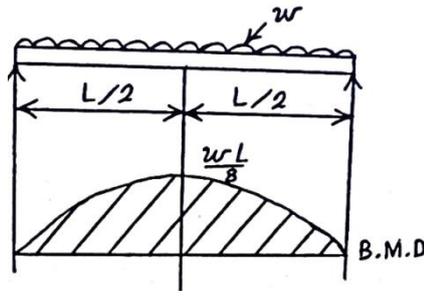
$$M_p = \frac{P_o L}{4}$$

أي أن الحمل الحدي،

$$\therefore P_o = \frac{4M_p}{L}$$

مثال (3):

أوجد معدل الحمل الحدي للعارضة الموضّحة في الرسم (2.4) أدناه.



الرسم (2.4)

الحل:

$$M_P = \frac{w_o L^2}{8}$$

إذن معدل الحمل الحدي،

$$\therefore w_o = \frac{8M_P}{L^2}$$

2. طريقة الشغل الافتراضي:

هذا الطريقة اسهل و لتطبيقها يجب اتباع الخطوات التالية:-

(i) حدد عد المفصلات اللدنة المطلوبة لانهيال العارضة.

(ii) حدد عدد المفصلات اللدنة.

(iii) أعط العارضة إزاحة صغيرة ثم أرسم العارضة المنهارة.

(iv) أحسب الشغل الافتراضي و أجعل مجموعه صفراً.

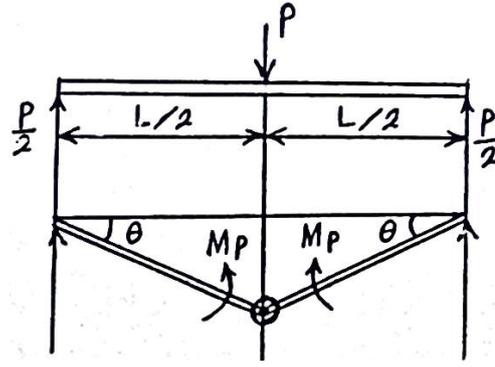
لاحظ أن الشغل = القوة × الإزاحة. و هذه الإزاحة يجب أن تكون في اتجاه القوة. و إذا كانت القوة

و الإزاحة لهما نفس ناحية الاتجاه فإن الشغل يكون موجباً و إلا سيكون سالباً. نفس الملاحظة

تتسحب على العزوم و الإزاحة الزاوية.

مثال (4):

أوجد الحمل الحدي للعارضة الموضحة في الرسم (2.5) أدناه باستخدام طريقة الشغل الافتراضي.



الرسم (2.5)

الحل:

لكي تنهار العارضة نحتاج إلى مفصلة لدنة واحدة في وسط العارضة تحت الحمل حيث يصل العزم قيمته القصوى.

الشغل الناتج من الحمل P،

$$WD_1 = P \left( \frac{L}{2} \theta \right)$$

$\theta$  زاوية صغيرة،

الشغل الناتج من العزم  $M_p$ .

$$WD_2 = -M_p \theta - M_p \theta = -2M_p \theta$$

إذن معادلة الشغل الافتراضي تصبح،

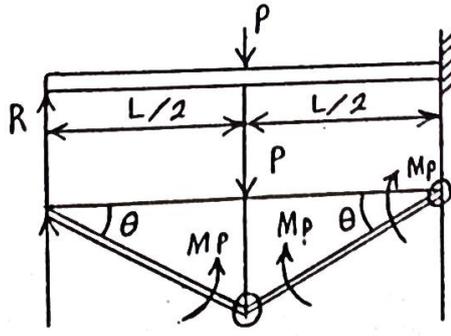
$$WD_1 + WD_2 = 0$$

$$\frac{P_o L}{2} \theta - 2M_p \theta = 0$$

$$\therefore P_o = \frac{4M_p}{L}$$

مثال (5):

أوجد الحمل الحدي للعارضة الوتدية المدعومة الموضحة في الرسم (2.6) أدناه.



الرسم (2.6)

الحل:

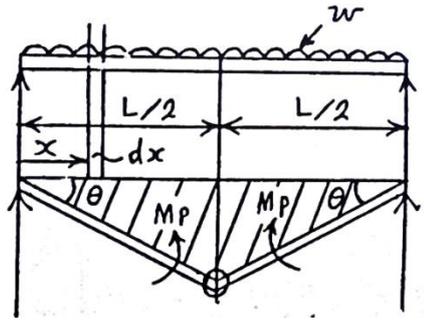
المطلوب مفصلتين لانتهيار العارضة إحداهما عن الطرف المبني و الأخرى تحت الحمل المركز.  
معادلة الشغل الافتراضي،

$$\frac{P_o L}{2} \theta - 3M_p \theta = 0$$

$$\therefore P_o = \frac{6M_p}{L}$$

مثال (6):

أوجد معدل الحمل الحدي للعارضة الموضحة في الرسم (2.7) أدناه.



الرسم (2.7)

الحل:

نحتاج إلي مفصلة واحدة في الوسط لانتهيار العارضة.

الشغل الافتراضي الناجم من الحمل الموزع،

$$WD = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} w dx (x\theta)$$

$$WD = \left[ \frac{1}{2} L \left( \frac{L}{2} \theta \right) \right] w$$

لاحظ أن الكمية بين القوسين المربعين تمثل مساحة المثلث المظلل أو بصفة عامة المساحة الواقعة تحت الحمل الموزع. فإذا أشرنا إلي هذه المساحة بـ A فإن الشغل الافتراضي يكون

$$WD = A w$$

و هذه الصيغة افضل في الاستخدام.

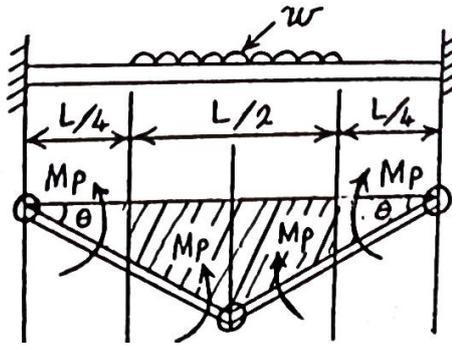
إذن معادلة الشغل الافتراضي:

$$\frac{L^2}{2} w_o \theta - 2M_p \theta = 0$$

$$\therefore w_o = \frac{4M_p}{L^2}$$

مثال (7):

أوجد معدل الحمل الحدي للعارضة الموضحة في الرسم (2.8) أدناه.



الرسم (2.8)

الحل:

$$A = \frac{1}{2} L \left( \frac{L}{2} \theta \right) - 2 \left( \frac{1}{2} \frac{L}{4} \frac{L}{4} \theta \right)$$

$$A = \frac{3L^2}{16} \theta$$

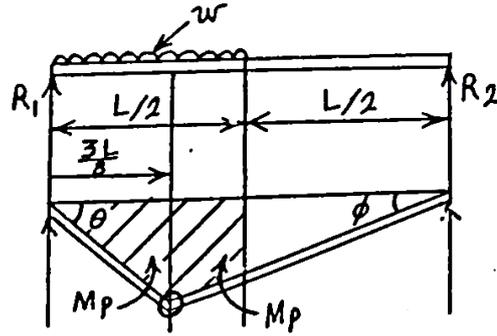
معادلة الشغل الافتراضي،

$$\frac{3L^2}{16} w_o \theta - 4M_p \theta = 0$$

$$\therefore w_o = \frac{64M_p}{3L^2}$$

مثال (8):

أوجد معدل الحمل الحدي للعارضة الموضحة في الرسم (2.9) أدناه.



الرسم (2.9)

الحل:

المطلوب مفصلة واحدة تكون حيث القيمة القصوى للعزم. أو حيث تكون قوة القص = صفر

أوجد أولاً رد الفعل  $R_1$ ،

$$R_1 L = \frac{wL}{2} \times \frac{3L}{4}$$

$$R_1 = \frac{3wL}{8}$$

$$\frac{3wL}{8} - wx = 0$$

$$\therefore x = \frac{3L}{8}$$

المساحة المظللة،

$$A = \frac{1}{2} L \left( \frac{5L}{8} \phi \right) - \frac{1}{2} \frac{L}{2} \left( \frac{L}{2} \phi \right) = \frac{3L^2}{16} \phi$$

معادلة الشغل الافتراضي،

$$\frac{3L^2}{16} w_o \phi - M_p \theta - M_p \phi = 0$$

$$\frac{3L}{8} \theta = \frac{5L}{8}$$

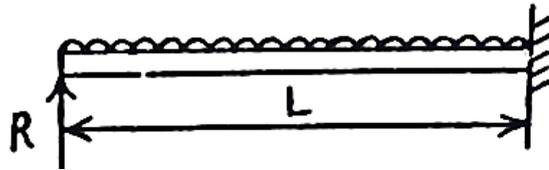
$$\therefore \theta = \frac{5}{3} \phi$$

$$\therefore \frac{3L^2}{16} w_o \phi - \frac{5}{3} M_p \phi - M_p \phi = 0$$

$$\therefore w_o = \frac{128 M_p}{9 L^2}$$

مثال (9):

أوجد معدل الحمل الحدي للعارضة الوتدية المدعومة الموضحة في الرسم (2.10) أدناه.

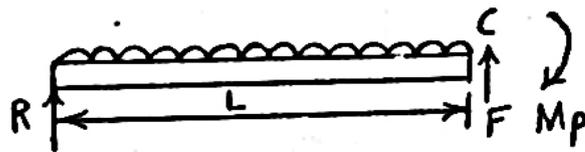
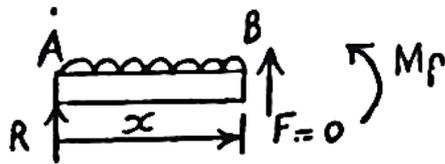


الرسم (2.10)

الحل:

المطلوب مفصلتين لانتهيار العارضة، إحداها عند الطرف المبني و الأخرى عند المقطع الذي

يتعرض لأقصى عزم انحناء و لنفترض أنه يبعد X من الطرف الحر.



قوة القص عند المقطع B = صفر،

$$R - wx = 0 \quad (1)$$

خذ العزوم حول B،

$$Rx - M_p - \frac{wx^2}{2} = 0 \quad (2)$$

خذ العزوم حول C،

$$RL + M_p - \frac{wL^2}{2} = 0 \quad (3)$$

من المعادلات (1) ، (2) و (3) نحصل على،

$$x^2 + 2xL - L^2 = 0$$

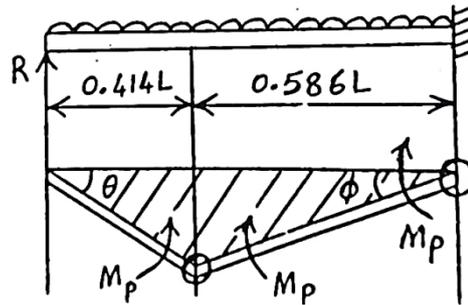
و قيمة x المطلوبة،

$$x = 0.414L$$

$$A = \frac{1}{2}L(0.414\theta)$$

$$A = 0.207L^2\theta$$

معادلة الشغل الافتراضي،



$$0.207L^2 w_o \theta - M_p \theta - 2M_p \phi = 0$$

$$0.414L\theta = 0.586L\phi$$

$$\therefore \phi = 0.706\theta$$

$$\therefore 0.207L^2 w_o \theta - M_p \theta - 1.413M_p \theta = 0$$

$$w_o = \frac{11.7M_p}{L^2}$$

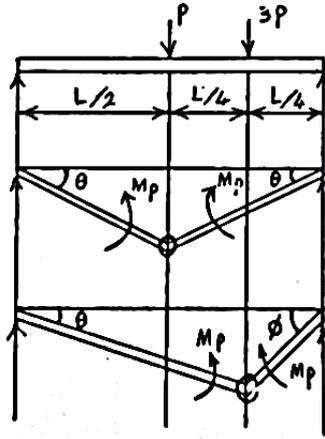
مثال: (10):

أوجد الحمل الحدي للعارضة الموضحة في الرسم (2.11) أدناه.

الحل:

هذه العارضة تحتاج لمفصلة واحدة لكي تنهار. وهذه المفصلة إما أن تكون تحت الحمل P أو

الحمل 3P.



الرسم (2.11)

إذن هنالك احتمالان و بالتالي حلان أحدهما يكون مقبولاً و الآخر مرفوضاً.

الاحتمال الأول. المفصلة تحت الحمل P.

معادلة الشغل الافتراضي،

$$\frac{P_o L}{2} \theta + 3P_o \left( \frac{L}{4} \theta \right) - 2M_p \theta = 0$$

$$\therefore P_o = \frac{8M_p}{5L}$$

الاحتمال الثاني: المفصلة تحت الحمل 3P،

$$P_o \left( \frac{L}{2} \right) \theta + 3P_o \left( \frac{L}{4} \phi \right) - M_p \theta - M_p \phi = 0$$

$$\frac{3L}{4} \theta = \frac{L}{4} \phi$$

$$\therefore \phi = 3\theta$$

$$\frac{P_o L}{2} \theta + \frac{3P_o L}{4} 3\theta - M_p \theta - 3M_p \theta = 0$$

$$\therefore P_o = \frac{16M_p}{11L}$$

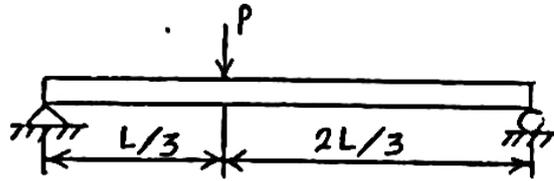
إذن الحمل الحدي (القيمة الأصغر)،

$$P_o = \frac{16M_p}{11L}$$

2.3 تمرين:

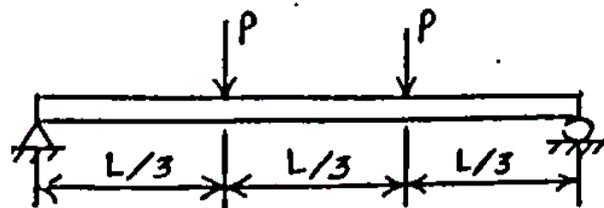
أوجد الحمل الحدي للعارضات أدناه.

.1



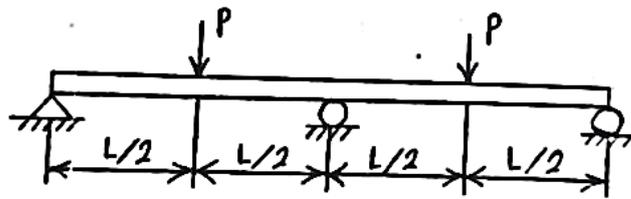
$$\text{Ans.} \left( \frac{4.5M_p}{L} \right)$$

.2



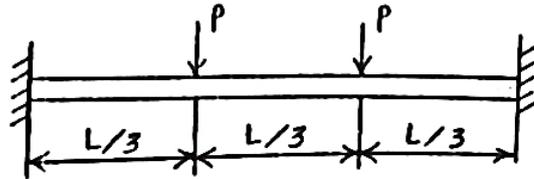
$$\text{Ans.} \left( \frac{3M_p}{L} \right)$$

.3



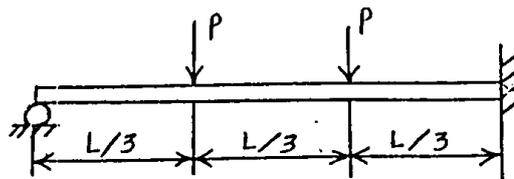
Ans.  $\left(\frac{6M_P}{L}\right)$

.4



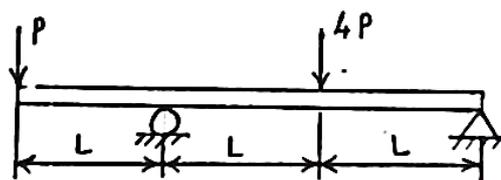
Ans.  $\left(\frac{6M_P}{L}\right)$

.5



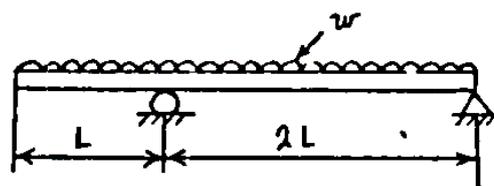
Ans.  $\left(\frac{4M_P}{L}\right)$

.6



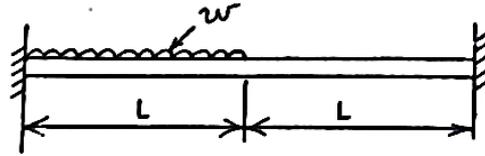
Ans.  $\left(\frac{2M_P}{3L}\right)$

.7



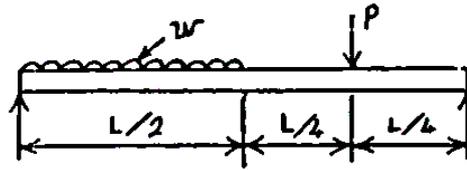
Ans.  $\left(\frac{4M_P}{3L^2}\right)$

.8



Ans.  $\left( \frac{356M_p}{9L^2} \right)$

9. أوجد معدل الحمل الحدي للعارضة الموضحة أدناه. افترض أن المفصلة تحت الحمل المركز



Ans.  $\left( \frac{32M_p}{L^2} - \frac{6M_p}{L} \right)$

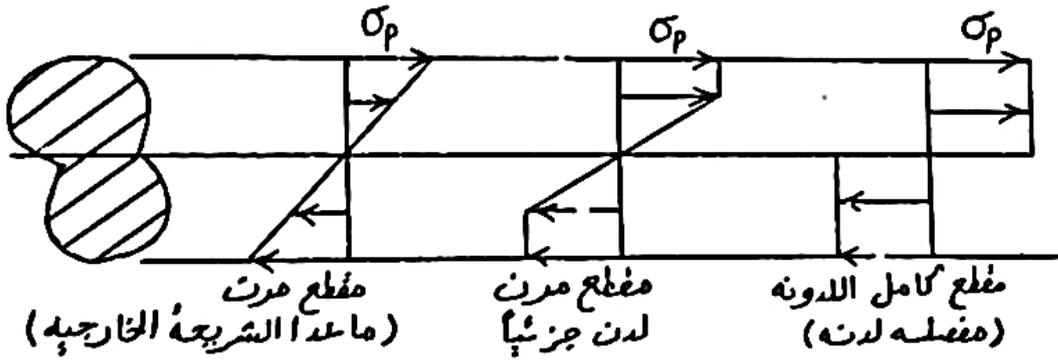
## الفصل الثالث

### الانهيار اللدن في العارضات والهياكل البسيطة (2)

#### (Plastic Deformation in Beams and Simple Frames 2)

##### 3.1 مدخل:

خذ عارضة ذات مقطع عشوائي مزدوج التماثل كما في الرسم أدناه. المادة مرنة مثالية اللدونة في حالة الشد و الضغط كما أشرنا إلي ذلك في الفصل السابق. أن مخطط توزيع الاجهادات في أي مقطع يتغير كلما تحول المقطع من المرونة إلي اللدونة الكاملة حين يصبح مفصلة لدنة كما موضَّح في الرسم (3.1).

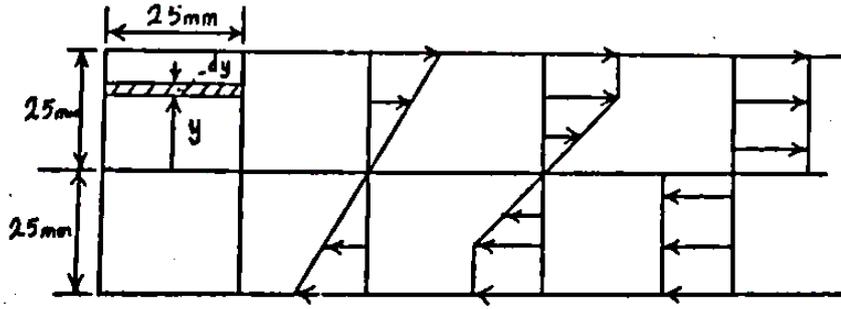


الرسم (3.1)

##### 3.2 أمثلة محلولة:

###### مثال (1):

أوجد عزم اللدونة الكاملة لعارضة من الصلب مقطوعها مستطيل  $25\text{mm} \times 50\text{mm}$  كما موضَّح في الرسم (3.2). ولها إجهاد خضوع  $250\text{N/mm}^2$ . أوجد العزم المرين. أوجد العزم الذي يؤدي إلي تشوهات لدنة لعمق  $10\text{mm}$  من الحافة.



الرسم (3.2)

الحل:

العزم المرن  $M_e$ ،

$$I = \frac{25 \times 50^3}{12} = 260.10^3 \text{ mm}^4$$

$$\hat{y} = 25 \text{ mm}$$

معايير المقطع،

$$z = \frac{1}{\hat{y}} = \frac{260.10^3}{25} = 10.4.10^3 \text{ mm}^3$$

$$M_e = \sigma_p z = 250 \times 10.4.10^3 \text{ N/mm}$$

$$M_e = 2.6 \text{ kNm}$$

عزم اللدونة الكاملة،

نأخذ عنصراً صغيراً مساحته  $(25 \text{ dy})$ . نضرب المساحة في الإجهاد  $\sigma_p$  نحصل على قوة .

نضرب بعد ذلك في المسافة  $y$  ثم نجري عملية التكامل لنحصل على العزم.

$$M_p = 2 \int_0^{25} \sigma_p (25 \text{ dy}) y = 50 \sigma_p \int_0^{25} y \text{ dy}$$

$$M_p = 3.9 \text{ kNm}$$

العزم الذي يؤدي إلى لدونة جزئية،

$$M = 2 \left[ \int_{15}^{25} \sigma_p (25 y) dy + \int_0^{15} \sigma (25 y) dy \right]$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_p} = \frac{y}{15}$$

عوض  $\sigma$  و أجري التكامل لتحصل على  $M = 3.44 \text{ kNm}^2$ .

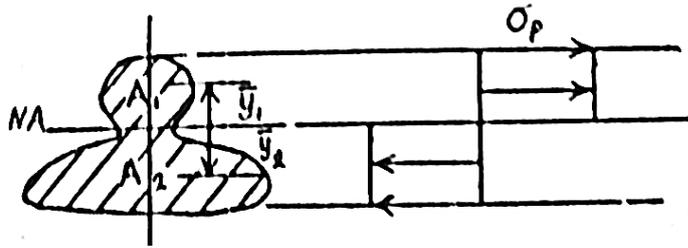
طريقة أخرى (حاول أن تفهم الأرقام التالية)،

$$M = 2 \left\{ 250 \times 25 \times 10 \times 20 + \frac{250}{2} \times 15 \times 25 \times \frac{2}{3} \times 15 \right\} \text{ Nmm}$$

$$M = 3.44 \text{ kNm}$$

مقطع له محور تماثل واحد:

و الآن لنأخذ مقطع متماثل حول المحور الرأسي،



ناتج القوى على المقطع = صفر،

$$\sigma_p A_1 - \sigma_p A_2 = 0$$

$$\therefore A_1 = A_2$$

إذن إذا كان المقطع عبارة عن مفصلة لدنة فإن محور التعادل يقسم المقطع إلي جزئين متساويين

في المساحة. يمكن حساب العزم عند المقطع هكذا

$$\sigma_p A_1 \bar{y}_1 + \sigma_p A_2 \bar{y}_2 = M_p$$

$$\sigma_p \sum_{i=1}^2 A_i \bar{y}_i = M_p$$

أو بشكل عام،

$$M_p = \sigma_p \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i$$

حيث n عدد المساحات الصغيرة في المقطع. سنشير إلى مجموع عزم المساحة الأول حول محور التعادل بمعايير المقطع اللدن و نرمز له بالرمز  $Z_p$  ،

$$Z_p = \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i$$

و بالتالي يمكن كتابة العزم هكذا،

$$M_p = \sigma_p Z_p$$

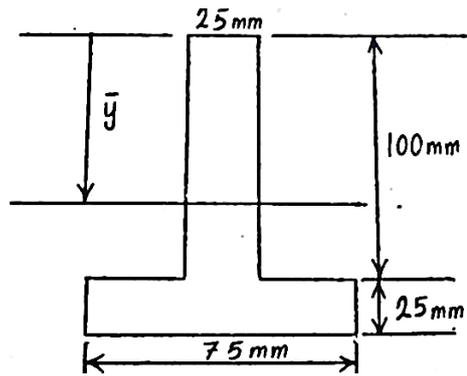
النسبة بين العزم اللدن و العزم المرن تسمى عامل الشكل و يرمز له بالحرف f ،

$$f = \frac{M_p}{M_e} = \frac{\sigma_p Z_p}{\sigma_p Z} = \frac{Z_p}{Z}$$

و هذه النسبة أكبر من 1 .

مثال (2):

مقطع على شكل T أبعاده موضحة في الرسم (3.3) له إجهاد خضوع  $200\text{N/mm}^2$  أوجد عزم اللدونة الكامل و عامل الشكل للمقطع.



الرسم (3.3)

الحل:

أولاً لتحديد محور الانحناء المرن نأخذ العزم الأول للمساحة حول محور يمر بقمة المقطع،

$$(100 \times 25 + 75 \times 25) \bar{y} = 100 \times 25 \times 50 + 75 \times 25 \times 112.5$$

$$\bar{y} = 76.8 \text{ mm}$$

$$I = \frac{25 \times 100^3}{12} + 25 \times 100 (76.8 - 50)^2$$

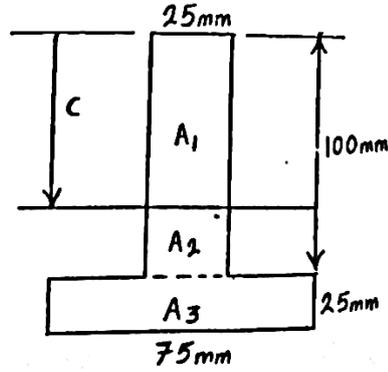
$$+ \frac{75 \times 25^3}{12} + 75 \times 25 (112.5 - 76.8)^2$$

$$I = 6.37 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$Z = \frac{1}{\bar{y}} = \frac{6.37 \cdot 10^6}{76.8} = 82.9 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$M_e = \sigma_p Z = 200 \times 82.9 \cdot 10^3 \text{ Nmm} = 16.6 \text{ kNm}$$

ثانياً حدد محور التعادل في حالة اللدونة الكاملة،



$$A_1 = A_2 + A_3$$

$$2.5C = (100 - C) \times 25 + 75 \times 25$$

$$C = 87.5 \text{ mm}$$

لاحظ أن محور التعادل في حالة المرونة يختلف عنه في حالة اللدونة، فقد نحرك المحور في هذه

الحالة (87.5 - 76.8) أو 10.7 mm إلى أسفل بينما المقطع يتحول من المرونة إلى اللدونة

الكاملة.

$$Z_p = \sum_{i=1}^3 A_i \bar{y}_i$$

$$= 25 \times 87.5 \times \frac{87.5}{2} + (100 - 87.5)^2 \times \frac{25}{2} + 75 \times 25 \times 25$$

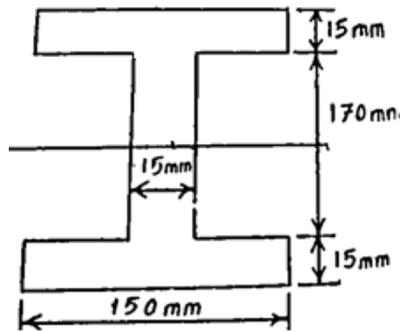
$$Z_p = 144.5 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

عامل الشكل،

$$f = \frac{Z_p}{Z} = \frac{144.5 \cdot 10^3}{82.5 \cdot 10^3} = 1.74$$

مثال (3):

أوجد عامل الشكل للمقطع الموضَّح في الرسم (3.4) أدناه.



الرسم (3.4)

الحل:

في هذه الحالة لا اختلاف بين محور التعادل في المرونة أو اللدونة. و المحور في كل الحالات

يمر بمركز المساحة.

$$I = 2 \left( \frac{150 \times 15^3}{12} + 150 \times 15 \times 97.5^2 \right) + \frac{15 \times 170^3}{12} = 44.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\hat{y} = 100 \text{ mm}$$

$$Z = \frac{I}{\hat{y}} = 447 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$Z_p = \sum_{i=1}^4 A_i \bar{y}_i$$

$$= 2 \left( 150 \times 15 \times 97.5 + 85 \times 15 \times \frac{85}{2} \right)$$

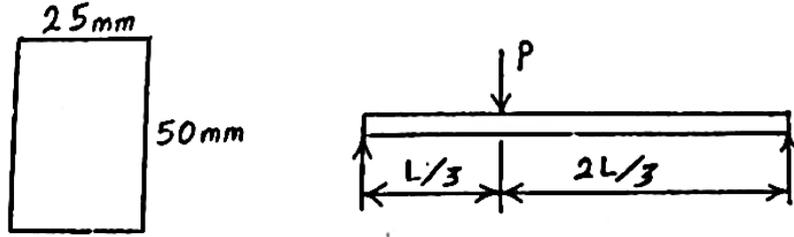
$$Z_p = 524.6.10^3 \text{ mm}^3$$

عامل الشكل،

$$f = \frac{Z_p}{Z} = \frac{524.6.10^3}{447.10^3} = 1.17$$

مثال (4):

العارضة الموضحة في الرسم (3.5) أدناه مصنوعة من الصلب و مقطعا مستطيل  $50 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}$  أوجد الحمل الحدي إذا كان إجهاد الخضوع للمادة  $500 \text{ N/mm}^2$  .  $L = 1 \text{ m}$  .



الرسم (3.5)

الحل:

من معلوماتنا السابقة نعرف أن الحمل الحدي يمكن الحصول عليه باستخدام مخطط عزم الانحناء أو بطريقة الشغل الافتراضي. الحمل الحدي،

$$P_o = 4.5 M_p$$

و من المقطع يمكن الحصول على،

$$Z_p = 2 \times 25 \times 25 \times 12.5 = 15625 \text{ mm}^3$$

$$M_p = \sigma_p Z_p = 500 \times 15625 \text{ Nmm} = 7.8 \text{ kNm}$$

$$\therefore P_o = 4.5 \times 7.8 = 35.1 \text{ kN}$$

### 3.3 تمرين:

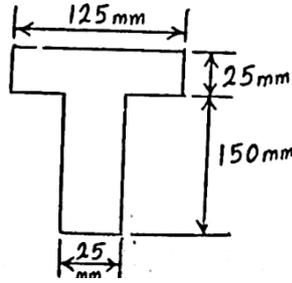
1. أوجد عامل الشكل لمقطع دائري.

Ans.(1.7)

2. أوجد عامل الشكل لمقطع عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع بحيث يكون الحمل في مستوي التماثل الرأسي

Ans.(2.48)

3. أوجد محور التعادل للمقطع كامل اللدونة الموضحة في الرسم أدناه.

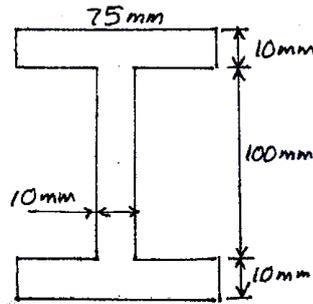


Ans.(137.5 mm من الأسفل)

4. أوجد عزم اللدونة الكاملة لمقطع على شكل مجري عمقه 250mm و عرضه 200mm و سمكه 25 mm . خذ إجهاد الخضوع  $250\text{N/mm}^2$  .

Ans.(343 kNm)

5. في المقطع الموضح أدناه  $y_1 = 47.4\text{mm}$  يمثل الحد الفاصل بين منطقة التشوهات اللدنة و المرنة. أوجد العزم الذي يؤدي إلى ذلك الوضع. خذ إجهاد الخضوع للمادة  $200\text{N/mm}^2$  .



Ans.(20 kNm)

## الفصل الرابع

### نظرية المرونة (1)

### Theory of Elasticity (1)

### الاجهادات المستوية - الإحداثيات الكارتيذية

### (Plane Stresses – Cartesian Coordinates)

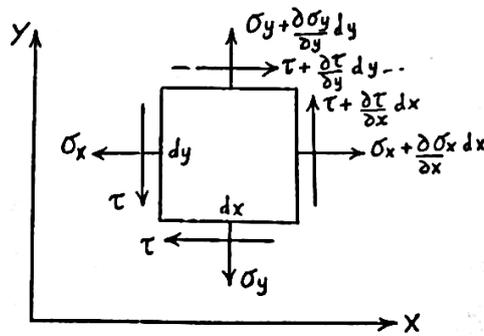
#### 4.1 مدخل:

علم متانة المواد يقوم باستنتاج معادلات أو صيغ للاستخدام العام لحساب الاجهادات و الانفعالات في الأعضاء الهندسية. هذه الصيغ عادة تقوم على مجموعة من الافتراضات. في حالة عدم تحقق هذه الافتراضات لا يجوز استخدام الصيغ الجاهزة و بالتالي يكون البديل هو نظرية المرونة. نظرية المرونة تصبح ضرورية أيضاً في تلك الحالات التي لا تتوفر فيها صيغ جاهزة. و نظرية المرونة عبارة عن مجموعة من المعادلات و هي:-

1. معادلات الاتزان.
2. معادلات الانفعال - الإزاحة.
3. معادلات التوافق.
4. معادلات الإجهاد - الانفعال.
5. الحالات الحدودية أو الطرفية.

#### 4.2 معادلات الاتزان:

خذ عنصراً أبعاده  $dx$  ،  $dy$  ،  $dz$  كما في الرسم (4.1) أدناه.



الرسم (4.1)

مجموع القوى في اتجاه x = صفر،

$$\rightarrow + \sum F_x = 0$$

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left( \tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau dx dz = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

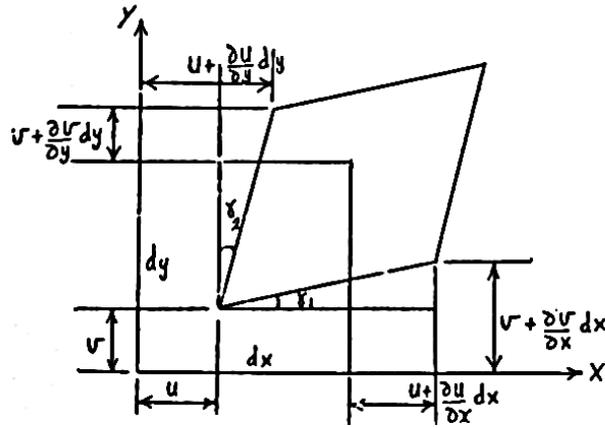
و بالمثل،

$$\uparrow + \sum F_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

### 4.3 معادلات الانفعال - الإزاحة:

لتكن u الإزاحة في اتجاه x و v الإزاحة في اتجاه y، كما في الرسم (4.2).



الرسم (4.2)

$$\epsilon_x = \frac{\left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

$$\epsilon_y = \frac{\left( v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4)$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\gamma_1 = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_2 = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) - u}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\therefore \gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5)$$

#### 4.4 معادلة التوافق:

من المعادلة (5) نحصل على،

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y, \quad \text{و لكن،}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} \quad (6)$$

#### 4.5 معادلات الإجهاد - الانفعال:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} \quad (7)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_x}{E} \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (9)$$

#### 4.6 الحالات الحدودية أو الطرفية:

الحالات الحدودية أو الطرفية تختلف من مسألة لأخرى. لكن أي حل - بغض النظر عن مصدره

- إذا حقق الحالات الحدودية أو الطرفية يصبح حلاً مقبولاً. بالطبع مثل هذا الحل ليس ميسوراً.

فهناك 9 معادلات يجب أن يحققها الحل بالإضافة إلي الحالات الحدودية. لتسهيل الحل نعوض

المعادلات (7) ، (8) ، (9) في المعادلة (6) مع الأخذ في الاعتبار أن  $G = E/2(1-\nu)$  .  
النتيجة هي كما يلي:

$$2(1+\nu)\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2} - \nu\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}$$

لتسهيل حل هذه المعادلة نستخدم دالة  $\phi(x,y)$  تسمى دالة الإجهاد و هي تحقق معادلات الاتزان.  
و الاجهادات بدلالة دالة الإجهاد كما يلي:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \quad (10)$$

فإذا عوضنا هذه الاجهادات في المعادلة السابقة نحصل على،

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0 \quad (11)$$

هذه المعادلة تسمى معادلة البايهارمونك و تكتب باختصار هكذا

$$\nabla^4\phi = \nabla^2\nabla^2\phi = 0$$

حيث أن،

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

أي دالة تحقق معادلة البايهارمونك تسمى دالة إجهاد. و أي دالة إجهاد تحقق الحالات الحدودية  
تصبح حلاً. للأسف أن حل معادلة البايهارمونك ليس أمراً سهلاً.

إن أية دالة تستخدم لحل مسألة اجهادات مستوية يجب أن تحقق المعادلة (11) و تقود إلي

الاجهادات الموضحة في المعادلة (10) و التي تحقق بدورها الحالات الحدودية. بعض دوال

الإجهاد شائعة الاستخدام هي دوال كثيرة الحدود في  $x$  و  $y$  . و فيما يلي نستعرض بعضها.

(أ) دالة إجهاد من الدرجة الأولى:

$$\phi = ax + by$$

الواضح من المعادلة (10)

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau = 0$$

كما أن المعادلة (11) قد تحققت. هذه الدالة مناسبة فقط لتعريف مجال خال من الاجهادات وبالتالي فإن هذه الدالة قليلة الفائدة لحل أي مسألة.

(ب) دالة إجهاد من الدرجة الثانية:

$$\phi = ax^2 + bxy + cy^2$$

من المعادلة (10) نجد أن،

$$\sigma_x = 2c \quad , \quad \sigma_y = 2a \quad , \quad \tau = -b$$

لاحظ أن المعادلة (10) قد تحققت و أن الدالة  $\phi$  تعطي اجهادات منتظمة في عموم الجسم لا تعتمد على  $x$  و  $y$ .

(ج) دالة إجهاد من الدرجة الثالثة:

$$\phi = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

المعادلة (10) تعطي الاجهادات التالية:

$$\sigma_x = 2cx + 6dy$$

$$\sigma_y = 6ax + 2by$$

$$\tau = -2bx - 2cy$$

لاحظ أن المعادلة (11) قد تحققت بدون أي شرط، و أن دالة الإجهاد  $\phi$  تعطي اجهادات تتغير خطياً على الجسم.

(د) دالة إجهاد من الدرجة الرابعة:

$$\phi = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$$

من المعادلة (10) نجد أن معادلات الاجهادات كما يلي:

$$\sigma_x = 2cx^2 + 6dxy + 12ey^2$$

$$\sigma_y = 12ax^2 + 6bxy + 2cy^2$$

$$\tau = -3bx^2 - 4cxy - 3dy^2$$

و عندما يتم تعويض  $\phi$  في المعادلة (11) نجد أن المعادلة تتحقق بشرط و هو:

$$e = -\left(a + \frac{c}{3}\right)$$

و على هذا الأساس تصبح الاجهادات كما يلي:

$$\sigma_x = 2cx^2 + 6dxy - 12ay^2 - 4cy^2$$

بينما تظل كل من  $\sigma_y$  و  $\tau$  كما كانت. و عليه فإن الدالة  $\phi$  تعطي مجال اجهادات من نوع

كثيرة الحدود من الدرجة الثانية.

(هـ) دالة إجهاد من الدرجة الخامسة:

$$\phi = ax^5 + bx^4y + cx^3y^2 + dx^2y^3 + exy^4 + fy^5$$

من المعادلة (9) نحصل على:

$$\sigma_x = 2cx^3 + 6dx^2y + 12exy^2 + 20fy^3$$

$$\sigma_y = 20ax^3 + 12bx^2y + 6cxy^2 + 2dy^3$$

$$\tau = -4bx^3 - 6cx^2y - 6dxy^2 - 4ey^3$$

و في هذه المرة لا تحقق المعادلة (11) إلا بشرطين هما:

$$e = -(5a + c)$$

$$f = -\frac{1}{5}(b + d)$$

و عليه تكون الاجهادات كما يلي:

$$\sigma_x = 2cx^3 + 6dx^2y - 12(5a+c)xy^2 - 4(b+d)y^3$$

$$\sigma_y = 20ax^3 + 12bx^2y + 6cxy^2 + 2dy^3$$

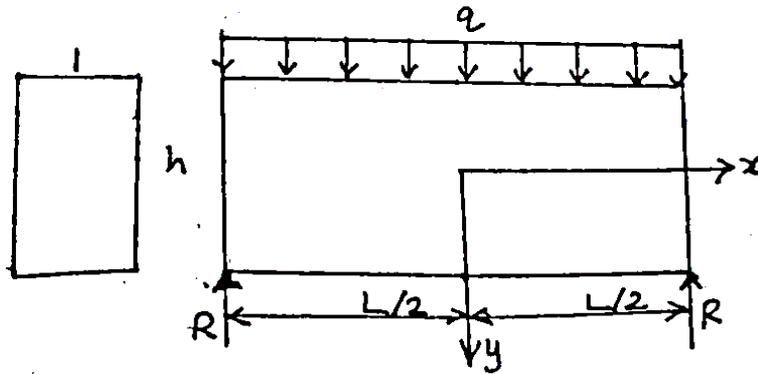
$$\tau = -4bx^3 - 6cx^2y - 6dxy^2 + 4(5a+c)y^3$$

و من الواضح أن الدالة  $\phi$  تعطي مجال عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة الثالثة في  $x$  و  $y$ .  
 يمكن بالطبع مواصلة هذا التسلسل للحصول على دوال للإجهاد من الدرجة السادسة و السابعة  
 ..... الخ بشرط تحقيق المعادلة (11). كما يمكن إضافة دالتين أو أكثر لتكوين دالة جديدة. و  
 بمعنى آخر يمكن تكوين الدوال بحذف بعض الحدود أو إضافة حدود جديدة.

#### 4.7 أمثلة محلولة:

مثال (1):

عارضة مسنودة إسناد بسيط مسلط عليها حمل موزع بانتظام كما في الرسم (4.3) أذناه.



الرسم (4.3)

الحل:

الحالات الحدودية هي،

$$y = \pm \frac{h}{2}, \quad \tau = 0$$

$$y = \frac{h}{2}, \quad \sigma_y = -q, \quad y = -\frac{h}{2}, \quad \sigma_y = 0$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau dy = R = \frac{qL}{2}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y dy \Big|_{x \pm \frac{L}{2}} = 0$$

لاحظ أن عزم الانحناء (وبالتالي  $\sigma_x$ ) قيمة قصوى عند  $x = 0$  و نقل بتغير  $x$  في اتجاهها الموجب و السالب. هذا الحال يمكن حدوثه فقط إذا كانت دالة الإجهاد تحتوي على حدود زوجية في  $x$ . لاحظ أيضاً أن  $\sigma_y$  تتغير من الصفر عند  $y = -\frac{L}{2}$  إلى قيمة قصوى  $-q$  عند  $y = \frac{L}{2}$ . و عليه فإن دالة الإجهاد يجب أن تحتوي على حدود فردية في  $y$ . و من الدوال المتقدمة يمكن اختيار الحدود الزوجية و الفردية في الدوال الجديدة و التي تحقق الشروط آنفة الذكر.

$$\phi = ax^2 + bx^2y + cy^3 + dx^4 + ex^4y + fx^2y^3 + gy^5$$

الدالة  $\phi$  يجب أن تحقق معادلة البايهامونك (11) و بالتالي نجد أن،

$$d = 0, \quad g = -\frac{1}{5}(e + f)$$

من المعادلة (10) نحصل على الاجهادات،

$$\sigma_x = 6cy + 6fx^2y - 4(e + f)y^3$$

$$\sigma_y = 2a + 2by + 12ex^2y + 2fy^3$$

$$\tau = -2bx - 4ex^3 - 6fxy^2$$

عند فحص الحالات الحدودية نجد أن  $\sigma_y$  يجب أن تكون مستقلة عن  $x$ ، و بالتالي فإن

$e = 0$ ، و من ثم يمكن تبسيط صيغ الاجهادات كما يلي:

$$\sigma_x = 6cy + 6fx^2y - 4fy^3$$

$$\sigma_y = 2a + 2by + 2fy^3$$

$$\tau = -2bx - 6fxy^2$$

و الآن نطبق الحالات الحدودية،

$$y = -\frac{h}{2}, \quad \sigma_y = 0$$

$$\therefore a - \frac{bh}{2} - \frac{f h^3}{8} = 0 \quad (12)$$

$$y = \frac{h}{2}, \quad \sigma_y = -q$$

$$\therefore a + \frac{bh}{2} + \frac{f h^3}{8} = -\frac{q}{2} \quad (13)$$

$$y = \pm \frac{h}{2}, \quad \tau = 0 \quad \therefore b = -\frac{3}{4} h^2 f$$

$$f = \frac{q}{h^3} \quad \text{عوض في (12) لنحصل على،}$$

$$b = -\frac{3q}{4h} \quad \text{و بالتالي،}$$

$$x = \frac{L}{2}, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x y dy = 0$$

و منها نحصل على،

$$c = \frac{20}{240I} (2h^2 - 5L^2)$$

حيث أن  $I = h^3/12$  و هي العزم الثاني للمساحة عندما يكون العرض وحدة واحدة.

و بناء على ما تقدم يمكن كتابة الاجهادات كما يلي:

$$\sigma_x = \frac{q}{8I} (4x^2 - L^2)y + \frac{q}{60I} (3h^2 y - 20y^3) \quad (14)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{24I} (4y^3 - 3h^2 y - h^3) \quad (15)$$

$$\tau = \frac{qx}{8I} (h^2 - 4y^2) \quad (16)$$

الحل المتحصل عليه من متانة المواد هو،

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y = \frac{q}{8I} (4x^2 - L^2)y \quad (17)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (18)$$

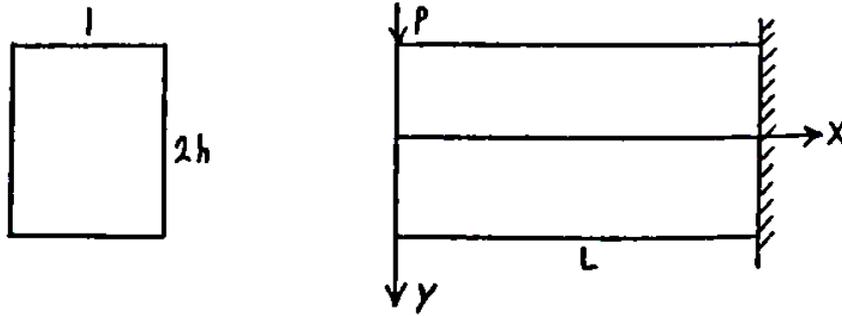
$$\tau = F \frac{A\bar{y}}{zI} = \frac{qx}{8I} (h^2 - 4y^2) \quad (19)$$

المقارنة بين المعادلتين (14) و (17) توضح أن حل متانة المواد عبارة عن الحد الأول في حل نظرية المرنة. أما الحد الثاني و هو  $\frac{q}{60I}(3h^2y - 20y^3)$  فهو حد التصحيح لحل متانة المواد. كنا في متانة المواد قد افترضنا أن المقاطع المستوية تظل مستوية بعد الانحناء. هذا الافتراض ليس صحيحاً على الإطلاق، و نتيجة لذلك فإن حل متانة المواد بنقصه الحد المشار إليه. و من الواضح أن هذا الحد يكون صغيراً عندما تكون  $L \gg h$  و في هذه الحالة يكون حل متانة المواد مضبوطاً بما فيه الكفاية.

هذا المثال البسيط يوضح كيف يمكن استخدام نظرية المرنة لتوسيع مدارك الطالب فيما يخص توزيع الاجهادات في المسائل التي تتعلق بالاجهادات المستوية.

مثال (2):

إذا كانت دالة الإجهاد للعارضة الوتدية الموضحة في الرسم (4.4) أدناه هي:  $\phi = axy + bxy^3$  حيث أن  $a$  و  $b$  ثابتان. قارن بين حل متانة المواد و نظرية المرنة.



الرسم (4.4)

الحل:

(أ) حل متانة المواد:

$$u = 0, \quad v = -\frac{PL^2}{2EI}x + \frac{P}{6EI}x^3 + \frac{PL^3}{3EI}$$

(ب) حل نظرية المرونة:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 6bxy$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

$$\tau = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -a - 3by^2$$

الحالات الحدودية،

$$y = \pm h, \quad \tau = 0, \quad \therefore a = -3bh^2 \quad (20)$$

$$\int_{-h}^h \tau dy = -P, \quad \therefore -2ah - 2bh^3 = -P \quad (21)$$

من المعادلة (20) و (21)،

$$a = \frac{3P}{4h}, \quad b = -\frac{P}{4h^3}$$

إذن الاجهادات هي،

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2h^3} xy$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau = -\frac{3P}{4h^3} (h^2 - y^2)$$

و بعد مقارنة الاجهادات المتحصل عليها من متانة المواد و نظرية المرونة نجد أنه لا اختلاف بينهما.

و الآن نتحول للإزاحات:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = -\frac{P}{EI} xy$$

حيث أن  $I = 2h^3/3$ ،

$$\therefore u = -\frac{Px^2}{2EI}y + f_1(y) \quad (22)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} = \frac{\nu P}{E}xy$$

$$\therefore v = -\frac{\nu P}{2EI}xy^2 + f_2(x) \quad (23)$$

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau}{G} \quad (24)$$

$$\frac{\nu P}{2EI}y^2 + \frac{d}{dx}f_2(x) - \frac{P}{2EI}x^2 + \frac{d}{dy}f_1(y) = -\frac{P}{2GI}(h^2 - y^2)$$

و هذه المعادلة يمكن كتابتها هكذا،

$$\left[ -\frac{P}{2EI}x^2 + \frac{d}{dx}f_2(x) \right] + \left[ \frac{\nu P}{2EI}y^2 + \frac{d}{dy}f_1(y) - \frac{Py^2}{2GI} \right] = -\frac{Ph^2}{2GI}$$

هذه المعادلة لا تتحقق إلا إذا كان كل قوس يساوي ثابتاً. أي أن،

$$-\frac{P}{2EI}x^2 + \frac{d}{dx}f_2(x) = K_1 \quad (25)$$

$$\frac{\nu P}{2EI}y^2 + \frac{d}{dy}f_1(y) - \frac{Py^2}{2GI} = K_2 \quad (26)$$

حيث أن،

$$K_1 + K_2 = -\frac{Ph^2}{2GI} \quad (27)$$

من المعادلة (25) نحصل على،

$$f_2(x) = K_1x + \frac{P}{6EI}x^3 + K_3$$

و من المعادلة (26)،

$$f_1(y) = K_2y - \frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6GI}y^3 + K_4$$

عوض في المعادلتين (22) و (23)،

$$u = -\frac{P}{2EI}x^2y + K_2y - \frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6GI}y^3 + K_4$$

$$v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + K_1x + \frac{P}{6EI}x^3 + K_3$$

$$x = L, \quad y = 0, \quad \therefore u = v = 0 \quad \therefore K_4 = 0$$

$$K_3 = -K_1L - \frac{PL^3}{6EI}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\nu P}{2EI}y^2 + K_1 + \frac{P}{2EI}x^2$$

$$x = L, \quad y = 0, \quad \therefore \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \therefore K_1 = -\frac{PL^2}{2EI}$$

و بالتالي،

$$K_3 = \frac{PL^3}{3EI}$$

ومن المعادلة (27)،

$$K_2 = \frac{PL^2}{2EI} - \frac{Ph^2}{2GI}$$

و هكذا تصبح الإزاحات كما يلي:

$$u = -\frac{P}{2EI}x^2y + \left(\frac{PL^2}{2EI} - \frac{Ph^2}{2GI}\right)y - \frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6GI}y^3$$

$$v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 - \frac{PL^2}{2EI}x + \frac{P}{6EI}x^3 + \frac{PL^3}{3EI}$$

و إذا أخذنا شريحة في الوسط ( $y = 0$ ) نجد أن،

$$u = 0$$

$$v = -\frac{PL^2}{2EI}x + \frac{P}{6EI}x^3 + \frac{PL^3}{3EI}$$

و هي كما تتبأت بها متانة المواد.

#### 4.8 تمرين:

1. مسألة اجهادات مستوية في حيز مستطيل  $0 \leq x \leq L$  و  $-h \leq y \leq h$  حيث أن  $h$  و  $L$  ثابتان .  
كانت الاجهادات كما يلي:

$$\sigma_x = \frac{qx^3y}{4h^3} + \frac{q}{4h^3} \left( -2xy^3 + \frac{6}{5}h^2xy \right)$$

$$\sigma_y = -\frac{qx}{2} + qx \left( \frac{y^3}{4h^3} - \frac{3y}{4h} \right)$$

$$\tau = \frac{3qx^2}{8h^3} (h^2 - y^2) - \frac{q}{8h^3} (h^4 - y^4) + \frac{q}{4h^3} \cdot \frac{3h^2}{5} (h^2 - y^2)$$

حيث أن  $q$  ثابت .

برهن أن هذه الاجهادات تحقق الاتزان و التوافق .

2. طبق دالة الإجهاد التالية على الحيز  $0 \leq y \leq d$   $0 \leq x$ . حدد أي نوع من المسائل يمكن حلها  
بدالة الإجهاد المذكورة

$$\phi = -\frac{P}{d^3} xy^2 (3d - 2y)$$

(هذه مسألة عارضة وتدنية عرضها وحدة واحدة مسلط عليها حمل  $P$  في الطرف الحر)

3. إذا كان الحيز المستوي المعرف بـ  $0 \leq x \leq L$  و  $0 \leq y \leq h$  و الدالة

$$\phi = \frac{q}{20h^3} [10x^2(2y^3 - 3hy^2) - 2y^2(2y^3 - 5hy^2 + 4h^2y - h^3)]$$

أولاً برهن أن الدالة هي دالة إجهاد ثم حدد الحالات الحدودية و صف المسألة التي تكون الدالة  
حلاً لها.

4. حل مسألة انفعالات مستوية تم الحصول عليه من دالة الإجهاد التالية

$$\phi = Ayx^3$$

استنتج الاجهادات و من ثم الانفعالات .

$$\left( \begin{array}{l} \sigma_x = 0 , \sigma_y = 6xy , \quad \tau = -3Ax^2y, \\ \epsilon_x = -\frac{6A}{E}xy , \epsilon_y = \frac{6A}{E}xy , \quad \gamma = -\frac{3A}{G}x^2y \end{array} \right)$$

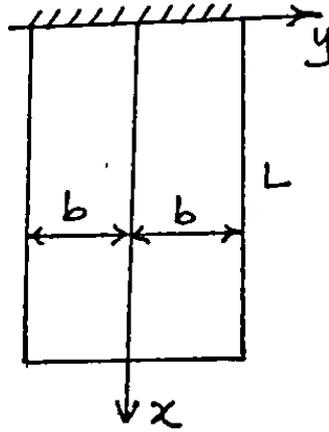
5. شريحة مستوية معلقة من أحد طرفيها ( $x = 0$ ) كما في الرسم . كثافة الشريحة  $\rho$  . هب أن

سمك الشريحة وحدة واحدة و افترض حالة اجهادات مستوية في المستوي ( $x, y$ ) .

(أ) استنتج صيغة للإجهاد العمودي  $\sigma_x$  .

(ب) استنتج صيغة للإزاحتين  $u$  و  $v$  بدلالة خواص الشريحة. خذ  $u = v = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

عند  $x = y = 0$  .



$$Ans. (\sigma_x = \rho g(L-x) , \sigma_y = \tau = 0)$$

$$u = \frac{\rho g}{E} \left[ Lx - \frac{x^2}{2} - \frac{v}{2}y^2 \right]$$

$$v = -\frac{v\rho g}{E}(L-x)y$$

6. عارضة وتدية طولها  $L$  ، مقطعها مستطيل عمقه  $2h$  و عرضه وحدة واحدة . عند الطرف

الحر سطر حمل شد محوري  $P_1$  و حمل عرضي  $P_2$  . لقد وجد أن دالة الإجهاد كما يلي:

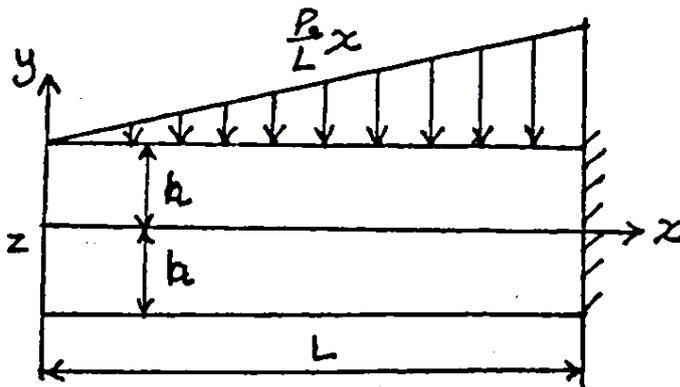
$$\phi = \frac{1}{4h} \left[ 3P_2xy - \frac{P_2}{h^2}xy^3 + P_1y^2 \right]$$

حيث أن  $x$  و  $y$  هما الاحداثيان على طول العارضة و عمقها على التوالي، و نقطة الأصل في مركز المساحة. تحقق من أن  $\phi$  هي الحل.

(الاجهادات تحقق الحالات الحدودية و بالتالي فإن  $\phi$  هي الحل)

7. استنتج صيغ للإجهادات في العارضة الوتدية الموضحة في الرسم أدناه. دالة الإجهاد كما يلي:

$$\phi = c_1 xy + c_2 \frac{x^3}{6} + c_3 \frac{x^3 y}{6} + c_4 \frac{xy^3}{6} + c_5 \frac{x^3 y^3}{9} + c_6 \frac{xy^5}{20}$$



$$Ans. \left\{ \sigma_x = \frac{P_o}{4Lh^3} \left( x^3 y - 2xy^3 + \frac{18}{25} h^2 xy \right) \right.$$

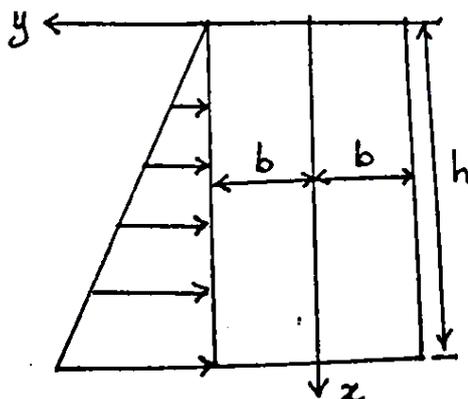
$$\sigma_y = -\frac{P_o}{4Lh^3} (xy^3 + 3h^2 xy + 3h^3 x)$$

$$\tau = \frac{P_o}{40Lh^3} \left( y^4 - 15x^2 y^2 - \frac{6}{5} h^2 y^2 + 15h^2 x^2 + \frac{h^4}{5} \right) \left. \right\}$$

8. خزان يتعرض لضغط الماء الذي يزداد خطياً مع العمق. عرض الخزان  $2b$  و ارتفاعه  $h$  (أنظر

الرسم) باستخدام دالة الإجهاد التالية، أوجد صيغ الاجهادات

$$\phi = A_1 xy + A_2 x^3 + A_3 x^3 y + A_4 xy^3 + A_5 (5x^3 y^3 - 3xy^5)$$

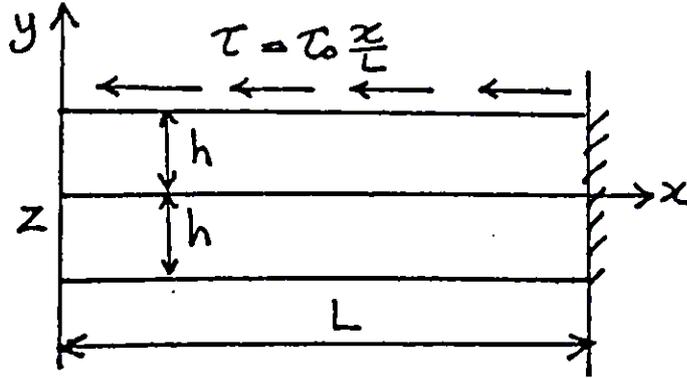


(نفس إجابات المسألة (7) مع العلم بأن  $P_o = \rho gh$ )

9. العارضة الوتدية الموضحة في الرسم أدناه مسلط عليها إجهاد قص موزع بانتظام على السطح

العلوي . إذا كانت الدالة التالية هي الحل ، أوجد قيم الثوابت  $C_i (i=1,2,\dots,8)$  .

$$\phi = c_1 y^2 + c_2 y^3 + c_3 y^4 + c_5 x^2 + c_6 x^2 y + c_7 x^2 y^2 + c_8 x^2 y^3$$



$$\text{Ans.} \left\{ \begin{array}{l} C_1 = -\frac{\tau_o h}{12L} , \quad C_2 = -\frac{\tau_o}{20L} \quad C_3 = \frac{\tau_o}{24Lh} , \quad C_4 = \frac{\tau_o}{40Lh^2} \\ C_5 = \frac{\tau_o h}{8L} , \quad C_6 = \frac{\tau_o}{8L} \quad C_7 = -\frac{\tau_o}{8Lh} , \quad C_8 = -\frac{\tau_o}{8Lh^2} \end{array} \right\}$$

10. خذ الدالة الآتية

$$\phi = c_1 x^5 + c_2 x^4 y + c_3 x^3 y^2 + c_4 x^2 y^3 + c_5 x y^4 + c_6 y^5$$

حيث أن  $c_i$  ثابت.

(أ) حدد الشرط الذي يجب أن تحققه الدالة لكل تصبح دالة إجهاد.

(ب) استنتج معادلات الإجهاد.

(ج) إذا كان  $c_1 = c_3 = c_4 = c_6 = 1$  ، خصص معادلات الإجهاد.

$$\text{Ans.} \{ 5c_1 + c_3 + c_5 = 0, \quad c_2 + c_4 + 5c_6 = 0,$$

$$\sigma_x = 20x^3 - 72x^2 y + 6xy^2 + 2y^3$$

$$\sigma_y = 2x^3 + 6x^2 y + 12xy^2 - 120y^3$$

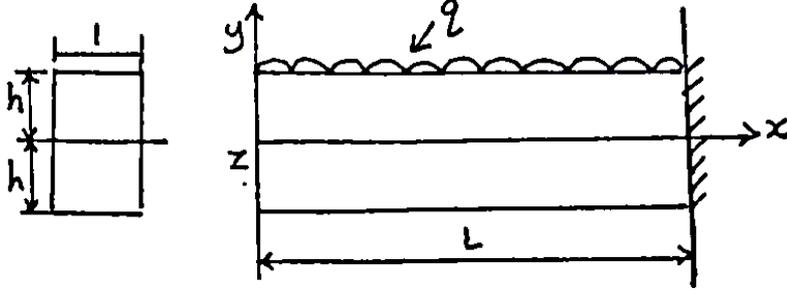
$$\tau = 24x^3 - 6x^2 y - 6xy^2 - 4y^3 \}$$

11. الدالة التالية هي دالة إجهاد للعارضة الوتدية الموضحة في الرسم

$$\phi = Ax^2 + Bx^2y + Cy^3 + Dy^5 + Ex^2y^3$$

حيث أن  $E, D, C, B, A$  ثابت.

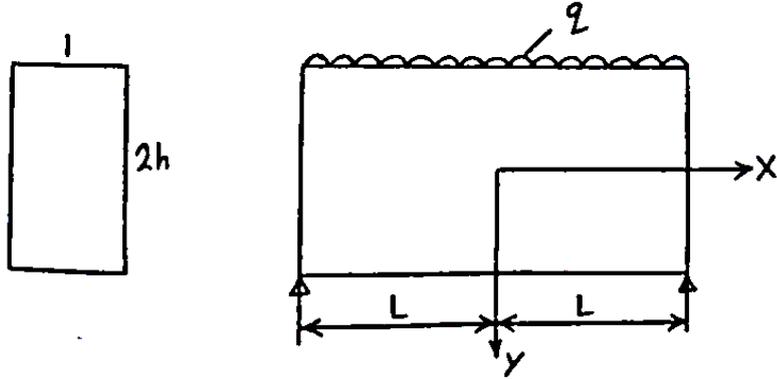
أوجد قيم الثوابت المذكورة و من ثم الاجهادات.



$$\text{Ans. } \left\{ A = -\frac{q}{4}, \quad B = -\frac{3q}{8h}, \quad C = \frac{q}{20h}, \quad D = -\frac{q}{40h^3}, \quad E = \frac{q}{8h^3} \right\}$$

12. قارن بين حلي متانة المواد و نظرية المرونة للعارضة الموضحة أدناه.

$$\phi = ax^2 + bx^2y + cy^3 + dx^2y^3 \quad \text{خذ}$$



13. أيّاً من هذه الدوال دالة إجهاد:

$$\phi = x^2y^2 - \frac{1}{3}y^4 \quad \text{(iii)} \quad \phi = x^5y^3 \quad \text{(ii)} \quad \phi = x^2y \quad \text{(i)}$$

$$\phi = \sin \lambda y \cos \lambda x \quad \text{(v)} \quad \phi = \cos \lambda y \cosh \lambda x \quad \text{(iv)}$$

14. إذا كانت كل من الدالتين التاليتين دالة إجهاد ، أوجد قيمة الثابت **a**

$$\phi = x \cosh 3y \cos ax \quad \text{(ii)} \quad \phi = x^4 - ay^4 \quad \text{(i)}$$

15. الانفعالات في حيز  $(x, y)$  كانت كما يلي:-

$$\epsilon_x = axy, \quad \epsilon_y = by^3, \quad \gamma = c - dy^2$$

حيث أن  $a$  ،  $b$  و  $c$  ثوابت . هل هذه الانفعالات تصف حالة إجهاد مستوية؟

(نعم)

16. خذ الانفعالات:

$$\epsilon_x = axy^2, \quad \epsilon_y = bx^2y, \quad \gamma = 0$$

هل هذه الانفعالات تصف حالة إجهادات مستوية.

(لا)

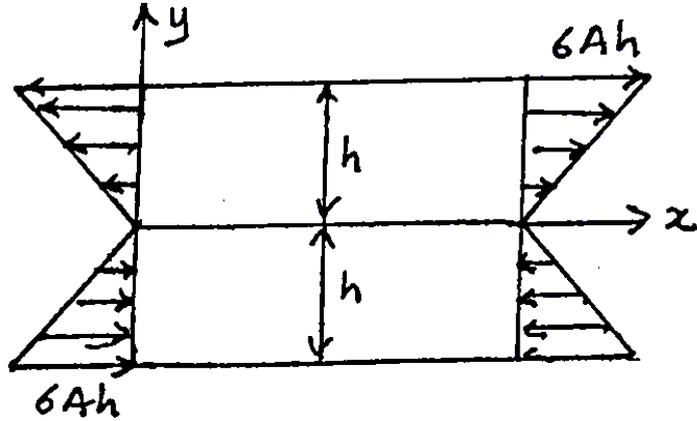
17. إذا كانت الدالة التالية دالة إجهاد لحالة إجهادات مستوية ، أوجد العلاقة بين  $A$  و  $B$ .

$$\phi = Axy^4 + Bx^3y^2$$

Ans.( $A = -B$ )

18. إذا كانت الدالة  $\phi = Ay^3$  دالة إجهاد و حل للمسألة المحدودة بالحيز  $x \geq 0$  ،

$-h \leq y \leq h$  ، استعن برسم توضيحي لوصف حالة الإجهاد.



الفصل الخامس

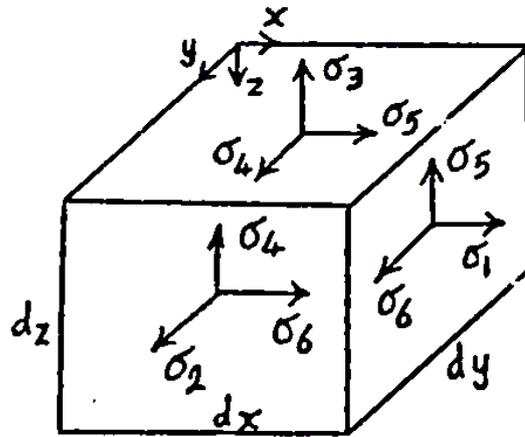
نظرية المرونة (2)

Theory of Elasticity (2)

نظام الاجهادات الثلاثية - الإحداثيات الكارتيزية

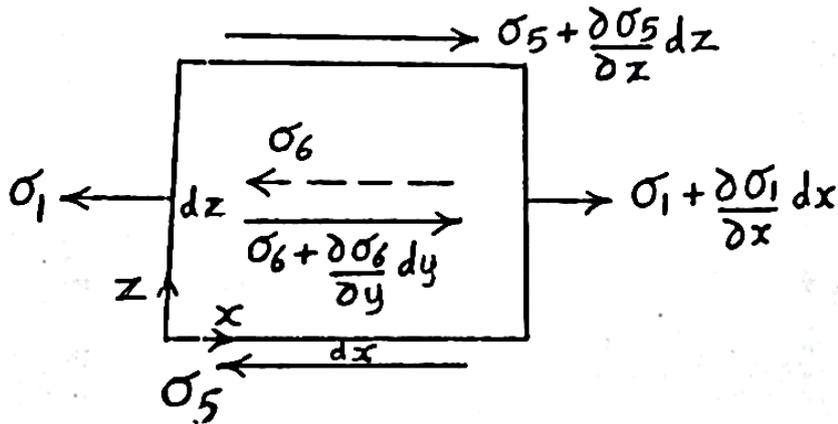
(Three Dimensional Stresses System)

5.1 معادلة الاتزان:



الرسم (5.1a) أدناه

مجموع القوي في اتجاه x = صفر



الرسم (5.1b) أدناه

$$\rightarrow + \sum F_x = 0$$

$$\left(\sigma_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_1 dydz + \left(\sigma_6 + \frac{\partial \sigma_6}{\partial y} dy\right) dx dz - \sigma_6 dx dz + \left(\sigma_5 + \frac{\partial \sigma_5}{\partial z} dz\right) dx dy - \sigma_5 dx dy = 0$$

بعد الترتيب نحصل على

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_6}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_5}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

و من معادلتى الاتزان في اتجاه  $y$  و  $x$  نحصل على

$$\frac{\partial \sigma_6}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_4}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_5}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_4}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

## 5.2 معادلات الانفعال - الإزاحة :

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5)$$

$$\epsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (6)$$

$$\epsilon_6 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7)$$

$$\epsilon_5 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (8)$$

$$\epsilon_4 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (9)$$

حيث أن  $u$  ،  $v$  و  $w$  هي الإزاحات في اتجاه  $x$  ،  $y$  و  $z$  على التوالي

## 5.3 معادلات الإجهاد - الانفعال:

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu \sigma_2}{E} - \frac{\nu \sigma_3}{E} \quad (10)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_3}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E} \quad (11)$$

$$\epsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E} \quad (12)$$

$$\epsilon_6 = \frac{\sigma_6}{G} \quad (13)$$

$$\epsilon_5 = \frac{\sigma_5}{G} \quad (14)$$

$$\epsilon_4 = \frac{\sigma_4}{G} \quad (15)$$

**5.4 معادلة التوافق (6 معادلات):**

استنتجها لوحدها إن شئت ، أو اطلع عليها في أحد المراجع المذكورة في نهاية هذه المذكرة.

## الفصل السادس

### الألواح (1)

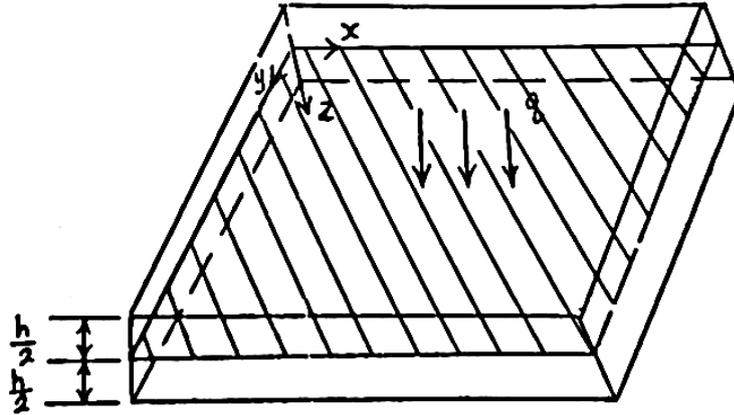
### (Plates 1)

### الألواح المستطيلة

### (Rectangular Plates)

#### 6.1 مدخل:

سنقوم في هذا الفصل بتطبيق نظرية المرونة لحالة الاجهادات الثلاثية - الكارتيزية - لتحليل لوح مستطيل مسلط عليه حمل عرضي. أنظر الرسم (6.1) أدناه.



الرسم (6.1)

السطح المظلل هو السطح الوسيط.

$$\epsilon_3 = 0$$

سنفرض أن،

و سنقوم باستخدام مصطلح ناتج الاجهادات N و العزم M بدلاً من الإجهاد في كتابة معادلة الاتزان.

$$N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i dz \quad (i=1,2,6)$$

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i z dz \quad (i=1,2,6)$$

$$[Q_1, Q_2] = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_5, \sigma_4) dz$$

خذ المعادلة (1) فصل نظرية المرونة (2) و أجري عملية التكامل بين الحدين

$$. z = h/2, z = -h/2$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_6}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_5}{\partial z} dz = 0$$

و نسبة لأنّ التفاضل و التكامل بالنسبة لمتغيرين مختلفين لا مانع من تقديم التفاضل على التكامل.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_6 dz + [\sigma_5]_{-h/2}^{h/2} = 0$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

نفس الإجراء على المعادلتين (2) و (3) في الفصل المذكور يقود إلي،

$$\frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + q = 0 \quad (3)$$

(المعادلة الأخيرة تحتاج إلي عناية خاصة و وعي لاستنتاجها).

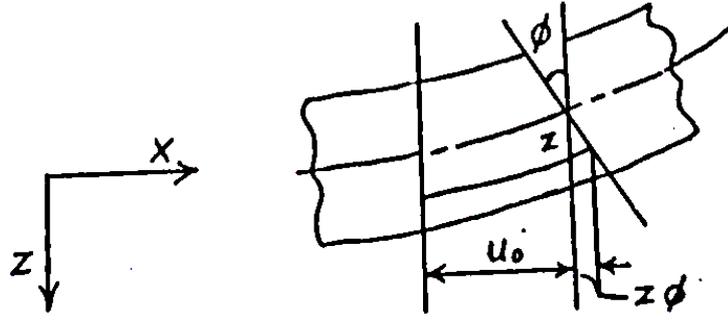
أما إذا ضربنا كل من المعادلتين (1) و (2) -الفصل (2) - في z و قمنا بعملية التكامل فإننا

نحصل على:

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_6}{\partial y} - Q_1 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial M_6}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - Q_2 = 0 \quad (5)$$

و الآن نتحول إلي الإزاحات، أنظر الرسم (6.2) أدناه.



الرسم (6.2)

نلاحظ الإزاحة في اتجاه المحور x كما يلي:

$$u = u_0 + z\phi$$

حيث أن  $\phi(x, y)$  هي زاوية الدوران حول المحور y و  $u_0(x, y)$  هي إزاحة المستوي الوسيط. و بنفس

الطريقة نحصل على  $v = v_0 + z\psi$ .

حيث أن  $v_0(x, y)$  هي إزاحة المستوي الوسيط في اتجاه y و  $\psi(x, y)$  هي زاوية الدوران حول

المحور x.

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\epsilon_3 = 0$$

$$\epsilon_6 = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + z \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

$$\epsilon_5 = \frac{\partial w}{\partial x} + \phi$$

$$\epsilon_4 = \frac{\partial w}{\partial y} + \psi$$

من المعادلات (10-15) - فصل نظرية المرنة (2) - نحصل على معادلات الإجهاد الانفعال

مع تجاهل  $\sigma_3$ ،

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \epsilon_1 + \epsilon_2)$$

$$\sigma_6 = G \epsilon_6$$

$$\sigma_5 = G \epsilon_5$$

$$\sigma_4 = G \epsilon_4$$

إذا عوّضنا للانفعالات نحصل على،

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u_o}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_o}{\partial y} + z \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right]$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \nu \frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{\partial v_o}{\partial y} + z \left( \nu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right]$$

$$\sigma_6 = G \left[ \frac{\partial v_o}{\partial x} + \frac{\partial u_o}{\partial y} + z \left( \nu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right]$$

$$\sigma_5 = G \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right]$$

$$\sigma_4 = G \left[ \frac{\partial w}{\partial y} + \psi \right]$$

و من هذه المعادلات نحصل على،

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u_o}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_o}{\partial y} \right]$$

$$N_2 = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \nu \frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{\partial v_o}{\partial y} \right]$$

$$N_6 = Gh \left[ \frac{\partial v_o}{\partial x} + \frac{\partial u_o}{\partial y} \right]$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]$$

$$M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \nu \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]$$

$$M_6 = \frac{Gh^3}{12} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]$$

$$Q_1 = Gh \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right]$$

$$Q_2 = Gh \left[ \frac{\partial w}{\partial y} + \psi \right]$$

إذا كانت التشوهات صغيرة أو الانحراف صغير أو التحليل خطي فإنَّ،

$$u_o = v_o = N_1 = N_2 = N_6 = 0$$

و إذا كان اللوح رقيق فإنه يمكن تجاهل اجهدات القص العرضية  $Q_1 = Q_2 = 0$

أي أنَّ،

$$\phi = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \psi = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

و إذا كان هذا هو الحال فإنَّ،

$$M_1 = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_2 = -D \left[ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_6 = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

حيث أنَّ،

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

أما معادلات الاتزان فإنها تصبح،

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_6}{\partial y} - Q_1 = 0$$

$$\frac{\partial M_6}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - Q_2 = 0$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + q = 0$$

فاضل المعادلة الأولى بالنسبة لـ  $y$  و فاضل الثانية بالنسبة لـ  $x$  و أجمعهما معاً .

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} \right) = 0$$

عوّض فيها معادلة الاتزان الثالثة لتحصل على،

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + q = 0$$

و إذا تم تعويض  $M_1$  و  $M_2$  و  $M_3$  تصبح المعادلة،

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

و تكتب اختصاراً هكذا،

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}$$

إذن لو استطعنا حل هذه المعادلة فإننا سنحصل على دالة الانحراف و التي منها يمكن حساب

العزوم و بالتالي الاجهادات. و الاجهادات تحسب كما يلي:

لقد برهنا من قبل أن

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u_o}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_o}{\partial y} + z \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right]$$

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u_o}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_o}{\partial y} \right]$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]$$

من هذه المعادلات نستخلص أنّ،

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{h} + \frac{12M_1}{h^3} z$$

و إذا كان  $N_1 = 0$  ،  $z = \pm \frac{h}{2}$  فإن،

$$\hat{\sigma}_1 = \pm \frac{6M_1}{h^2}$$

$$\hat{\sigma}_2 = \pm \frac{6M_2}{h^2}$$

$$\hat{\sigma}_6 = \pm \frac{6M_6}{h^2}$$

بالمثل

## 6.2 أمثلة محلولة:

مثال (1):

لوح مربع عرضه  $a$  و سمكه  $h$  مسنود إسناد بسيط و مسلط عليه حمل جيبى.

$$q = q_o \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

أوجد الانحراف الأقصى.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

الحل المقبول الذي يحقق الحالات الحدودية،

$$w = W \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

و بعد التعويض نحصل على المجهول  $W$ ،

$$\begin{aligned} \frac{W\pi^4}{a^4} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + 2 \frac{W\pi^4}{a^4} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \\ + \frac{W\pi^4}{a^4} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} = \frac{q_o}{D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \end{aligned}$$

$$\therefore W = \frac{a^4}{4\pi^4} \frac{q_o}{D}$$

مثال (2):

لوح مستطيل طوله  $a$  و عرضه  $b$  و سمكه  $h$  مسنود إسناد بسيط و مسلط عليه حمل موزع

باننتظام معدله  $q_o$ . أوجد الانحراف و الاجهادات القصوى.

الحل:

نعبر عن الحمل باستخدام متسلسلة فوريير كما يلي:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

حيث أن،

$$q_{mn} = \frac{4q_o}{ab} \int_0^b \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

$$q_{mn} = \frac{4q_o}{\pi^2 mn} (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi)$$

$$q_{mn} = \begin{cases} \frac{16q_o}{\pi^2 mn} & \text{for } m \text{ and } n \text{ odd} \\ 0 & \text{for } m \text{ and } n \text{ even} \end{cases}$$

الحل الذي يحقق الحالات الحدودية،

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

عوض في المعادلة،

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}$$

لتحصل على،

$$W_{mn} = \frac{1}{\pi^4 D \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}$$

$$M_1 = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

يمكن كتابة  $M_1$  كما يلي:

$$M_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

و بالتالي نحصل على،

$$M_{mn} = \pi^2 D \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \nu \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] W_{mn}$$

و بالمثل يمكن كتابة الصيغة التالية:

$$M_2 = -D \left[ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

و عليه نحصل على،

$$M_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \pi^2 D \left[ \nu \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi x}{b}$$

و كذلك،

$$M_6 = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$M_6 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -\pi^2 D(1-\nu) \frac{mn}{ab} W_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi x}{b}$$

و القيم القصوى لكل من  $w$  و  $M_1$  في وسط اللوح  $x = \frac{a}{2}$  ,  $y = \frac{b}{2}$  هي:

$$\hat{w} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$\hat{M}_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

و إذا كان اللوح مربعاً فإن  $b = a$  و تصبح المعادلات السابقة كما يلي:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}$$

$$W_{mn} = \frac{a^4}{\pi^4 D (m^2 + n^2)^2} q_{mn}$$

$$M_{mn} = \frac{\pi^2 D}{a^2} [m^2 + \nu n^2] W_{mn}$$

مثال (3):

لوح مربع طول ضلعه 100 mm و سمكه 5mm مسنود إسناد بسيط و مسلط عليه حمل موزع بانتظام معدله  $0.4 \text{ N/mm}^2$  . إذا كانت  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$  و  $\nu = 0.3$  ، أوجد الانحراف

الأقصى و الإجهاد الأقصى .

الحل:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{200.10^3 \times 5^3}{12(1-0.3^2)} = 2.29.10^6 \text{ Nmm}$$

$$q_{mn} = \frac{16q_o}{\pi^2 mn} = \frac{16 \times 0.4}{\pi^2 mn} = \frac{0.6485}{mn} \quad (1)$$

$$W_{mn} = \frac{a^4}{\pi^4 D (m^2 + n^2)^2} q_{mn}$$

$$W_{mn} = \frac{100^4}{\pi^4 \times 2.29 \cdot 10^6 (m^2 + n^2)^2} q_{mn} = \frac{223 \cdot 10^6}{(m^2 + n^2)^2} q_{mn} \quad (2)$$

$$M_{mn} = \frac{\pi^2 D}{a^2} (m^2 + n^2) W_{mn}$$

$$M_{mn} = \frac{\pi^2 \times 2.29 \cdot 10^6}{100^2} (m^2 + 0.3n^2) W_{mn}$$

$$M_{mn} = 2260 (m^2 + 0.3n^2) W_{mn} \quad (3)$$

القيم في وسط اللوح،

$$w_c = W_{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (4)$$

$$BM = M_{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (5)$$

للحصول على الحل، اتبع الخطوات التالية :

1. أعطي قيمة لكل من  $m$  و  $n$ .
2. أحسب  $q_{mn}$  من المعادلة (1).
3. أحسب  $W_{mn}$  من المعادلة (2).
4. أحسب  $M_{mn}$  من المعادلة (3).
5. أحسب  $w_c$  من المعادلة (4).
6. أحسب  $BM$  من المعادلة (5).
7. كرر الخطوات من 1 و حتى 6 لكل من  $m, n = 1, 3, 5, \dots$
8. أحسب الكميات المطلوبة بجمع المتحصل عليها لقيم  $m$  و  $n$  المستخدمة،

$$w = \sum w_c$$

$$M_1 = \sum BM$$

$$\sigma_1 = \frac{6\sigma_1}{h^2}$$

طبعاً من الأسهل برمجة هذه الخطوات و تصميم البرنامج بحيث تكون المدخلات في ملف و المخرجات في ملف آخر. و بهذه الطريقة يمكن حل المسائل و الحصول على نتائج مضبوطة في خلال أقل من ثانية من الزمن. فيما يلي تجد الحل الذي يمكن الحصول عليه .

M	N	Qmn	Wmn	Mmn	wc	BM
1	1	.64793	.07252	213.19	.07252	213.19
1	3	.21598	.00097	8.09	-.00097	-8.09
1	5	.12959	.00009	1.65	.00009	1.65
3	1	.21598	.00097	20.33	-.00097	-20.33
3	3	.07199	.00010	2.63	.00010	2.63
3	5	.04320	.00002	.62	-.00002	-.62
5	1	.12959	.00009	4.91	.00009	4.91
5	3	.04320	.00002	1.05	-.00002	-1.05
5	5	.02592	.00000	.34	.00000	.34

$$\hat{w} = \sum wc = 0.07082mm$$

$$\hat{M}_1 = \sum BM = 192.627 Nmm/mm$$

$$\hat{\sigma}_1 = 46.2 N/mm^2$$

مثال (4):

لوح مستطيل طوله a و عرضه b و سمكه h مسنود إسناد بسيط و مسلط عليه حمل مركز P<sub>0</sub>

في الوسط . أوجد الانحراف و الاجهادات القصوى.

الحل:

ليس هنالك من جديد في هذه المثال سوى التعبير عن الحمل المركز بطريقة فوريير هكذا،

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

حيث أن،

$$P_{mn} = \frac{4P_o}{ab} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

أما بقية خطوات الحل فهي كما مرت علينا سابقاً.

مثال(5):

لوح مربع طول ضلعه 100mm و سمكه 5mm مسنود إسناد بسيط و مسلط عليه حمل مركز في الوسط  $4 \text{ N/mm}^2$ . إذا كانت  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$  و  $\nu = 0.3$ ، أوجد الانحراف الأقصى و الإجهادات القصوى .

الحل:

فيما يلي النتائج التي تم الحصول عليها

M	N	Qmn	Wmn	Mmn	wc	BM
1	1	.40000	.4477	131.61	.04477	131.61
1	3	-.40000	-.00179	-14.98	.00179	14.98
1	5	.40000	.00025	5.09	.00026	5.09
3	1	-.40000	-.00179	-37.66	.00179	37.66
3	3	.40000	.00055	14.62	.000055	14.62
3	5	-.40000	-.00015	-5.78	.00015	5.78

5	1	.40000	.00026	15.16	.00026	15.16
5	3	-.40000	-.00015	-9.70	.00015	9.70
5	5	.40000	.00007	5.26	.000007	5.26

$$\hat{w} = \sum wc = 0.04979mm$$

$$\hat{M}_1 = \sum BM = 239.87Nmm/mm$$

$$\hat{\sigma}_1 = 57.6N/mm^2$$

مثال (6):

لوح مستطيل أبعاده 150 mm × 100mm × 5mm مسنود إسناد بسيط و مسلط عليه حمل موزع بانتظام معدله 0.4 N/mm<sup>2</sup> . إذا كانت E = 200 kN/mm<sup>2</sup> و ν = 0.3 ، أوجد الانحراف الأقصى و الإجهادات القصوى .

الحل:

فيما يلي النتائج التي تم الحصول عليها

M	N	Qmn	Wmn	Mmn	wc	BM
1	1	.64793	.13903	356.32	.13903	356.32
1	3	.21598	.00387	19.24	-.00387	-19.24
1	5	.12959	.00040	3.88	.00040	3.88
3	1	.21598	.00108	22.39	-.00108	22.39
3	3	.07199	.00019	4.40	.00019	4.40
3	5	.04320	.00005	1.33	-.00005	-1.33
5	1	.12959	.00009	5.09	.00009	5.09
5	3	.04320	.00002	1.36	-.00002	-1.36
5	5	.02592	.00001	.57	.00001	.57

$$\hat{w} = \sum wc = 0.1347mm$$

$$\hat{M}_1 = \sum BM = 325.93Nmm/mm$$

$$\hat{\sigma}_1 = 78.2N/mm^2$$

### 6.3 تمرين:

1. لوح مستطيل مسنود إسناد بسيط أبعاده  $600mm \times 400mm \times 15mm$  مسلط عليه

حمل موزع بانتظام معدله  $1N/mm^2$ . أوجد الانحراف الأقصى و الاجهادات القصوى . خذ

$$E=200kN/mm^2 \text{ و } \nu = 0.3$$

$$\text{Ans.}( 3.19 \text{ mm} , 347 \text{ N/mm}^2)$$

2. لوح مستطيل مسنود إسناد بسيط أبعاده  $450mm \times 300mm \times 10mm$  مسلط عليه

حمل مركز في الوسط  $5kN$ . أوجد الانحراف و الإجهاد في وسط اللوح .  $E=200kN/mm^2$

$$\text{و } \nu = 0.3$$

$$\text{Ans.}( 0.37 \text{ mm} , 77 \text{ N/mm}^2)$$

## الفصل السابع

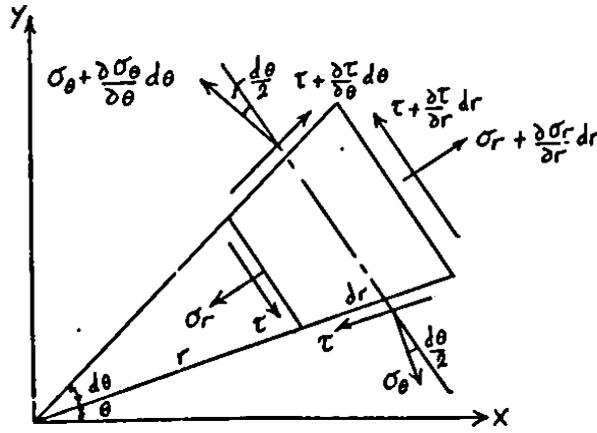
### نظرية المرونة (3)

#### (Theory of Elasticity)

#### الاجهادات المستوية - الاجهادات القطبية

#### (Plane Stresses – Polar Stresses)

7.1 معادلة الاتزان:



الرسم (7.1)

مجموع القوي في الاتجاه القطري = صفر،

$$\sum F_r = 0$$

$$\left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz + \left( \tau + \frac{\partial \tau}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz - \tau r dz - \left( \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta r dz \frac{d\theta}{2} = 0$$

هذه المعادلة يمكن تبسيطها إلى الشكل التالي،

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1)$$

و بالمثل مجموع القوي في الاتجاه المماسي = صفر

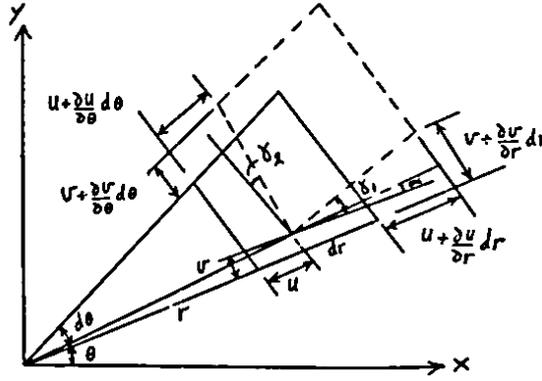
$$\sum F_\theta = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\tau}{r} = 0 \quad (2)$$

### 7.2 معادلات الانفعال - الإزاحة:

من الرسم (7.2) التالي نجد أن،

$$\epsilon_r = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial r} dr\right) - u}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3)$$



الرسم (7.2)

$$\epsilon_{\theta} = \frac{\left[\left(v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta\right) - v\right] + (r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta}$$

v هي الإزاحة المماسية،

$$\epsilon_{\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (4)$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \alpha$$

$$\gamma = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial r} dr\right) - v}{dr} + \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta\right) - u}{rd\theta} - \frac{v}{r}$$

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \quad (5)$$

### 7.3 معادلات الإجهاد - الانفعال:

$$\epsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \frac{\nu \sigma_{\theta}}{E} \quad (6)$$

$$\epsilon_{\theta} = \frac{\sigma_{\theta}}{E} - \frac{\nu \sigma_r}{E} \quad (7)$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (8)$$

معادلة البايهارمونك:

لتحقيق معادلتى الاتزان نستخدم دالة الإجهاد  $\phi(r, \theta)$  بحيث تكون الاجهادات كما يلي:-

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

معادلة البايهارمونك (أنظر ناش صفحة 373)،

$$\nabla^4 \phi = \nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (9)$$

حيث أن،

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

سنتناول فيما يلي أنواعاً مختلفة من المسائل:

(أ) مسائل التماثل المحوري:

في حالة التماثل المحوري  $\phi = \phi(r)$  . و بالتالي  $\sigma_r(r)$  ,  $\sigma_\theta(r)$  ,  $\tau = 0$  . و معادلة التوافق (9)

تصبح،

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$$

و هذه يمكن كتابتها كما يلي،

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\phi}{dr} \right) \right\} \right) = 0$$

و في هذه الحالة يمكن إيجاد  $\phi$  بطريقة التكامل العادية أي،

$$\phi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D$$

حيث أن A ، B ، C و D ثابت غير محددة يتم إيجاد قيمها من الحالات الحدودية. و في الواقع أن الثابت D لا يظهر في صيغ الإجهاد كما تري هنا.

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(1+2\ln r) + 2C \quad (10)$$

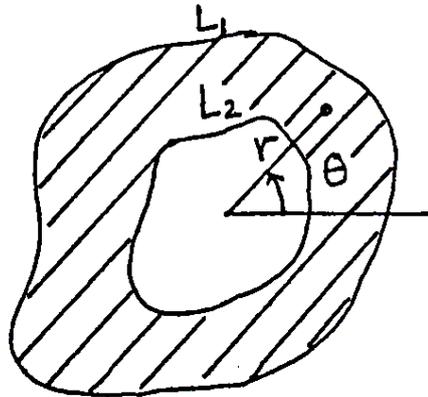
$$\sigma_\theta = \frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3+2\ln r) + 2C \quad (11)$$

و صيغ الانفعالات كما يلي:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \\ &= \frac{1+\nu}{E} \frac{A}{r^2} + \frac{1-3\nu}{E} B + 2B \frac{(1-\nu)}{E} \ln r + 2C \frac{(1-\nu)}{E} = \frac{du}{dr} \\ \therefore u &= -\frac{1+\nu}{E} \frac{A}{r} - \frac{1+3\nu}{E} B + 2Br \frac{(1-\nu)}{E} r \ln r + \frac{2(1-\nu)}{E} Cr \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \\ &= -\frac{1+\nu}{E} \frac{A}{r^2} + \frac{3-\nu}{E} B + 2 \frac{(1-\nu)}{E} B \ln r + 2 \frac{(1-\nu)}{E} C = \frac{u}{r} \\ \therefore u &= -\frac{(1+\nu)}{E} \frac{A}{r} - \frac{3-\nu}{E} B + 2B \frac{(1-\nu)}{E} r \ln r + \frac{2(1-\nu)}{E} Cr \quad (13) \end{aligned}$$

و عندما يكون الحيز محاطاً بالكنكتور  $L_1$  و  $L_2$  و نقطة أصل الإحداثيات  $(r, \theta)$  داخل الكنتور الداخلي (أنظر الرسم (7.3) أدناه) فإن المطلوب بأن تكون الإزاحة (المعادلة (1) و (2) ) قيمة مفردة تستدعي أن تكون  $B = 0$  . و في هذه الحالة تكون الاجهادات كما يلي:



الرسم (7.3)

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C = a + \frac{b}{r^2}$$

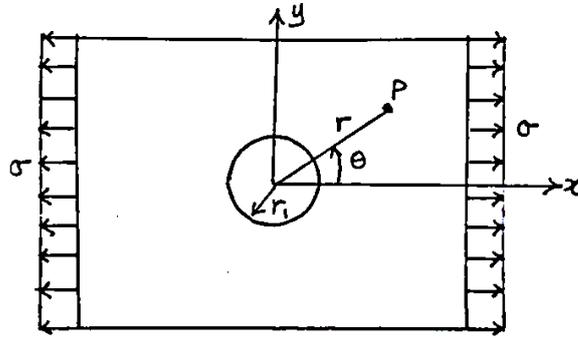
$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C = a - \frac{b}{r^2}$$

حيث أن،

$$b = A, a = 2C$$

و هذه الصيغ مألوفة لنا من دراستنا للأسطوانات السمكية.

ب/ توزيع الاجهادات في لوح نحيف يحتوي علي ثقب دائري صغير مسلط عليه حمل محوري:



الرسم (7.4)

لوح نحيف غير محدود في الطول و العرض كما موضح في الرسم (7.4) مسلط عليه إجهاد شد منتظم ينجم عنه إجهاد  $\sigma$  في إتجاه x عند  $r = \infty$ . المطلوب إيجاد الاجهادات حول الثقب.

الحالات الحدودية كما يلي:-

$$r = r_1, \quad \sigma_r = \tau = 0$$

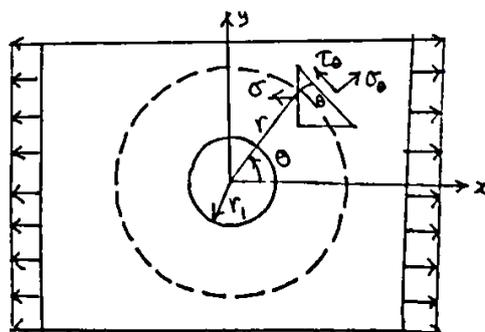
$$r = \infty, \quad \sigma_x = \sigma$$

$$r = \infty, \quad \sigma_y = \tau = 0$$

إن اختيار دالة الإجهاد المناسبة على قدر من الصعوبة، و على كل حال يتوقع أن تتكون الدالة من دالتين. تقوم الدالة الأولى بتحقيق الحالات الحدودية  $r = \infty$  و التي قد تخالف الحالات الحدودية على حافة الثقب. أما الدالة الثانية يجب أن تؤدي اجهادات تقوم بإزالة الاجهادات على

حافة اللوح الناجمة من الدالة الأولى، و في نفس الوقت لا تؤدي إلي تغيير حالة الإجهاد بعيداً عن الثقب التي تحققت من الدالة الأولى.

دعنا ندرس الاجهادات عن النقطة P كما في الرسم (7.5) التالي.

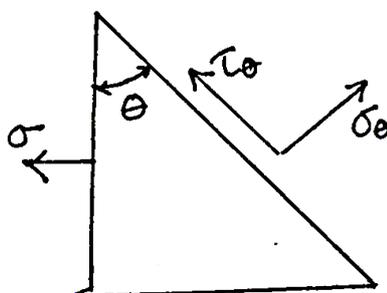


الرسم (7.5)

$$\sigma_{\theta} = \sigma \cos^2 \theta = \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\tau_{\theta} = -\sigma \sin \theta \cos \theta = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\theta$$

في محاولة لإيجاد الحل نفترض أن كل إجهاد يتكون من مركبتين كما يلي: الرسم (7.6) أدناه.



الرسم (7.6)

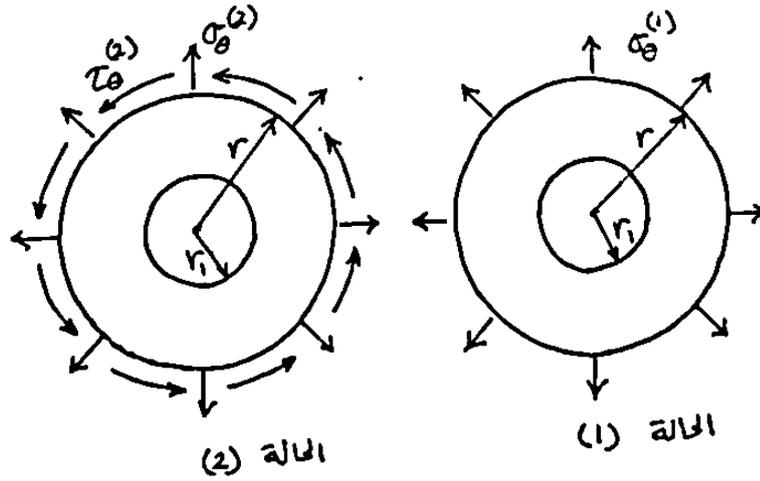
$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta}^{(1)} + \sigma_{\theta}^{(2)}$$

$$\tau_{\theta} = \tau_{\theta}^{(1)} + \tau_{\theta}^{(2)}$$

$$\sigma_{\theta}^{(1)} = \frac{\sigma}{2}, \quad \sigma_{\theta}^{(2)} = \frac{\sigma}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_{\theta}^{(1)} = 0, \quad \tau_{\theta}^{(2)} = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\theta$$

و يمكن توضيح المركبتين في الرسم (7.7) أدناه التالي حيث اعتبرناهما حالتين مختلفتين،



الرسم (7.7)

في كلتا الحالتين  $r = \infty$  (أي  $r \gg r_1$ )

الحالة (1): ينطبق عليها تحليل الأسطوانات السميكة أي أن،

$$\sigma_r = a - \frac{b}{r^2}$$

$$\sigma_\theta = a + \frac{b}{r^2}$$

و الحالات الحدودية هي،

$$r = r_1, \quad \sigma_r = 0$$

$$r = \infty, \quad \sigma_r = \sigma_\theta^{(1)} = \frac{\sigma}{2}$$

$$a = \frac{\sigma}{2}, \quad b = \frac{\sigma}{2} r_1^2$$

و بسهولة و يسر نحصل على

أي أن الاجهادات في الحالة (1) كما يلي:

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{\sigma}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \right] \quad (14)$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = \frac{\sigma}{2} \left[ 1 + \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \right] \quad (15)$$

$$\tau^{(1)} = 0 \quad (16)$$

الحالة (2): دالة الإجهاد المناسبة هي،

$$\phi = f(r)\cos 2\theta$$

و بعد التعويض في معادلة البايهارمونك (9) نحصل على،

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2}\right) = 0$$

و حل المعادلة هو،

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D$$

أي أنّ دالة الإجهاد هي،

$$\phi = \left(Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D\right)\cos 2\theta$$

و من هذه الدالة نحصل على الاجهادات التالية:

$$\sigma_r = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\tau = \left(2A + 6Br^4 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right)\sin 2\theta$$

الحالات الحدودية،

$$r = r_1, \quad \sigma_r = \tau = 0$$

$$r = \infty, \quad \sigma_r = \frac{\sigma}{2}\cos 2\theta, \quad \tau = \frac{\sigma}{2}\sin 2\theta$$

و بالتالي فإن قيم A ، B ، C ، و D كما يلي،

$$A = -\frac{\sigma}{4}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{\sigma}{4}r_1^4, \quad D = \frac{\sigma}{2}r_1^2$$

أي أن الاجهادات للحالة (2) هي:

$$\sigma_r^{(2)} = \frac{\sigma}{2}\left[1 + 3\left(\frac{r_1}{r}\right)^4 - 4\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right]\cos 2\theta \quad (17)$$

$$\sigma_{\theta}^{(2)} = -\frac{\sigma}{2} \left[ 1 + 3 \left( \frac{r_1}{r} \right)^4 \right] \cos 2\theta \quad (18)$$

$$\tau_r^{(2)} = -\frac{\sigma}{2} \left[ 1 - 3 \left( \frac{r_1}{r} \right)^4 + 2 \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \right] \sin 2\theta \quad (19)$$

و الآن فإنَّ الحلَّ الشامل يتم تركيبه من المعادلات السابقة،

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \right] + \frac{\sigma}{2} \left[ 1 + 3 \left( \frac{r_1}{r} \right)^4 - 4 \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \right] \cos 2\theta \quad (20)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma}{2} \left[ 1 + \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \right] - \frac{\sigma}{2} \left[ 1 + 3 \left( \frac{r_1}{r} \right)^4 \right] \cos 2\theta \quad (21)$$

$$\tau = -\frac{\sigma}{2} \left[ 1 - 3 \left( \frac{r_1}{r} \right)^4 + 2 \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \right] \sin 2\theta \quad (22)$$

لاحظ إذا كان  $r \gg r_1$  أي أن  $r = \infty$  فإن المعادلات السابقة تعطي الاجهادات التالية:

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\tau = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\theta$$

أما إذا كانت  $r = r_1$  فإننا نحصل على،

$$\sigma_r = \tau = 0$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma (1 - \cos 2\theta)$$

يمكن إيجاد الاجهادات في اتجاه  $x$  بتعويض  $\theta = 0, \pi$  و  $x = r$  في المعادلات السابقة و عندئذ

تصبح  $\tau = \tau_{r\theta} = \tau_{xy}$ ،  $\sigma_{\theta} = \sigma_y^{(x)}$ ،  $\sigma_r = \sigma_x^{(x)}$

$$\sigma_x^{(x)} = \frac{\sigma}{2} \left[ 2 - 5 \left( \frac{r_1}{x} \right)^2 + 3 \left( \frac{r_1}{x} \right)^4 \right] \quad (23)$$

$$\sigma_y^{(x)} = \frac{\sigma}{2} \left[ 1 - 3 \left( \frac{r_1}{x} \right)^2 \right] \left( \frac{r_1}{x} \right)^2 \quad (24)$$

$$\tau = \tau_{r\theta} = \tau_{xy} = 0 \quad (25)$$

و بنفس الطريقة يمكن إيجاد الاجهادات في اتجاه محور  $y$  بتعويض  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  و  $r=y$  و

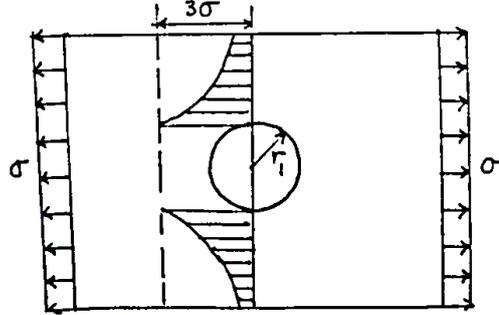
$$\text{بالتالي } \tau = \tau_{r\theta} = \tau_{xy}, \quad \sigma_{\theta} = \sigma_x^{(y)}, \quad \sigma_r = \sigma_y^{(y)}$$

$$\sigma_y^{(y)} = 3 \frac{\sigma}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{y} \right)^2 \right] \left( \frac{r_1}{y} \right)^2 \quad (26)$$

$$\sigma_x^{(y)} = \frac{\sigma}{2} \left[ 2 + \left( \frac{r_1}{y} \right)^2 + 3 \left( \frac{r_1}{y} \right)^4 \right] \quad (27)$$

$$\tau = \tau_{r\theta} = \tau_{xy} = 0 \quad (28)$$

و المعادلة (27) تعطي التوزيع التالي للإجهاد  $\sigma_x^{(y)}$ ، (أنظر الرسم (7.8) أدناه)



الرسم (7.8)

نلاحظ أن  $\hat{\sigma}_x^{(y)} = 3\sigma$  . أي أن الإجهاد الأقصى عند الثقب يساوي ثلاثة أمثال الإجهاد المسلط

على اللوح. وفي هذه الحالة يقال أن عامل تركيز الإجهاد  $k = 3$  .

و على كل فإن تأثير الثقب تأثير موضعي فسريراً يتناقص الإجهاد كلما ابتعدنا عن الثقب . و

لكن يظل تركيز الإجهاد عند الثقب شديد و يحتاج إلي عناية خاصة في مرحلة التصميم.

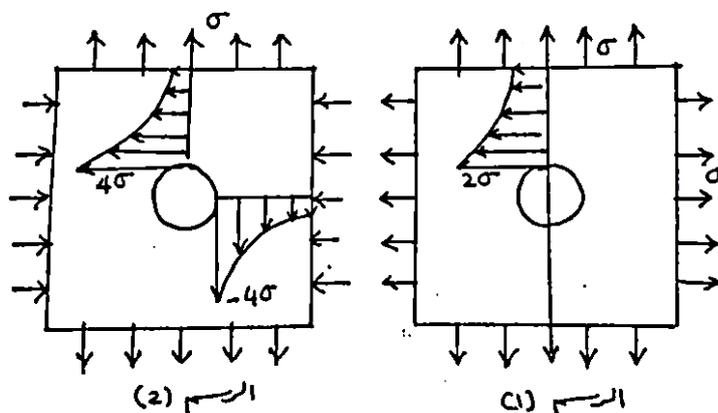
إذا كان الإجهاد المسلط على حواف اللوح الأربعة بدلاً عن حافتين فقط. أو كان اللوح معرض للشد

من جانب و الضغط من الجانب الآخر ، فإن الحل النهائي يتم الحصول عليه بتركيب الحلول

البسيطة. فمثلاً إذا كان اللوح معرض لإجهاد شد  $\sigma$  على جميع الحواف كما في الرسم

(1) (7.9).

فإن عامل تركيز الإجهاد  $k = 2$  . أي أن  $\hat{\sigma}_x = 2\sigma$  . أما إذا كان اللوح معرض لإجهاد شد  $\sigma$  على حافتين و إجهاد ضغط  $\sigma$  على الحافتين الأخرين كما في الرسم (2) (7.9) فإن عامل تركيز الإجهاد  $k = 4$  حيث أن  $\hat{\sigma}_x^{(y)} = 4\sigma$  و  $\hat{\sigma}_x^{(x)} = -4\sigma$  .



الرسم (7.9)

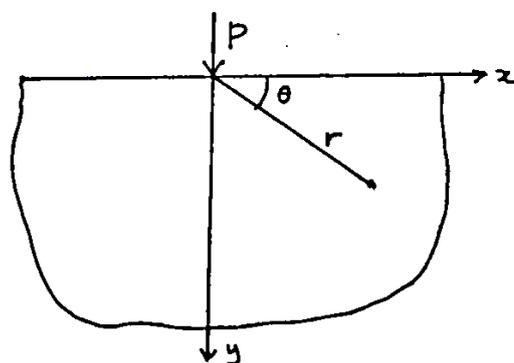
(ج) توزيع الاجهادات في لوح شبه لا محدود مسلط على حافته حمل.

#### 7.4 أمثلة محلولة:

مثال (1):

استنتج الاجهادات في لوح شبه لا محدود مُسلَّط على حافته حمل قائم كما في الرسم (7.10)

أدناه.



الرسم (7.10)

الحل:

استخدم دالة الإجهاد التالية:

$$\phi = a\theta + br^2\theta + cr\theta\sin\theta + dr\theta\cos\theta$$

الاجهادات،

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ &= 2b\theta + \frac{2c}{r} \cos\theta - \frac{2d}{r} \sin\theta\end{aligned}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 2b\theta$$

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{a}{r^2} - b$$

الحالات الطرفية،

$$\theta = 0, \quad \sigma_r = 0 \quad \therefore c = 0$$

$$\theta = 0, \quad \sigma_\theta = \tau = 0 \quad \therefore a = b = 0$$

$$\therefore \sigma_r = -\frac{2d}{r} \sin\theta$$

لإيجاد قيمة d،

$$\downarrow + \sum F_y = 0$$

$$P + \int_0^\pi (\sigma_r r d\theta) \sin\theta = 0$$

و منها نحصل على،

$$P - 2d \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = 0$$

$$d = \frac{P}{\pi}$$

$$\therefore \sigma_r = -\frac{2P}{\pi r} \sin\theta$$

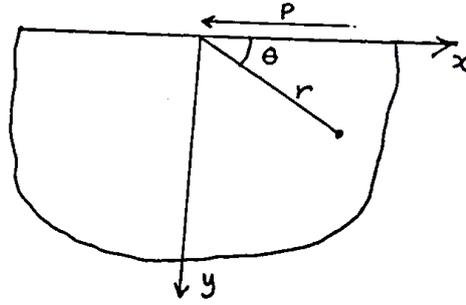
$$\sigma_\theta = \tau = 0$$

مثال (2):

قوة مركزة مماسية تم تسليطها على حافة لوح شبه لا محدود كما موضَّح بالرسم (7.11) أدناه .

أوجد الاجهادات مستخدماً دالة الإجهاد التالية:

$$\phi = c r \theta \sin \theta$$



الرسم (7.11)

الحل:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_r = \frac{2c}{r} \cos \theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0$$

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0$$

لإيجاد قيمة c،

$$\leftarrow + \sum F_x = 0$$

$$P - \int_0^\pi (\sigma_r r d\theta) \cos \theta$$

$$P - c \int_0^\pi (1 + \cos 2\theta) d\theta = 0$$

$$\therefore c = \frac{P}{\pi}$$

$$\therefore \sigma_r = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta$$

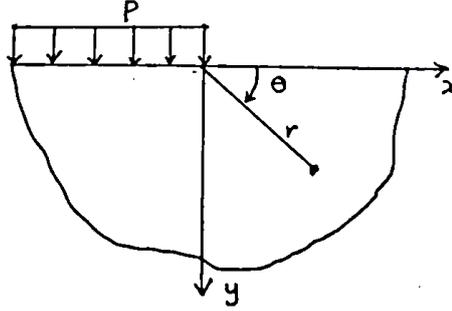
مثال (3):

لوح شبه لا محدود مسلط عليه حمل موزع بانتظام على طول الخط الحدودي  $\theta = \pi$  (أنظر الرسم

(7.12) أدناه). استخدم دالة الإجهاد

$$\phi = cr^2(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta)$$

أوجد الاجهادات لقيمة  $\theta = \frac{\pi}{2}$  و  $\theta = 0$ . ناقش الاختلاف في هذه الاجهادات.



الرسم (7.12)

يمكن إيجاد الاجهادات التالية:

$$\sigma_r = 2c(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta)$$

$$\sigma_\theta = 2c(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta)$$

$$\tau = -c(1 - \cos 2\theta)$$

الحالات الحدودية،

$$\theta = \pi, \quad \sigma_\theta = -P \quad \therefore c = -\frac{P}{2\pi}$$

$$\therefore \sigma_r = -\frac{P}{\pi} \left( \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta \right)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{P}{\pi} \left( \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \right)$$

$$\tau = -\frac{P}{2\pi} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\theta = 0$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \tau = 0$$

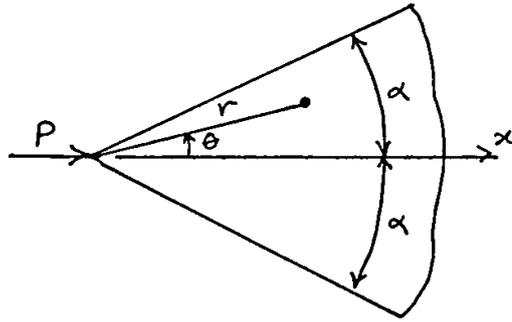
O.K.

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{P}{2}, \quad \tau = \frac{P}{2}$$

(د) مسائل الاسفين:

مثال(4):

إذا كانت دالة الإجهاد للاسفين الموضَّح في الرسم (7.13) أدناه  $\phi = kr\theta \sin \theta$ . أوجد قيمة الثابت k.



الرسم (7.13)

الاجهادات،

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{2k}{r} \cos \theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0$$

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0$$

$$P + 2 \int_0^\alpha (\sigma_r r d\theta) \cos \theta = 0$$

$$P + 4k \int_0^\alpha \cos^2 \theta d\theta = 0$$

$$\therefore k = -\frac{P}{2\alpha + \sin 2\alpha}$$

مثال (5):

لوح نحيف عبارة عن اسفين مسلط عليه ضغط منتظم  $p$  على طول حافته  $\theta = -\alpha$  و ضغط آخر منتظم  $q$  على الحافة  $\theta = \alpha$  .  $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$  . راس الاسفين موضوع عند نقطة الأصل  $r = \theta = 0$  . دالة الإجهاد هي

$$\phi = r^2(A + B\theta + C \cos 2\theta + D \sin 2\theta)$$

(أ) أوجد قيم  $A$  ،  $B$  ،  $C$  و  $D$  .

(ب) للحالة  $p = 0$  و  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ، برهن أن الحل يعطي حالة لوح شبه لا محدود مسلط عليه ضغط منتظم  $q$  على نصف حافته.

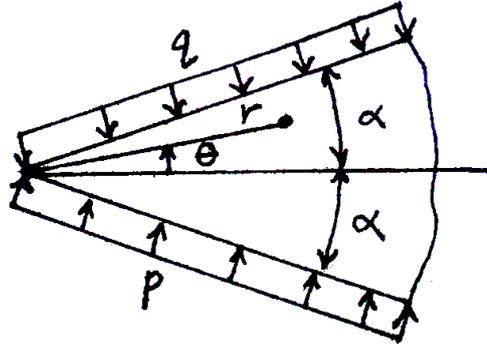
بسهولة يمكن إيجاد الاجهادات التالية:

$$\sigma_r = 2(A + B\theta - C \cos 2\theta - D \sin 2\theta)$$

$$\sigma_\theta = 2(A + B\theta + C \cos 2\theta + D \sin 2\theta)$$

$$\tau = -(B - 2C \sin 2\theta + D \cos 2\theta)$$

الحالات الحدودية،



الرسم (7.14)

$$\theta = \pm\alpha, \quad \tau = 0$$

$$\therefore B = -2D \cos 2\alpha, \quad C = 0$$

$$\theta = \alpha, \quad \sigma_\theta = -q, \quad \theta = -\alpha, \quad \sigma_\theta = -p$$

$$\therefore A = -\frac{1}{4}(p + q)$$

$$D = \frac{p-q}{4(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)}$$

$$B = \frac{-(p-q)\cos 2\alpha}{2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)}$$

$$\therefore \sigma_r = -\frac{1}{2}(p+q) - \frac{(p-q)\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \theta$$

$$- \frac{p-q}{2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} \sin 2\theta$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{2}(p+q) - \frac{(p-q)\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \theta$$

$$+ \frac{(p-q)\sin 2\theta}{2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)}$$

$$\tau = -\frac{(p-q)\cos 2\alpha}{2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} - \frac{(p-q)\cos 2\alpha}{2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)}$$

$$p = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

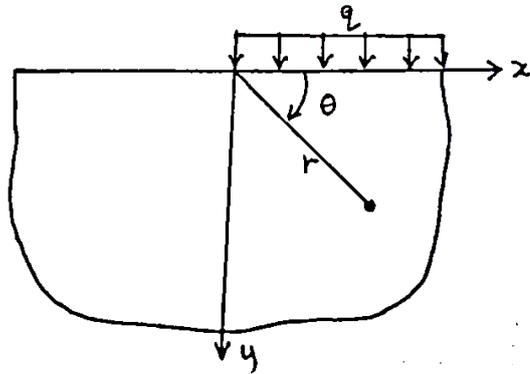
$$\therefore \sigma_r = -\frac{q}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]$$

$$\sigma_\theta = -\frac{q}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]$$

$$\tau = \frac{q}{\pi} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right]$$

يمكن التأكد من أن الاجهادات آنفة الذكر هي الاجهادات التي يمكن الحصول عليها من اللوح

الموضَّح أدناه:

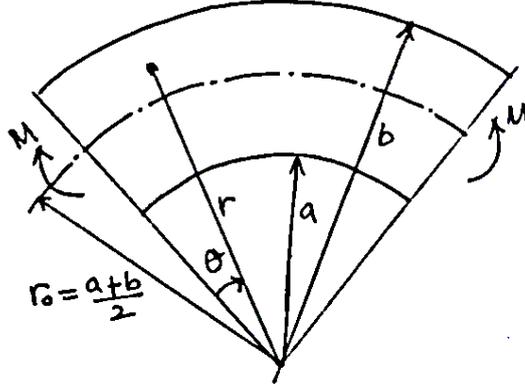


الرسم (7.15)

(هـ) القضبان السمكة المقوسة:

مثال(6):

قضيب سميك مقوس مسلط عليه عزم انحناء.



الرسم (7.16)

$$\phi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D$$

الاجهادات،

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C$$

$$\tau = 0$$

الحالات الحدودية،

$$r = a, b, \quad \sigma_r = 0$$

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = 0, \quad \int_a^b \sigma_\theta r dr = -M$$

و منها نحصل على الثوابت الآتية:

$$A = -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}$$

$$B = -\frac{2M}{N} (b^2 - a^2)$$

$$C = \frac{M}{N} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)]$$

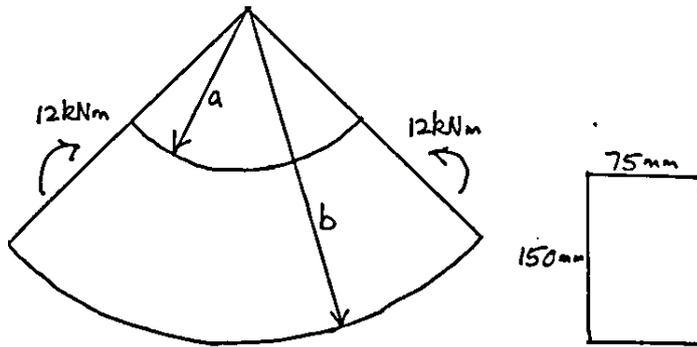
$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^2$$

مثال (7):

عارضة مقوسة مقطوعها مستطيل  $75 \times 150 \text{ mm}$  . أوجد إجهاد الشد والضغط الأقصىين عن

تسليط عزم انحناء  $12 \text{ kNm}$  كما في الرسم (7.17) .

$$. a = 75 \text{ mm} , b = 225 \text{ mm}$$



الرسم (7.17)

$$M = -12 \text{ kNm} = -\frac{12 \text{ kNm}}{75 \cdot 10^{-3}} = -160 \text{ kNm/m}$$

$$N = 6.5 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 , \quad A = 308 \cdot 10^3$$

$$B = 22.2 , \quad C = -134.1$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{3.8 \cdot 10^3}{r^2} + 22.2(3 + 2 \ln r) - 268.2$$

$$r = a = 75 \text{ mm} , \quad \sigma_{\theta} = -64.7 \text{ N/mm}^2$$

$$r = b = 225 \text{ mm} , \quad \sigma_{\theta} = 32.8 \text{ N/mm}^2$$

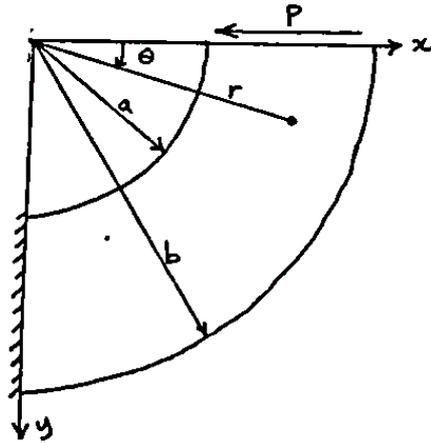
(الإجابات التي هي أكثر دقة يمكن الرجوع إليها في ناش صفحة 243 ،  $31 \text{ N/mm}^2$  ،  $\text{N/mm}^2$ )

(- 64.8

مثال (8):

عارضة وتدنية مقوسة مسلط عليها حمل مماسي،

$$\phi = \left( Ar^3 + \frac{B}{r} + Cr + Dr \ln r \right) \sin \theta$$



الرسم (7.18)

الاجهادات،

$$\sigma_r = \left( 2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \theta$$

$$\sigma_\theta = \left( 6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \theta$$

$$\tau = - \left( 2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \cos \theta$$

الحالات الحدودية،

$$r = a, b, \quad \sigma_r = \tau = 0$$

$$\theta = 0, \quad \int_a^b \tau dr = p$$

و منها نحصل على الثوابت،

$$A = \frac{P}{2N}, \quad B = -\frac{Pb^2a^2}{2N}$$

$$D = -\frac{P}{N}(a^2 + b^2)$$

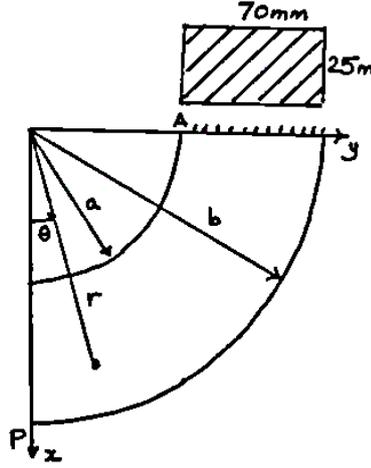
$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a}$$

مثال (9):

أوجد إجهاد الشد عند نقطة A في القضيب المقوس على شكل ربع دائرة الموضح في الرسم

(7.19).

$$a = 30\text{mm}, \quad b = 100\text{mm}, \quad P = 20\text{kN}$$



الرسم (7.19)

$$N = 4023\text{mm}^2$$

$$P = -\frac{20 \cdot 10^3}{25} = -800\text{N/mm}$$

$$A = \frac{P}{2N} = \frac{-800}{2 \times 4023} = -99.4 \cdot 10^{-3}\text{N/mm}^3$$

$$B = -\frac{P}{2N} a^2 b^2 = \frac{800 \times 30^2 \times 100^2}{2 \times 4023} = 985 \cdot 10^3\text{Nmm}$$

$$D = -\frac{P}{2N} (a^2 + b^2) = \frac{800 \times (30^2 + 100^2)}{4023} = 2168\text{N/mm}$$

$$\sigma_\theta = \left( 6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad r = 30\text{mm} \quad \therefore \sigma_\theta^{(A)} = 120.7\text{N/mm}^2$$

(الإجابة الأكثر دقة  $112\text{N/mm}^2$ ).

## 7.5 تمرين:

1. عنصرين خطيين متعمدين  $ds_1$  و  $ds_2$  أحدهما قطري و الآخر مماسي في المستوي  $R$  (أنظر

الرسم). خذ التشوهات المنفصلة التالية:

(أ) كل النقاط في الحيز تقوم بحركة قطرية  $U = U_1(r, \theta)$  و  $V = V_1 = 0$  حيث أن  $U$  و  $V$

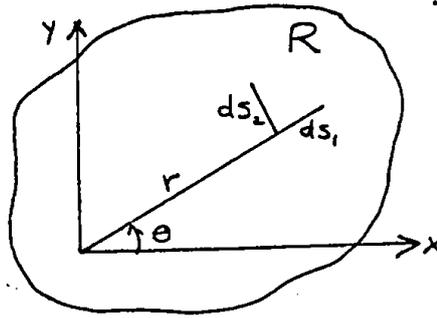
تشيران إلي مركبتي الإزاحة القطرية و المماسية.

(ب) كل النقاط تقوم بحركة مماسية  $V = V_2(r, \theta)$  و  $U = U_2 = 0$ .

استنتج صيغ لمركبات الانفعال  $\epsilon_r$ ,  $\epsilon_\theta$  و  $\gamma$  التي تنتج من التشوهات (أ) و (ب).

(ج) ركب نتائج التشوهات (أ) و (ب) للحصول على التشوهات في حالة الإزاحة المماسية و

القطرية.



$$\text{Ans.} \left( \epsilon_r = \frac{\partial U_1}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta}, \quad \gamma = \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} + \frac{\partial V_2}{\partial r} - \frac{V_2}{r} \right)$$

2. في مسألة اجهادات مستوية كانت الازاحات كما يلي:

$$Eu = (1-\nu) \ln r \cos \theta - 2 \cos \theta + 2\theta \cos \theta$$

$$Ev = (1-\nu)(1 - \ln r) \sin \theta + 2\theta \cos \theta$$

حيث أن  $(u, v)$  مركبتا الإزاحة في نظام إحداثيات قطبية  $(r, \theta)$ .  $E$  معاير المرونة، و  $\nu$  نسبة

بسون.

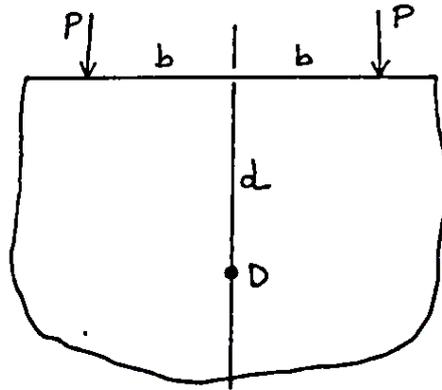
$$(أ) \text{ برهن أن } \sigma_r = \sigma_\theta \quad \left( \sigma_r = \sigma_\theta = \frac{1}{(1-\nu)r} \text{ الإجابة} \right)$$

(ب) هل يتحقق التوافق . (الإجابة لا)

3. قوتان P تم تسليطهما على حافة لوح شبه لا محدود بحيث تكون المسافة بينهما 2b كما في

الرسم .

(أ) أوجد الاجهادات الرئيسية عن النقطة D على عمق d من الحافة و على خط التماثل.

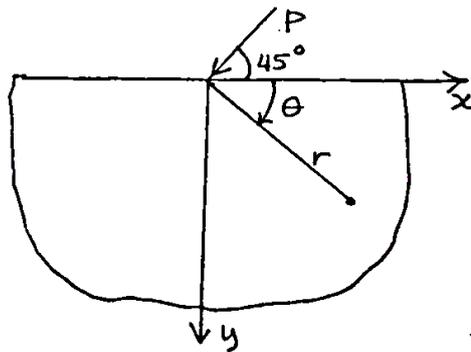


(ب) تم استبدال القوتين P بقوة واحدة 2P مسلطة على خط التماثل . أوجد العمق c بحيث يكون

الإجهاد الرئيس أقل من 4% من الإجهاد الرئيس في النقطة D.

$$\text{Ans.} \left[ c = \frac{1.04}{d^2} (b^2 + d^2)^{3/2} \text{ (ب)} \quad \frac{-4Pd^2}{\pi(b^2 + d^2)^{3/2}}, \quad 0 \text{ (أ)} \right]$$

4. أوجد الاجهادات في لوح شبه لا محدود الناتج من حمل مائل على الحافة كما في الرسم.

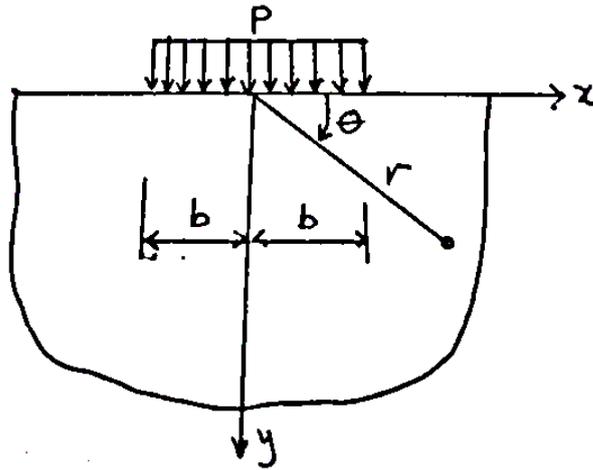


$$\text{Ans.} \left[ \sigma_{\theta} = \tau = 0 \quad , \quad \sigma_r = -\frac{\sqrt{2}P}{\pi r} (\sin \theta - \cos \theta) \right]$$

5. أوجد الاجهادات في لوح شبه لا نهائي مسلط عليه حمل موزع بانتظام على قسم من حافته كما

موضح بالرسم.

$$\phi = Cr^2 \left( \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \quad \text{دالة الإجهاد}$$

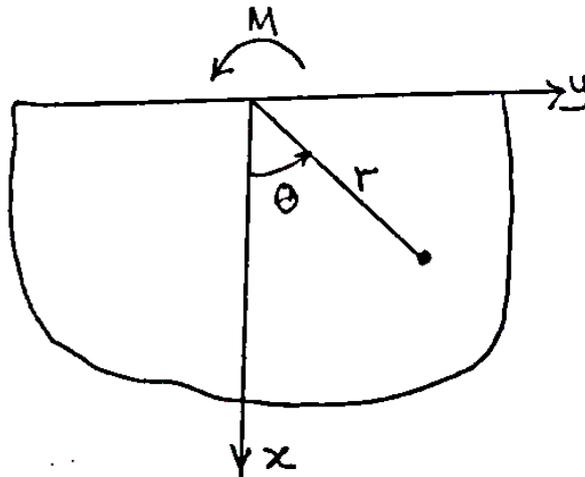


Ans.  $\left[ \tau = \frac{3Pb}{8r}(1 - \cos 2\theta), \sigma_\theta = \sigma_r = -\frac{3\pi b}{8r}P \right]$

6. أوجد توزيع الاجهادات الناجم من عزم انحناء مركز على حافة مستقيمة للوح لا محدود كما في

الرسم،

$$\phi = A\theta + B\sin\theta\cos\theta$$



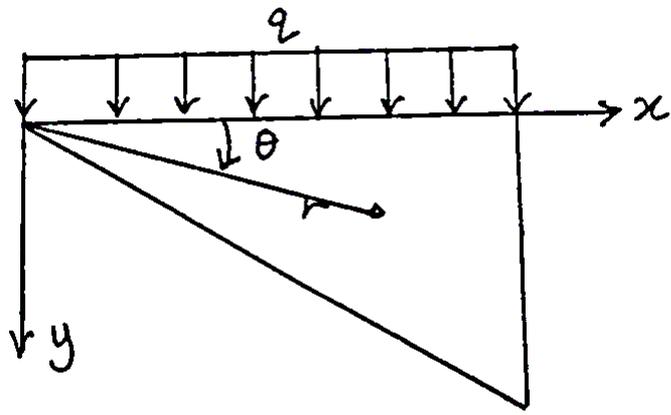
Ans.  $\left[ \tau = -\frac{2M}{\pi r^2}\cos^2\theta, \sigma_\theta = 0, \sigma_r = -\frac{4M}{\pi r^2}\sin\theta\cos\theta \right]$

7. أوجد قيمة C في دالة الإجهاد التالية

$$\phi = C[r^2(\alpha - \theta) + r^2\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^2\theta\tan\alpha]$$

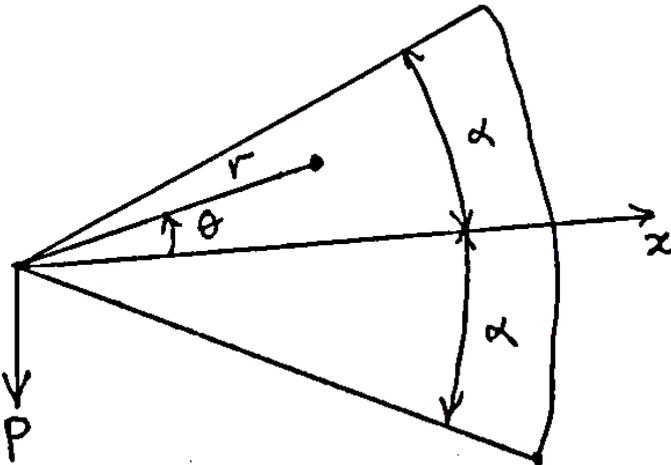
التي تحقق الحالات الحدودية على الحافتين العليا و السفلي في اللوح المثلثي الموضح في الرسم.

أحسب الإجهادين  $\sigma_x$  و  $\tau$ .



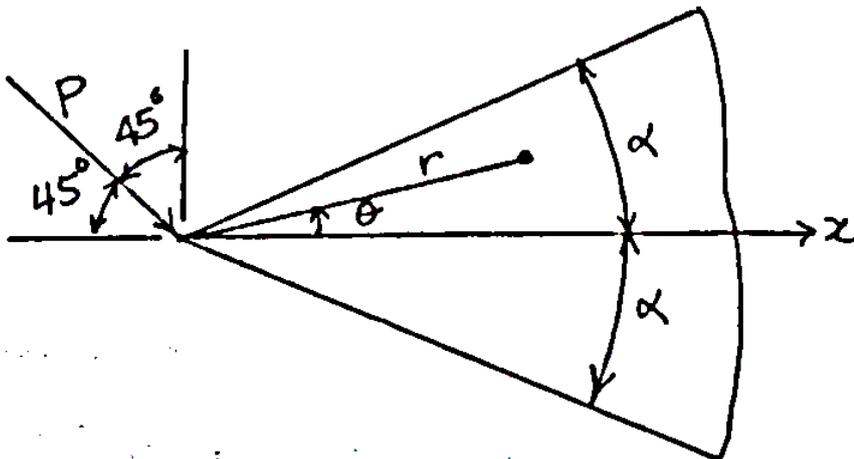
Ans.  $\left( C = \frac{-q}{2(\alpha - \tan \alpha)} \right)$

8. إذا كانت دالة الإجهاد للأسفین الموضَّح في الرسم أدناه  $\phi = kr \theta \cos \theta$  أوجد قيمة الثابت k



Ans.  $\left( k = \frac{-q}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right)$

9. أحسب الاجهادات في الاسفین الموضَّح في الرسم.



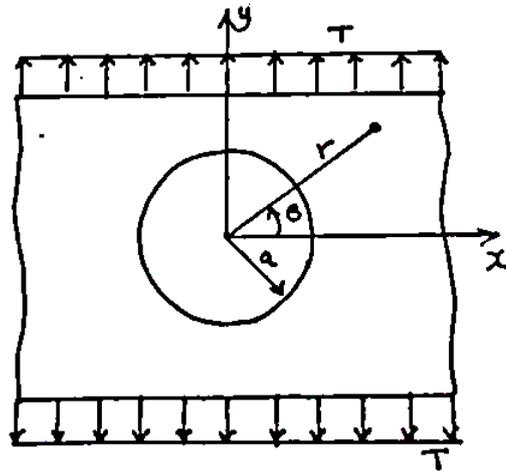
Ans.  $\left( k_1 = -\frac{\sqrt{2}P}{2(2\alpha + \sin 2\alpha)} \right)$  حيث  $\sigma_r = \frac{-2k_1}{r} \cos \theta - \frac{2k_2}{r} \sin \theta$

$(\sigma_\theta = \tau = 0)$  ،  $k_2 = \frac{-\sqrt{2}P}{2(2\alpha - \sin 2\alpha)}$

10. لوح شبه لا محدود و نحيف فيه ثقب صغير يتعرض لحمل شد كما في الرسم أدناه . تحرى حالة الإجهاد في منطقة الثقب ( $r = a$ ) و بعيداً عنه ( $r = \alpha$ ) . أوجد الإجهاد المماسي  $\sigma_\theta$  عندما تكون  $\theta = \frac{\pi}{2}, 0$  . ماذا تستخلص من النتائج التي تحصلت عليها . استخدم دالة الإجهاد

التالية:

$$\phi = \frac{T}{4} \left[ r^2 - 2a^2 \ln r + \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2} \cos 2\theta \right]$$



11. خذ الدالة  $\phi = f(r)\theta$

أوجد  $f(r)$  بحيث تكون  $\phi$  دالة إجهاد لنظام الإحداثيات القطبية.

Ans.  $(f(r) = A + B \ln r + Cr^2 + Dr^2 \ln r)$

12. إذا كانت الدالة،

$$\phi = \left( Ar^3 + Br \ln r + Cr + \frac{D}{r} \right) \sin \theta + E\theta \cos \theta$$

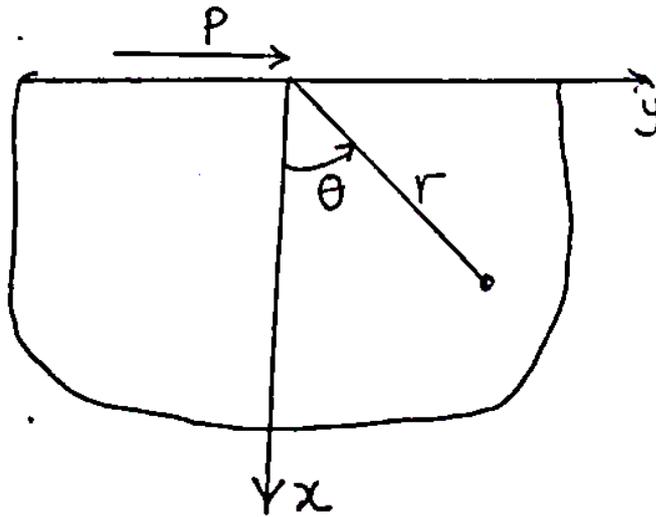
دالة إجهاد في نظام إحداثيات قطبية ، استنتج صيغ للإجهادات

$$\text{Ans.} \left( \begin{aligned} \sigma_r &= \left( 2Ar + \frac{B}{r} - \frac{2D}{r^3} \right) \sin \theta - \frac{2E}{r} \sin \theta, \\ \sigma_\theta &= \left( 6Ar + \frac{B}{r} + \frac{2D}{r^3} \right) \sin \theta, \\ \tau &= - \left( 2Ar + \frac{B}{r} - \frac{2D}{r^3} \right) \sin \theta \end{aligned} \right)$$

13. أوجد توزيع الاجهادات الناجم من حمل مركز مماسي مسلط علي حافة مستقيمة للوح شبه لا

محدود (أنظر الرسم). دالة الإجهاد

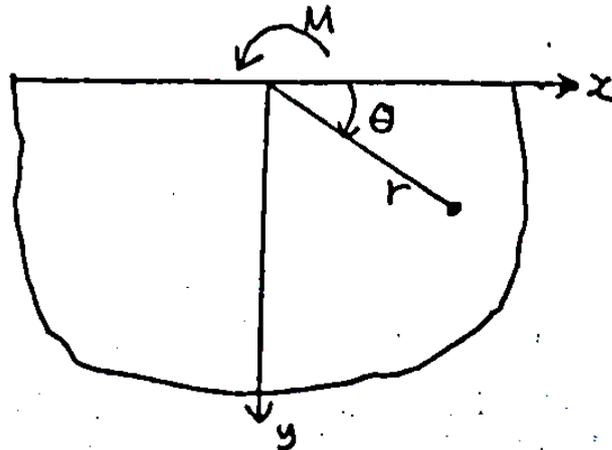
$$\phi = a\theta + br^2\theta + cr\theta\sin\theta + dr\theta\cos\theta$$



$$\text{Ans.} \left( \sigma_r = -\frac{2P}{\pi r} \sin \theta, \quad \sigma_\theta = \tau = 0 \right)$$

14. أوجد توزيع الاجهادات الناجم من عزم انحناء مركز عند نقطة على حافة مستقيمة للوح شبه

لا محدود (الرسم). دالة الإجهاد:  $\phi = A + B\theta + C\sin 2\theta$ .



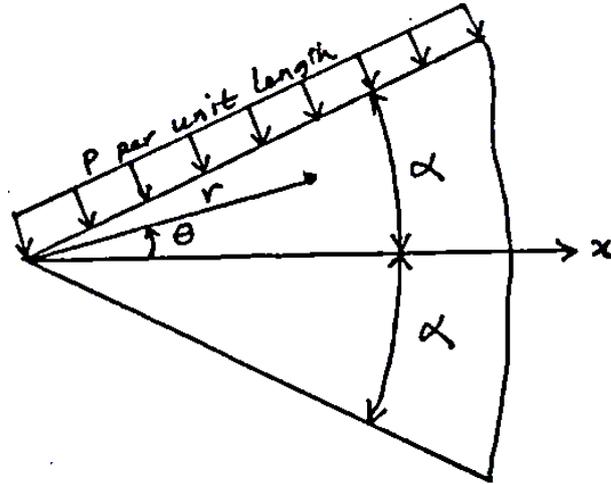
$$\text{Ans.} \left( \sigma_r = -\frac{2M}{\pi r^2} \sin 2\theta, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau = -\frac{M}{\pi r^2} (1 - \cos 2\theta) \right)$$

15. اسفين لا محدود (الرسم) مسلط عليه حمل منتظم P موزع على طول حافته. باستخدام دالة

الإجهاد التالية، أوجد توزيع الاجهادات في الاسفين بحيث تتحقق الحالات الحدودية . الحافة

السفلي خالية من الأحمال.

$$\phi = r^2 (c_1 \cos 2\theta + c_2 \sin 2\theta + c_3 \theta + c_4)$$



$$\text{Ans.} \left( \sigma_r = -\frac{P}{2} (1 + 2b\theta + c \sin \theta), \quad \sigma_\theta = -\frac{P}{2} (1 + 2b\theta - c \sin \theta) \right)$$

$$\tau = -\frac{P}{2} (-b + c \sin \theta) \quad b = \frac{\cos 2\alpha}{2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}, \quad c = \frac{1}{2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$$

## الفصل الثامن

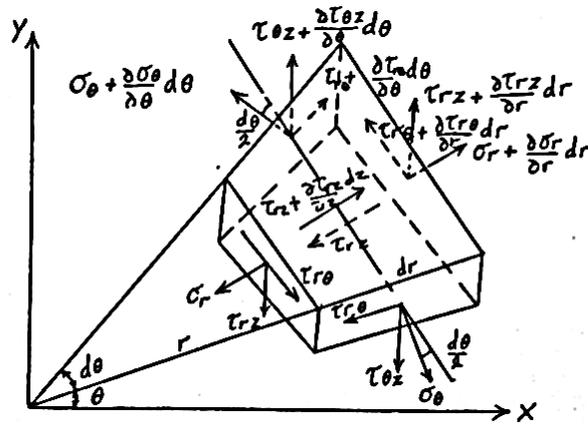
### نظرية المرونة (4)

### (Theory of Elasticity)

### الاجهادات الثلاثية - الإحداثيات الأسطوانية

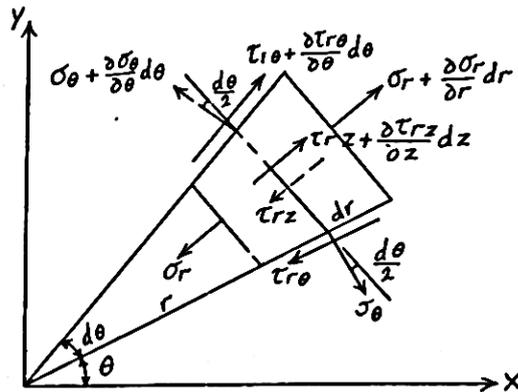
### (Three Dimensional Stresses: Cylindrical Coordinates)

8.1 معادلة الاتزان:



الرسم (8.1)

مجموع القوى في إتجاه r = صفر ،



الرسم (8.2)

$$\sum F_r = 0$$

$$\left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \right) (r + dr) d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz$$

$$- \left( \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr dz \frac{d\theta}{2}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz - \tau_{r\theta} dr dz \\
& + \left( \tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz \right) r d\theta dr - \tau_{rz} d\theta dr = 0
\end{aligned}$$

و بعد التبسيط تصبح،

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \quad (1)$$

و إذا جمعنا القوى في الاتجاه المماسي نحصل على،

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = 0$$

وإذا فعلنا نفس الشيء مع القوى في اتجاه z نحصل على،

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

## 8.2 معادلات الانفعال - الإزاحة:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}$$

$$\epsilon_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

## 8.3 معادلات الإجهاد - الانفعال:

$$\epsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \frac{\nu \sigma_\theta}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E} - \frac{\nu \sigma_r}{E}$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_r}{E} - \frac{\nu\sigma_\theta}{E}$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}$$

$$\epsilon_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G}$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{\tau_{\theta z}}{G}$$

## الفصل التاسع

### الألواح الدائرية (2)

#### ( Circular Plates (2) )

##### 9.1 معادلات الاتزان:

الإشارة هنا إلي معادلات الاتزان في فصل نظرية المرونة (3).

استخدم نواتج الإجهاد و العزوم،

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz, \quad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz, \quad N_{r\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} dz$$

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz, \quad M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz, \quad M_{r\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} z dz$$

$$Q_r = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} dz, \quad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\alpha} dz$$

و المعادلات هي:

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{2N_{r\theta}}{r} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} Q_r + q = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2M_{r\theta}}{r} - Q_\theta = 0 \quad (5)$$

##### 9.2 معادلات الانفعال - الإزاحة:

الإزاحة هي:

$$u = u_o(r, \theta) + z\phi(r, \theta)$$

$$v = v_o(r, \theta) + z\psi(r, \theta)$$

$$w = w(r, \theta)$$

و بالتالي معادلات الانفعال - الإزاحة تكون كما يلي:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u_o}{\partial r} + z \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \left( u_o + \frac{\partial v_o}{\partial \theta} \right) + \frac{z}{r} \left( \phi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} + \frac{\partial v_o}{\partial r} - \frac{v_o}{r} + z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r} \right)$$

$$\epsilon_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \phi$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \psi$$

و بالتالي يمكن استنتاج نواتج الإجهاد و العزوم بعد تعويض الانفعالات و الاجهادات التالية و

إجراء التكامل المناسب،

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} [\nu \epsilon_r + \epsilon_\theta]$$

$$\tau_{r\theta} = G \epsilon_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{r\theta}$$

$$\tau_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{rz}$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{\theta z}$$

و نواتج الإجهاد و العزوم كما يلي:

$$N_r = A \left[ \frac{\partial u_o}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \left( u_o + \frac{\partial v_o}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$N_{\theta} = A \left[ \nu \frac{\partial u_o}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left( u_o + \frac{\partial v_o}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$N_{r\theta} = 0.5(1-\nu)A \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} + \frac{\partial v_o}{\partial r} - \frac{v_o}{r} \right]$$

$$M_r = D \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \left( \phi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$M_{\theta} = D \left[ \nu \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \phi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$M_{r\theta} = 0.5(1-\nu)D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r} \right]$$

$$Q_r = 0.5(1-\nu)A \left[ \frac{\partial w}{\partial r} + \phi \right]$$

$$Q_{\theta} = 0.5(1-\nu)A \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \psi \right]$$

حيث أن،

$$A = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

إذا كان الانحراف صغيراً  $u_o = v_o = N_r = N_{\theta} = N_{r\theta} = 0$

و إذا كان اللوح متمائل حول المحور  $\psi = M_{r\theta} = Q_{\theta} = 0$

و كل الكميات الأخرى تكون بدلالة  $r$  فقط و بالتالي يمكن كتابتها هكذا،

$$M_r = D \left[ \frac{d\phi}{dr} + \frac{\nu\phi}{r} \right]$$

$$M_{\theta} = D \left[ \nu \frac{d\phi}{dr} + \frac{\phi}{r} \right]$$

المعادلة (4) يمكن أن تكتب كما يلي باستبدال  $Q_r$  بـ  $Q$  ،

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_{\theta}}{r} - Q = 0$$

و بتعويض  $M_r$  و  $M_{\theta}$  و عمل ترتيب لها نحصل على،

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{r^2} = \frac{Q}{D}$$

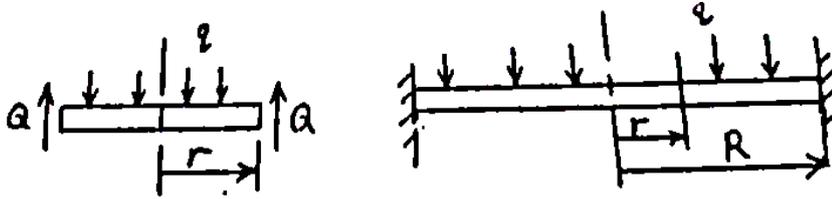
و هذه المعادلة تصبح أكثر فائدة إذا كتبت هكذا،

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\phi) \right] = \frac{Q}{D}$$

### 9.3 أمثلة محلولة:

مثال (1):

أوجد الانحراف و الإجهاد في وسط لوح دائري مصمت مقيد مسلط عليه حمل موزع بانتظام.



$$Q(2\pi r) = q\pi r^2$$

$$Q = \frac{qr}{2}$$

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\phi) \right] = \frac{q}{2D} r$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\phi) = \frac{qr^2}{4D} + C_1$$

$$\frac{d}{dr} (r\phi) = \frac{qr^3}{4D} + C_1 r$$

$$r\phi = \frac{qr^4}{16D} + \frac{C_1 r^2}{2} + C_2$$

$$\phi = \frac{qr^4}{16D} + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{2}$$

الحالات الحدودية،

$$r=0, \quad \phi=0 \quad \therefore C_2=0$$

$$r = R, \quad \phi = 0 \quad \therefore C_1 = -\frac{qR^2}{8D}$$

$$\therefore \phi = \frac{qr^3}{16D} - \frac{qR^2r}{16D}$$

$$M_r = D \left[ \frac{d\phi}{dr} + \frac{\nu\phi}{r} \right]$$

$$\therefore \frac{d\phi}{dr} = \frac{3qr^2}{16D} - \frac{qR^2}{16D}$$

$$\frac{\nu\phi}{r} = \frac{qr^2\nu}{16D} - \frac{qR^2\nu}{16D}$$

$$\frac{d\phi}{dr} + \frac{\nu\phi}{r} = \frac{qr^2}{16D}(3+\nu) - \frac{qR^2}{16D}(1+\nu)$$

$$\therefore M_r = \frac{qr^2}{16}(3+\nu) - \frac{qR^2}{16}(1+\nu)$$

$$r = 0, \quad M_r = -\frac{qR^2}{16}(1+\nu)$$

$$\hat{\sigma}_r = \frac{6M_r}{h^2} = \frac{3qR^2(1+\nu)}{8h^2}$$

الانحراف،

$$w = \int \phi \, dr$$

$$= \frac{qr^4}{64D} - \frac{qR^2r^2}{32D} + C_3$$

$$r = R, \quad w = 0 \quad C_3 = \frac{qR^4}{64D}$$

$$\therefore w = \frac{qr^4}{64D} - \frac{qR^2r^2}{32D} + \frac{qR^4}{64D}$$

$$r = 0, \quad \hat{w} = \frac{qR^4}{64D}$$

مثال (2):

لوح دائري مصمت مسنود إسناد بسيط مسلط عليه حمل مركز في الوسط. أوجد الانحراف و

الإجهاد الأقصى.

قوة القص عند أي نصف قطر  $r$  ،

$$2\pi r Q = P$$

$$\therefore Q = \frac{P}{2\pi r}$$

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\phi) \right] = \frac{P}{2\pi D}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\phi) = \frac{P}{2\pi D} \ln r + C_1$$

$$\frac{d}{dr} (r\phi) = \frac{Pr}{2\pi D} \ln r + C_1 r$$

$$r\phi = \frac{Pr^2}{2\pi D} [2 \ln r - 1] + \frac{C_1 r^2}{2} + C_2$$

$$\phi = \frac{Pr}{2\pi D} [2 \ln r - 1] + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{2}$$

الحالات الحدودية،

$$r = 0, \quad \phi = 0 \quad \therefore C_2 = 0$$

$$\therefore \phi = \frac{Pr}{8\pi D} [2 \ln r + 1] + \frac{C_1 r}{2}$$

$$M_r = D \left[ \frac{d\phi}{dr} + \frac{\nu\phi}{r} \right]$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{P}{8\pi D} [2 \ln r + 1] + \frac{C_1}{2}$$

$$\frac{\nu\phi}{r} = \frac{P\nu}{8\pi D} [2 \ln r - 1] + \frac{\nu C_1}{2}$$

$$\frac{d\phi}{dr} + \frac{\nu\phi}{r} = \frac{P}{8\pi D} [2 \ln r + 1] + \frac{P\nu}{8\pi D} [2 \ln r - 1] + \frac{C_1}{2} (1 + \nu)$$

$$= \frac{P}{8\pi D} [2(1+\nu)\ln r + (1-\nu)] + \frac{C_1}{2}(1+\nu)$$

$$\therefore M_r = \frac{P}{8\pi} [2(1+\nu)\ln r + (1-\nu)] + \frac{C_1 D}{2}(1+\nu)$$

$$r = R, \quad M_r = 0, \quad \therefore C_1 = -\frac{P}{4\pi D} \left[ 2\ln R + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right]$$

$$M_r = \frac{P}{4\pi} (1+\nu) \ln \frac{r}{R}$$

واضح أن  $M_r = 0$  عند  $r = 0$  تصبح قيمة لا نهائية . إذن هذه الصيغة لا تصلح لحساب الإجهاد في وسط اللوح . في الواقع ليس هنالك في الحياة العملية ما يسمى بحمل مركز . الصحيح أن الحمل يكون موزعاً على مساحة صغيرة. و إذا كان هذا هو الحل فإن الصيغة أعلاه يمكن أن تستخدم

لإيجاد العزم من أي نقطة قريبة من وسط اللوح بدلاً من الوسط تماماً، الإجهاد هو،

$$\sigma_r = \frac{3P(1+\nu)}{2\pi h^2} \ln \frac{r}{R}$$

$$\phi = \frac{Pr}{8\pi D} [2\ln r - 1] - \frac{Pr}{8\pi D} \left[ 2\ln R + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right]$$

$$w = \int \phi \, dr$$

$$= \frac{Pr^2}{16\pi D} [2\ln r - 1] - \frac{Pr^2}{16\pi D} - \frac{Pr^2}{16\pi D} \left[ 2\ln R + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right] + C_3$$

$$r = R, \quad w = 0 \quad \therefore C_3 = \frac{PR^4}{16\pi D} \left( \frac{3+\nu}{1+\nu} \right)$$

$$\therefore w = \frac{Pr^2}{16\pi D} [\ln r - 1] - \frac{Pr^2}{16\pi D} - \left[ 2\ln R + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right] + \frac{PR^2}{16\pi D} \left( \frac{3+\nu}{1+\nu} \right)$$

$$r = 0, \quad w = \frac{PR^2}{16\pi D} \left( \frac{3+\nu}{1+\nu} \right)$$

#### 9.4 تمرين:

1. برهن أن الانحراف في وسط لوح دائري مقيد الحافة نصف قطره  $R$  و سمكه  $t$  تحت تأثير

حمل مركز في الوسط  $P$  كما يلي:

$$\hat{v} = \frac{3PR^2(1-\nu^2)}{4\pi Et^2}$$

برهن أيضاً أن الإجهاد الأقصى،

$$\hat{\sigma} = \frac{3P}{2\pi t^2}$$

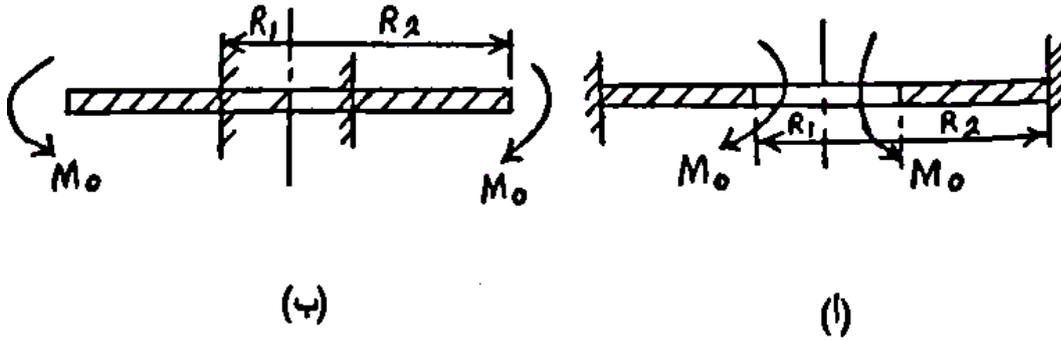
2. لوح دائري نصف قطره R و سمكه t تحت تأثير حمل موزع بانتظام q . إذا كان اللوح

مسنود إسناد بسيط برهن أن الانحراف الأقصى  $\hat{v}$  و الإجهاد الأقصى  $\hat{\sigma}$  كما يلي:

$$\hat{v} = \frac{3qR^4}{16Et^3}(5+\nu)(1-\nu)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{3qR^2(3+\nu)}{8t^2}$$

3. أوجد الإجهاد الأقصى و الانحراف الأقصى في كل من اللوحين التاليين (أ) و (ب).



4. لوح دائري قطره 150mm و سمكه 10mm مقيد بإحكام عند الحافة قبل التحميل.

أحسب الانحراف عند نقاط متعددة ثم أرسم منحنى الانحراف و ذلك عندما يكون الحمل

موزع بانتظام معدله  $0.015\text{N/mm}^2$  . خذ  $E=70\text{kN/mm}^2$  و  $\nu = 0.3$  .

الإجابة:

r (mm)	0	15	30	45	60	75
v (mm)	11.57	10.06	6.83	3.40	0.91	0

5. لوح دائري رقيق نصف قطره R مسنود إسناد بسيط عند حافته و مسلط عليه حمل مركز

P و الذي يمكن اعتباره حمل موزع بانتظام على مساحة دائرية صغيرة نصف قطرها  $r_0$ .

المعادلات التي تنطبق على هذه الحالة هي:-

$$\left. \begin{aligned} (1) \frac{\phi}{r} &= A + \frac{B}{r^2} - \frac{kr^2}{4r_0^2} \\ (2) \frac{d\phi}{dr} &= A - \frac{B}{r^2} - \frac{3kr^2}{4r_0^2} \end{aligned} \right\} 0 < r < r_0$$

$$\left. \begin{aligned} (3) \frac{\phi}{r} &= C + \frac{D}{r^2} - k \ln r \\ (4) \frac{d\phi}{dr} &= C - \frac{D}{r^2} - k(\ln r + 1) \end{aligned} \right\} r_0 < r < R$$

حيث أن A ، B ، C و D ثابتت تعتمد على الحالة الحدودية و

$$k = \frac{3(1-\nu^2)P}{\pi Et^3}$$

حيث أن  $\nu$  هي نسبة بواسون و E معاير المرونة t سمك اللوح.

أوجد قيم A ، B ، C و D ثم استنتج باستخدام المعادلة (3) للحالة  $r \rightarrow 0$  يؤول

الانحراف إلي،

$$\nu = \frac{3(1-\nu)(3+\nu)}{4\pi Et^3} PR^2$$

$$\text{Ans. } [B = 0, \quad A = k \left[ \ln \frac{R}{r_0} + \frac{1}{1+\nu} - \frac{r_0^2}{4R^2} \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \right]$$

$$D = 0, \quad C = k \left[ \ln R + \frac{1}{1+\nu} - \frac{r_0^2}{4R^2} \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \right]$$

6. اسطوانة ضغط مزودة بغطاء قطره 0.6m و سمكه 25mm . على افتراض أن الغطاء مقيد بجساءة عند حوافه، أوجد الضغط الأقصى المسموح به إذا كان الانفعال الرئيس في الغطاء يجب ألا يتجاوز الانفعال الذي ينجم عن إجهاد شد  $150 \text{ N/mm}^2$  ،  $\nu = 0.3$  .

Ans.(0.3816N/mm<sup>2</sup>)

## الكتب والمراجع

### الكتب والمراجع العربية:

1. بروفييسور محمود يس عثمان ، "مذكرة محاضرات في متانة المواد المجلد الأول " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1978م).
2. بروفييسور محمود يس عثمان ، "مذكرة محاضرات في متانة المواد المجلد الثاني " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1982م).
3. بروفييسور محمود يس عثمان ، "مذكرة محاضرات في متانة المواد المجلد الثالث " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1990م).
4. د. أسامة محمد المرضي سليمان ، "محاضرات في متانة المواد " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1995م).
5. د. أسامة محمد المرضي سليمان ، "محاضرات في أساسيات المرونة واللدونة " ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، (1998م).

### الكتب والمراجع الإنجليزية:

1. William A. Nash and C.E.N Sturgess, "Strength of Materials", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Company, New York, 1997.
2. Urry S. A. and Turner P.J., "Solving Problems in Solid Mechanics", Vol2, Longman Scientific & Technical, UK, 1986.
3. James M. Gere and Stephen P. Timoshenko, "Mechanics of Materials", Van Nostrand Rienholds, UK, 1987.
4. Ryder, "Strength of Materials" , 1969.

## المصطلحات

Allowance	سماح
Assumptions	افتراضات
Angle section	مقطع زاوية
Biharmonic equation	معادلة البايهارمونك
Boundary conditions	حالات حدودية
Crushing load	حمل السحق
Castigliano	كاستيغليانو
Critical load	حمل حرج.
Curved	مقوس
Curve	منحني
Crippling load	حمل إعاقاة
Cylinder	اسطوانة
Circumference stress	إجهاد محيطي
Cartesian coordinates	إحداثيات كارتيزية
Cylindrical coordinates	إحداثيات أسطوانية
Circular plate	لوح دائري
Column	عمود
Channel section	مقطع مجري
Displacement	إزاحة

Euler	اويلر
Eccentric load	حمل لا تمرکزي
Eccentricity	لا تمرکز
End conditions	حالات طرفية
Energy	طاقة
Empirical formula	صيغة تجريبية
Fourier series	متسلسلة فورير
Hoop stress	إجهاد محيطي
Hub	قميص - هب
I – section	مقطع I
Johnson	جونسون
Limit load	حمل حدي
Mid-plane	سطح وسيط
Pin – ended	طرف مسماري
Plastic hinge	مفصلة لدنة
Product moment of area	مضروب عزم المساحة
Principal axis	محور رئيس
Pressure	ضغط
Polar coordinates	إحداثيات قطبية
Plate	لوح

Rankine	رانكين
Rotation	دوران
Radial stress	إجهاد قطري
Slenderness ratio	نسبة النحافة
Statically indeterminate	غير محدد استاتيكيًا
Shrinkage	انكماش
Strain gauge	مقياس انفعال
Simple framework	هيكل بسيط
Structural steel	صلب إنشءاءات
Section modulus	معاير المقطع
Symmetrical	متماثل
Strength of materials	متانة المواد
Stress function	دالة إجهاد
Stress couple	ازدواج إجهاد (عزم)
Sleeve	قميص
Theory	نظرية
Thick	سميك
Thin	رقيق
Theory of elasticity	نظرية المرونة
T – section	مقطع T

Virtual work

شغل افتراضي

Method

طريقة