المملكة العربية السعودية

مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

كتاب العربية

الاحتمال الصدفة واليقين

تأليف: بول دوهو فيلز

ترجمة: حسين صدراوي

مراجعة: فايز بن علي الشهري

١٤٣٦هـ - ٢٠١٥م

Que sais-je?

ماذا أعرف؟

المملكة العربية السعودية

مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

كتاب العربية

الاحتمال
الصدفة واليقين

تأليف: بول دوهو فيلز

ترجمة: حسين صدراوي

مراجعة: فايز بن علي الشهري

١٤٣٦هـ - ٢٠١٥م

Que sais-je?

ماذا
أعرف؟

ⓗ **مدينة الملك عبدالعزيز للعلوم والتقنية، ١٤٣٦هـ**

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

فليز، بول دوهو

الاحتمال الصدفة واليقين. / بول دوهو فيلز .- الرياض ، ١٤٣٦هـ

.. ص ؛ .. سم

ردمك: ٥-٧٨-٨٠٤٩-٦٠٣-٩٧٨

١- الاحتمالات (رياضيات) أ. العنوان

ديوي ٥١٩,٨٢ ١٤٣٦/٥٣٣٢

رقم الإيداع: ١٤٣٦/٥٣٣٢

ردمك: ٥-٧٨-٨٠٤٩-٦٠٣-٩٧٨

مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

مدينة الملك عبدالعزيز للعلوم والتقنية

ص.ب. ٦٠٨٦ الرياض ١١٤٤٢

المملكة العربية السعودية

هاتف: ٠١١ ٤٨٨٣٤٤٤ - ٠١١ ٤٨٨٣٥٥٥ فاكس: ٠١١ ٤٨٨٣٧٥٦

الموقع الالكتروني: www.kacst.edu.sa

إصدارات المدينة: publications.kacst.edu.sa

البريد الالكتروني: awareness@kacst.edu.sa

بسم الله الرحمن الرحيم

توطئة :

قابلت يومًا شخصًا كان يؤكّد شكَّه في إمكانيّة الوصول إلى نتائج جديدة في الرياضيّات، بدا لي أنَّه إذا وجد مثل هذا الرأي فذلك بسبب أنانيّة الرياضيّين أنفسهم قليلي الاستعداد للحديث عن مادّتهم لغير أصحاب الاختصاص. لصالحهم يجب الاعتراف بأنَّ المحاضرة في موضوعات نظريَّة دون أن يسبب ذلك بعض الضجر أمرٌ صعبٌ، و هناك ما يكفي من العمل للبحث عن أشياء جديدة (والكل يعلم أنَّ البحث وحده محلّ تقدير حقيقي في الأوساط العلميّة) ما لا يترك مجالًا واسعًا للتبسيط و التعريف بالرياضيات.

مع ذلك علينا أن نحاول جعل العلم قريبًا من العامّة، و بعد الانتهاء منه عليّ الاعتراف بأنّني استمتعت بكتابة هذا الكتيّب (المونوجراف) في هذا الاتجاه آملًا أن يحقق هدفه، و هو التعريف ببعض التطوّرات الحديثة (و القديمة) في حساب الاحتمالات، و أن يساهم- بالمحاكاة- في جعل الرياضيين يكتبون أكثر لبقيّة الناس.

بإمكان القارئ الكريم إكمال محتوى هذا الكتاب بالرجوع إلى الكتّاب والكتب المذكورة في وسط النص و في آخره. هذه العملية مسهّلة منذ مدّة بالرجوع إلى محرّكات البحث على الشبكة، وبصفة خاصّة المراجع الدقيقة لأغلب المنشورات الرياضيّة الموجودة من بين مصادر أخرى على MathSciNet و موقع :الجمعيّة الأمريكيّة للرياضيّات :http://www.ams.org

مدخل:

قد يبدو في عنوان هذا الكتاب تضاد من حيث الجمع بين متضادّين: مسألة المصادفة و مسألة اليقين.

في الواقع نريد أن نبيّن كيف يولد اليقين من شيء تحكمه قوانين المصادفة. كان من الممكن أن يكون العنوان "أفكار حول قوانين الأرقام الكبيرة " مثلًا رغم أنّ ما نعرضه يتجاوز هذا الموضوع. قبل أن نذهب بعيدًا لنأخذ بعض الأمثلة التي تسمح بفهم ما يتحدّث عنه.

التجسيدات البسيطة للمسائل العشوائيّة توجد في ألعاب المصادفة مثل: لعبة " الوجه و القفا " أو لعبة رمي الزهر. من المفيد التذكير بأنّ كلمة alea تعني الزهر في اللّغة اللاتينيّة و الزهر تأتي من العربيّة الشرقيّة و استعملت حتى القرن الثاني عشر لتسمية المكعّب نفسه. هذا يؤكّد أهميّة الألعاب في الولادة التاريخيّة لحساب الاحتمالات.

أبسط مثال على متتالية عشوائيّة يمكن تجسيدها بمتتالية ألعاب (أو تكرار غير محدّد) وجه وقفا حيث ترمى قطعة نقديّة في الهواء و تسقط "بالمصادفة" لتظهر في الجزء المرئي منها الوجه أو القفا. من الطبيعي أن نفترض أنّ النتائج المتتالية للعبة مستقلّة وغير قابلة للتنبؤ، و أنّ القطعة النقديّة متوازنة بحيث لا يكون هناك سبب لأن يظهر الوجه أكثر من القفا أو العكس.

بعد ملاحظة n لعبة أولى لنحسب S_n عدد الأوجه التي ظهرت من الرمية الأولى إلى الرمية n للقطعة النقدية، تردّد ظهور الوجه يعرف بالكسر $\frac{S_n}{n}$ و هو عدد بين ٠ و ١ و يمكن أن يكون مبدئيًّا بين القيم الممكنة ٠، $\frac{1}{n}$، $\frac{2}{n}$،... $\frac{n-1}{n}$،١.

ماذا يحدث للكسر $\frac{S_n}{n}$ عندما تكبر n بصفة غير متناهية؟ الجواب عن هذا السؤال معطى بما يسمّى عادة " قانون الأعداد الكبيرة " الذي يبيّن- بالحساب الرياضي- أنّ المتتالية $\frac{S_n}{n}$ تؤول نحو $\frac{1}{2}$. تعبير أكثر دقة لهذه النتيجة (kolmogorov, 1930, chap II) يكمن في القول إنّ نهاية $\frac{S_n}{n}$ عندما تؤول n إلى ما لا نهاية تساوي ($\frac{1}{2}$) مع احتمال يساوي ١ كما سنرى لاحقًا، عمليًا ليس هناك فرق لأنَّ أيّ حدث احتماله واحد هو "

فيزيائيًّا مؤكّد ". هكذا نرى في هذه المسألة التي لا يمكن توقعّ تفاصيل حدوثها، نستطيع مع ذلك أن نستنتج يقينًا إجماليًّا.

يمكن الاعتراض والقول إنَّ التقارب لتردّد لعبة الوجه و القفا نحو($\frac{1}{2}$)طبيعي. في الواقع بعض التفكير يبيّن أنَّ النتيجة ليست بديهية إطلاقًا.

من الممكن التخيل أنَّ ($\frac{S_n}{n}$) تتذبذب بين ٠ و١ بدون التقارب نحو نهاية محددة.

مثال آخر " لقانون الأعداد الكبيرة " يسمح بالحصول على نتيجة غير منتظرة، نقصد إبرة بوفون التي اخترعها جورج لويس لوكلارك بوفون عام ١٧٧٧ (١٧٠٧-١٧٨٨) و تتمثل في أن نرسم على الأرض سطورًا متوازية تفصلها المسافة a نفسها وحدة القياس، ثم نرمي إبرة دقيقة طولها(l) حيث ($l < a$)وننظر إن كانت الإبرة تقاطع أحد أسطر الشبكة أو لا، نكرر التجربة عددًا كبيرًا من المرّات ثم نحسب التردّد لهذه التقاطعات. من الطريف أنَّه عندما تؤول(n) إلى ما لا نهاية التردّد (p_n) يؤول إلى($p = \frac{2l}{\pi a}$) ما يسمح بحساب تجريبي ($\frac{2l}{ap_n}$) للعدد ($\pi = 3.145$) باستعمال قاعدة الثلاث، ومن المفاجئ أن نستطيع حساب (π) من متابعة مسألة عشوائيّة، و لكن هذا ما يحدث، و تجارب عديدة مماثلة تؤكّد هذه القاعدة (ندعو القارئ إلى القيام بهذه التجربة على القاعة باستعمال عود ثقاب، بحيث تحترم المقاييس (a=1.25 l) أو (l=0.8 a.)، للحصول على مقاربة للعدد (π) بين (٣.١ و ٣.٢.) يجب القيام بعدد يقارب المائة من الرميات لانَّ التقارب بطيء نسبيًّا.

رسم بياني ١ : مقياس بوفون

وقد صل بوفون نفسه إلى (٢٠٤٨) رمية ما سمح له بمقاربة (π) بدقّة الواحد على المائة.

يطبّق قانون الأعداد الكبيرة أيضًا على متوسط التجارب العشوائيّة من الصنف نفسه، وليس القانون الوحيد الذي يصف تغير بعض المتتاليات العشوائيّة، بل يوجد - في الواقع - عدّة قوانين "أعداد كبيرة " بعضها مفاجئ جدًا.

سيركّز حديثنا على دراسة النتائج من هذا الصنف، و كثير منها- من بين ما سنذكر- اكتشف حديثًا. على الرغم من الفائدة الظاهرة للتعريف بهذه القوانين لا نستطيع هنا- بسبب المساحة المتاحة لنا- إلّا تناول دراسة هذه المسائل- الغريبة غالبًا التي لها طابع عام، يضعها في جوهر العلم- بشيء من السطحيّة. في ما يلي نحاول بجديّة أن يكون تقديمنا حيًّا قدر الإمكان للمصادفة و اليقين. سوف يتحقّق هذا باتّباع ترتيب غير أكاديميّ يكمن في الحديث عن " حساب الاحتمالات " و تطوّره التاريخي أكثر من المحاضرة للمختصين وحدهم.

الفصل الأول

استحالة مشاهدة أحداث غير محتملة

يصعب تقديم مسألة المصادفة، الاحتمال، والعشوائيّة بصفة متناسقة لأنَّها تجمع بين النماذج الرياضيّة والنماذج الفلسفية والنماذج الفيزيائيّة.

علينا أن نفرّق بين النظرية الرياضيّة لحساب الاحتمالات، التي هي جزء من التحليل ذي التطورات منتهية الدقة من ناحية ، و من ناحية أخرى المسائل الفيزيائيّة التي يمكن تأويلها باستعمال هذه النظريّة دون أن نكون دائمًا قادرين على التسويغ الكامل لصحّة النمذجة. تشاهد مناسبة النموذج الاحتمالي للعالم الفيزيائي و لا يمكن إثباتها؛ إذ تظلّ الفلسفة في موقع متشابك مع هذه المسائل، حيث إنَّ الجدل بين مؤيدي الحتمية القحّة (حيث لا مجال للمصادفة) و الذين يعتقدون أنّ المصادفة جزء طبيعي من العالم الذي نعيش فيه (نذكر هنا نظرية الفوضى التي طوّرت منذ ١٩٧٥ التي تبيّن أنّ عددًا من الظواهر هي طبيعيًّا غير قابلة للتنبؤ إذا تجاوزنا حدًّا زمنيًّا معيّنًا بسبب حساسية للشروط الأولية لوصف هذه الظواهر).

لنعود لمثال لعبة الوجه و القفا التي ذكرناها سابقًا كنموذج معهود للظاهرة العشوائيّة، نرى أنّ مثل هذه الظاهرة غير قابلة للتنبؤ في نتائجها الفرديّة، فيجب لوصفها الوصول إلى تعريفات تسمح بالتحويل الكمّي للطابع المحتمل وغير المحتمل للأحداث القابلة للمشاهدة، وفي حالة الألعاب المنتهية، حيث إنَّ كلًّا من الإمكانيّات الفرديّة المحتملة لها فرصة الوقوع نفسها (لعبة الوجه والقفا بسبب التناظر مثلًا)، ومن الطبيعي تعريف الاحتمال, نرمز له بالرمز P(A)، للحدث A الذي يمكن مشاهدته خلال اللّعبة بالقسمة .

$$P(A) = A \text{ احتمال } = \frac{A\text{عدد المرّات التي تتحقق فيها}}{\text{العدد الجملي للحالات الممكنة}}$$

كمثال في لعبة القفا و الوجه ٣ مرات يمكن أن نشاهد (FFF,FFP,FPF, PFF, FPP, PFP , PPF ,PPP)

حيث (P) ترمز للقفا و (F)ترمز للوجه

الحدث: (يظهر القفا مرّة واحدة) يكون احتماله إذن $(\frac{3}{8})$ لأنّ A يتحقّق في الحالات الثلاث (PFF ,FPF , PFF) و مجموع الحالات الممكنة(٨).

من هذا التعريف، فإنّ الحدث ذا الاحتمال الضعيف يمكن أن يعدّ غير مرجّح الوقوع، و لذلك تصعب مشاهدته، نأخذ مثلًا احتمال مشاهدته (١٠) قفا متتالية في لعبة القفا و الوجه (PPPPPPPPPP)، الاحتمال المقابل يكون إذن $(\frac{1}{2^{10}})$ أي حوالي (٠.٠٩%) لذلك يبدو عمليًّا من غير الوارد أن يشاهد لاعب هذا الحدث بإجراء تجربة واحدة، مع ذلك هذا غير مستحيل, بما أنّه لو أجرى اللاعب نفسه - إذا قبلنا أنه يتحلّى بالصبر التجربة – (٤٠٠٠) مرّة أي تجربة لعبة القفا و الوجه (١٠) مرّات، يكون الاحتمال هذه المرة -1 $(1-2^{-10})^{4000}$) أي (٩٨%) لمشاهدة مرّة واحدة على الأقل من بين(٤٠٠٠) تكرار للعبة القفا و الوجه، عشر مرّات متتالية، و هذا يجعل مشاهدة مثل هذا الحدث محتملة جدًّا على المدى البعيد.

لنفترض الآن أنّ متتالية الألعاب قفا وجه غير منتهٍية، لا يمكن في هذه الحالة تعريف الاحتمال بالقسمة($\frac{\text{عدد الحالات التي تحقق } A}{\text{عدد الحالات الجملي}}$) حيث إنّ هذا الكسر ليس له معنى بما أنّ مقامه غير منته، مع ذلك يمكن تمديد التعريف السابق منطقيًّا بإعطاء - كأمر مسلّم- للاحتمال خصائص الاتصال عند أخذ النهايات، يسمح هذا بإسناد الاحتمال صفر لبعض الأحداث مثل PPP...P (أي قفا في كلّ المرّات).

بما أنّ أيّ حدث ذي احتمال ضعيف جدًّا يمكن عدّه مستحيل المشاهدة - تقريبًا في اختبار واحد- فنخلص إلى قبول المسلّمة التي تقول: إنّه إذا كان احتمال حدث ما صفرًا فعلينا أن نعدّ تحقيقه "استحالة فيزيائيّة "وجهة نظر يصعب الدفاع عنها عندما ننظر إلى كلّ الحالات الممكنة لمتتاليات القفا و الوجه جمليًّا، على الرغم من أنَّ كلّ حدث من هذه الأحداث- بسبب المبدأ المذكور- مستحيل فيزيائيًّا، فإنَّ واحدًا من هذه الأحداث يتحقّق دائمًا، و هنا التناقض؛ لذلك لا بد من توضيح تأويل المبدأ بالإشارة إلى أنّ الاستحالة الفيزيائيّة لمشاهدة حدث ذي احتمال صفريّ لا تنطبق إلا على حدث واحد من بين هذه الأحداث، يحدّد مسبقًا قبل التجربة.

عندما نتحدّث هنا عن حدث واحد فهذا لا يُقصي أنَّ حدثًا واحدًا يمكن أن يكون مركّبًا، بما أنه- كما سنرى- إذا كانت ,...,A_1,A_2متتالية أحداث ذات احتمال صفري, والحدث الذي نرمز له بالرمز ...$A_1 \cup A_2 \cup$...) و الذي يحدث إذا تحقق واحد من (A_i) على الأقل هو أيضًا حدث صفري ، أي إذا كان كل حدث من متتالية أحداث ذي احتمال صفري فإنَّه من المستحيل مشاهدة حدث واحد فقط.

نصل إلى استخلاص الأفكار الآتية:

١) الظاهرة العشوائيّة- بالتعريف- يستحيل التنبؤ بها بالتفصيل، نستطيع فقط أن نحسب الطابع المحتمل وغير المحتمل للأحداث القابلة للمشاهدة التي تتبع هذه الظاهرة.

٢) إذا كانت الظاهرة معقّدة بما فيه الكفاية، فمن الممكن أن نسند لبعض الأحداث القابلة للمشاهدة- نظريًّا- الاحتمال صفر ما يجعلها استحالات فيزيائيّة.

٣) عندما نقول - قبل مشاهدة ظاهرة عشوائيّة- إنَّ بعض النتائج الممكنة نظريًّا لن تتحقّق، فإلى أيّ مدى تبقى الظاهرة عشوائيّة؟ بلغة أخرى، أليس هناك تناقض في استخلاص حقائق يقينيّة تهمّ الظواهر العشوائيّة؟

يجسّد مثال ألعاب المصادفة قوانين الأعداد الكبيرة المتعدّدة التي تصف سلوكيّات مؤكّدة لبعض الأشياء العشوائيّة بدقّة، فمن الشائع أن نرى محاولة لاعبي الكازينوهات استعمال قانون للأعداد الكبرى لغير مصلحة خصومهم، فهناك طريقة من هذا الصنف واسعة الانتشار رغم مساوئها، و هي طريقة " مبدأ التعويض " وسيأتي وصفها: (انظر الباب ١٤). في الكازينو (انظر الباب ١٣).

تعوّض لعبة القفا و الوجه بحدوث الزوجي أو الفردي، أو الأحمر أو الأسود على طاولة العجلة. هذه الألعاب تسلك مثل سلوك القفا و الوجه، لذلك نحتفظ بمصطلحات اللّعبة الأخيرة .إذا كانت (S_n) تمثّل عدد الأوجه التي تظهر في n لعبة و $T_n = S_n - n$ الفرق بين عدد المرّات التي يظهر فيها الوجه و عدد المرّات التي يظهر فيها القفا و ذلك حتى اللّعبة الأخيرة فمن الممكن إثبات- باحتمال (١)- أنّ المتتالية (T_n) تأخذ القيمة ٠ عددًا غير منته من المرّات.

استراتيجية اللاعب- إذن- هي التالية، يشاهد ($T_{1,...,}$ T_k) حتى يحدث زائد T_k (للصفر) في مستوى محدّد مسبقًا مثلًا: $T_k = 5$ (زيادة ٥ أوجه على الأقفيّة). المقامر يلعب التعويض بالمخاطرة بصفة آليّة على نتائج

الزائد الذي وقعت مشاهدته (يتوقّع ظهور قفا) حتى يحدث التعويض الذي تصفه $(T_{n+k} = 0)$ يتأكد اللاعب من تسجيل ربح يساوي $(T_k = 5)$ مرّات ما خاطر به أوّلًا .

عيوب هذه "الطريقة" متعددّة: أوّلًا لا يتعلّق الأمر هنا بلعبة القفا والوجه المتوازنة، و لكن بألعاب العجلة مع احتمالات ١/٣٧, ٢/٣٨ أو غيرها (ظهور صفر أو صفرين). المبالغ المخاطر بها يحتفظ بها البنك كليًّا أو جزئيًّا. هذا يجعل لعبة التعويض خاسرة في متوسّطها على المدى البعيد إذا أخذنا بعين الاعتبار عدد المرّات التي يأخذ فيها البنك المخاطرات ما بين البداية و العودة للتعويض.

المخاطرة بعكس التعويض (أي لعب الوجه) حتّى الوصول إلى ربح محدّد مسبقًا تبدو غير منطقيّة، و لكن من ناحية الاحتمالات تعود إلى " لعب التعويض" لذلك الخيار، وهو هنا مجرّد دعم معنوي لا يجلب أيّ ضمانات خاصة.

ختامًا تذبذبات(T_{k+m} ,m=1,2,...) قبل العودة إلى الصفر يمكن أن تكون مهمّة بما يكفي لإفلاس لاعب لا يملك ثروة تضاهي ثروة البنك، إضافة إلى ذلك فقد تستغرق وقت انتظار معتبر، ولن ننسى لاحقًا (الباب ١٣) ذكر - بالتفصيل - أكثر ألعاب الكازينو خاصّة في ما يهمّ بعض الجوانب من تركيباتها الاحتماليّة، وسنطرح السؤال الذي يطرحه كلّ لاعب: هل من الممكن حقًّا ربح المال باتّباع طريقة أو نظام معيّن؟ والجواب لهذا السؤال سيكون- تقريبًا- الآتي: إنّ ذلك ممكن على أن نخاطر بكثير و نربح القليل تقريبًا- بصفة مؤكّدة على أن يكون ذلك مرّة واحدة- وألّا نعيد الكرّة مطلقًا. سنرى من ناحية أخرى أنّ الخيار الأذكى هو ألّا نلعب بالكلّ و هو ما يثبته المنطق الرياضي دون شك، وذلك لن يثني اللاعبين المغرمين باللّعب.

لكي نجعل قريبًا إلى الحدس معنى الأحداث ذات الاحتمال الصفري، لنأخذ- من جديد- اللّعبة غير المنتهية للوجه و القفا ونسأل: هل من الممكن عرض كلّ النتائج الممكنة نظريًّا؟ أي المتتاليات غير المتناهية من (PوF) في كتيب مرتب بالأعداد ...1,2,3. كلّ مجموعة يمكن ترقيم عناصرها تسمّى قابلة للعد. من الناحية الفيزيائيّة المجموعات القابلة للعدّ هي المجموعات الوحيدة السهل الوصول إليها إنسانيًّا، حيث إذا رصدنا للإنسانية مدّة حياة غير منتهية فسوف يمكنها بالإقصاء المتتالي أن تجد- بعد وقت طويل بما فيه الكفاية- عنصرًا "ضائعًا" في المجموعة .

و يحدث بالضبط أنّ مجموعة المتتاليات غير المنتهية منP أو F و بصفة مكافئة مجموعة كلّ الاحتمالات الممكنة في لعبة القفا و الوجه غير المنتهية ليست قابلة للعدّ. كي نثبت ذلك نستعمل برهان كانتور (١٩١٨-١٨٤٥) الذي يتمثل في افتراض أن ذلك ممكن و يتحقّق في جدول كما في الصورة ٢.

1	P	F	F	P	F	P...
2	F	P	F	P	P	F...
3	P	F	P	F	F	P...
4	P	P	F	P	F	F...
5	F	F	P	P	F	P...

صورة رقم ٢

و يكفي أن نأخذ القطر هنا(PPPPF...) و عكسه هنا(FFFFP...) الذي لا ينتمي إلى الجدول و هذا يناقض فرضية القابلية للعدد.

لعبة " القفا و الوجه " حالة خاصّة من ظاهرة عشوائيّة متكوّنة من مجموعة نتائج يمكن تبديلها، أي يمكن تحويلها باستعمال تحويلة تقابليّة (حيث كلّ عنصر من عناصر المجال يحوّل إلى عنصر وحيد في المدى) غير محددة دون تغيير التركيبة الاحتماليّة.

عندما يكون لظاهرة عشوائيّة مجموعة نتائج قابلة للتغيير فالاحتمالات الوحيدة التي نحصل عليها هي:

١) لا يوجد غير عدد منته من الحالات الممكنة ذات الاحتمال الواحد.

٢) عدد الحالات الممكنة غير قابل للعد، و كلّ حالة احتمالها صفر، حيث لو وجد تعداد.

في والواقع، إذا كان هناك عدد من $(w_n, \dots. w_1)$ الأحداث الأوليّة الاحتمال $(P(W_i) = p)$ لكلّ حدث لا يتغير مع (i=1,2,...) هذه الأحداث لا تتقاطع و يجب أن يكون عندنا المساواة

$$P(W_1 \cup \dots . \cup W_n) = P(W_1) + \cdots + P(W_n) = np \leq 1$$

هذه الخاصيّة لا يمكن أن تقع لكلّ ($n\geq 1$) إلّا إذا كان (p =0) وإذا كان ذلك حاصلًا فخصائص الاحتمال تؤدّي إلى :

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} W_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(W_i)=0$$

و هذا مستحيل لأنّ ($P(U_{i=1}^{\infty} W_i) = 1$)

هذا المثال يبيّن أنّ مسألة الاحتمال مرتبطة ارتباطًا وثيقًا بمسألة القابليّة للعدد.

مما سبق يمكن القول: إنَّ الحدث ذا الاحتمال الصفري يمكن تأويله كحدث صغير جدًّا، و لا يمكن الوصول إليه بعمليّة إحصاء قابل للعدّ لأحداث أوليّة قابلة للمشاهدة.

في الحالة الخاصّة للعبة "القفا و الوجه " هذا المبدأ يقول: إنّه إذا لعب كلّ الناس الذين وجدوا أو سيولد كلّ منهم لوقت غير منتهٍ فلن يصلوا إلى مشاهدة كلّ الحالات الممكنة و مجموعة المتتاليات المشاهدة لا تمثل إلّا جزءًا ذا احتمال صفريّ من كلّ المتتاليات الممكنة نظريًّا.

هذا يسمح بفهم أفضل لمبدأ الاستحالة الفيزيائيّة لمشاهدة أحداث ذات احتمال صفريّ، مثل هذا الحدث في عالم رياضيّ شاسع يستحيل إيجاده بطرق متاحة للبشر، و هذا يشبه الإبرة في كومة التبن مع الفرق أنّ كومة التبن تكون مجموعة منتهية.

في حال قانون الأعداد الكبيرة الذي يصف تقارب التردّدات نحو ١/٢ في لعبة القفا و الوجه هذه الخاصيّة تبيّن- ببساطة- أنَّ مجموعة المتتاليات (X_2, X_1....) من(١ و ٠) و المجموع الجزئي ($S_n = X_1 + \cdots . X_n$) حيث($\frac{S_n}{n}$) لا تؤول إلى(١/٢) احتمالها صفر، أي أنّ هذه المجموعة صغيرة جدًّا للمتتاليات (X_n ....., X_1)التي تحقّق نهاية ($\frac{S_n}{n}$)تساوي١/٢. كان من الممكن الاعتقاد العكس تمامًا، أي أنَّ مجموعة المتتاليات التي لا تحقّق نهاية($\frac{S_n}{n}$) تساوي($\frac{1}{2}$) تكون أكبر من المجموعة التي تحقّق نهاية ($\frac{S_n}{n}$)تساوي ١/٢ في هذا الشكل تبدو النتيجة مفاجئة جدًّا, مع ذلك -كما سنرى- في الباب الخامس كل هذا يمكن تفسيره بوساطة ما يسمّى " العدد الطبيعي " الذي ابتكره الرياضي الفرنسي Emile Borel (١٩٥٦-١٨٧١).

الفصل الثاني

بدايات حساب الاحتمالات
ثراء فارس «ميري» و إفلاسه

لاحظنا سابقًا التأثير الكبير للّعب في الولادة التاريخيّة لحساب الاحتمالات بتعريف – أثناء اللعب- احتمال الأحداث كناتج قسمة عدد الحالات المطلوبة الممكنة على العدد الجملي للحالات، نستطيع رقميًّا حساب "فرصة الربح" للأطراف المتقابلة. في لعبة القفا و الوجه هناك إمكانية F (الوجه) و P (القفا) و لكلّ احتمال $\frac{1}{2}$. بالنسبة للزهر هناك ٦ ، ١،٢،٣، ٤،٥ أو ٦ إمكانيّات كلّ واحدة باحتمال $\frac{1}{6}$ ، في لعبة ورق الإمكانيّات عددها كبير جدًّا، حيث يوجد٥٢!=٥٢X٥١X...X١ طريقة لخلط الأوراق بترتيب ما (هذا رقم فلكيّ يقارب $8,0658x10^{67}$).

حتى وإن تقيّدنا بالتعريف الأولي للاحتمال، فمن الواضح أنّه في حالة لعبة بين خصمين و مع مخاطرات متساوية، فإنّ الوضع سوف يكون لمصلحة من لديه الاحتمالات الأقوى.

إذا أخذنا ألعابًا حيث يكون عدد الإمكانيات المختلفة مرتفع جدًّا يصبح من الصعب أو مستحيلًا ماديًّا حساب الاحتمالات باعتماد التعداد البسيط، هكذا عمر العالم لن يكون كافيًا لحساب- بسرعة حالة في الثانية- عدد الحالات الممكنة لخلط لعبة ورق، بالترتيب، (١٥ مليار سنة لا تقابل إلاّ $4,7304x10^{17}$ ثانية و نحتاج هنا إلى 10^{50} مرّة إضافية تقريبًا).

نرى- من هذا- السبب الذي جعل اللّاعبين يطلبون من الرياضيّين حلّ – بالحساب- ما لم يستطيعوا تقييمه بالتعداد المباشر، من بين هؤلاء اللّاعبين واحد كان له تأثير مهمّ في التطوّر التاريخي للنظريّة الاحتماليّة.

(Le chevalier de Méré) رجل آداب و فلسفة عاش بين ١٦٠٧- ١٦٨٤ شخصية مؤثرة لدى القصر تحت حكم لويس الرابع عشر، اشتهر بكونه لاعبًا على الرغم من أنّ مراسلاته لعلماء عصره مثل (Fermat ,Roberval وPascal) تظهره صاحب عقل فضوليّ أكثر منه معتاد ألعاب المصادفة، ومع ذلك

فاهتمامه بهذه المسائل, و ثمرة نقاشه في الموضوع مع(Pascal) جعلته من السابقين الأساسيّين في حساب الاحتمالات العصريّة.

هل كان هذا نتيجة سمعة مشبوهة أو حقيقيّة؟ في كلّ الحالات ينسب له البحث المتواصل عن قواعد معقّدة تسمح له بالحصول على أفضليّة خفيّة على خصومه و تحقيق الثراء نتيجة لذلك.

واحدة من بين هذه القواعد التي ابتكرها تتمثّل في رميالزهر ٤ مرّات و المخاطرة بظهور ٦ على الأقل. احتمال الخسارة هو إذن:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \cong 48.225\%$$

بطريقة ثانويّة احتمال الربح هو ($\frac{671}{1296} \cong 51,775\ \%$.) الفرق مع لعبة الخمسين في المائة 50% للعبة متوازنة ضعيف و يقارب لعبة عجلة الكازينو $\frac{19}{37} \cong 51,351$ هذا الفرق يصعب ملاحظته في عدد صغير من المرّات ،لكنه يستطيع أن يقدم للمخاطر - على المدى البعيد- أرباحًا مؤكّدة .

قاعدة أخرى تحمل (Le chevalier de Méré) أبوتها تتمثل في رمي زهرين ٢٤ مرّة مع المخاطرة بظهور خمستين معًا على الأقل مرّة واحدة يبدو هنا أنّ (Le chevalier) أخطأ حيث احتمال الربح هو:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 49,14\%$$

فيما أنّه لو اختار ٢٥ رمية لكان احتمال الربح يساوي :

$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} \cong 50,553\%$ و اللّعبة مربحة. للدفاع عنه علينا أن نعترف بأنّ حساب هذا الاحتمال مباشرة دون خطأ (باليد) صعب؛ تقول الأسطورة: إنّ القاعدة الأولى صنعت ثراءه بينما أفقرته الثانية.

لا شكّ أنّ الواقع ليس بهذه البساطة و لكن الأسطورة توضح المشكلة المطروحة.

على ضوء هذه الأرقام نلاحظ أنّ الاحتمالات لا يمكن تخمينها بالحدس دومًا، الأمثلة الآتية على غرار طريقة فارس (Mere) تؤكد هذا الاستنتاج:

المثال الأوّل من هذه الألعاب يمكّن من ربح سهل على مخاطرات على مجموعات غير عارفة. في مجموعة من n شخص تقع المخاطرة على أنّ هناك اثنين من بين المجموعة- على الأقل- لهما تاريخ الميلاد نفسه. إذا فرضنا أنّ الولادات موزّعة بصفة منظّمة على ٣٦٥ يومًا (ومن هذا يكون الوضع أفضل للمخاطرة إذا كانت هناك كثافة لتواريخ الميلاد في فترات معيّنة) و إذا لم نعدّ السنوات ذات قفزة, فالاحتمال P_n لربح المخاطرة معطى بالقاعدة:

$$P_n = 1 - (\frac{365-1}{365}).(\frac{365-2}{365}) x...x(\frac{365-n+1}{365})$$

مقدار يصعب تقييمه من الوهلة الأولى. بعض القيم الرقميّة للاحتمال P_n معطاة في الجدول الآتي:

n	P*n*	*N*	P*n*	*n*	P*n*
2	0.27%	12	16.70%	22	47.57%
3	0.82%	13	19.44%	23	50.73%
4	1.64%	14	22.31%	24	53.83%
5	2.71%	15	25.29%	25	56.87%
6	4.05%	16	28.36%	...	
7	5.62%	17	31.50%		
8	7.43%	18	34.69%		
9	9.46%	19	37.91%	30	81.44%
10	11.69%	20	42.14%	40	89.12%
11	14.11%	21	44.37%	50	97.04%

من المفاجئ ملاحظة أنّ P_n يتجاوز ٥٠% بمجرّد تجاوز عدد الأفراد الحاضرين ٢٣. من المنصوح به المخاطرة بمبلغ كبير إذا كانت n=50 أو أكبر.

المثال الآتي يعرف تحت اسم مسألة المعلاق أو مسالة الصدف، حيث نفترض أنَّ n شخصًا ذهبوا للاستماع إلى محاضرة و تركوا معاطفهم معلّقة خارج القاعة، رمى مشاكس المعاطف على الأرض ثم ندم على فعله فأرجعها إلى المعاليق بطريقة عشوائيّة، ما احتمال أن يجد واحد من الحاضرين على الأقل معطفه في مكانه تمامًا؟

النتيجة مفاجئة تمامًا، حيث نحصل على ذلك باستعمال الرمز :

k !=kx(k-1)x....x2x1

$$P_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \rightarrow 1\text{-}e^{-1} \cong 63{,}21\ \%$$

عندما تؤول n إلى ∞.

إثبات هذه القاعدة يستعمل مساواة Poincaré.

$$P(\bigcup_{1}^{n} A_i) = Q_1 - Q_2 + Q_3 - \ldots.. + (-1)^{n+1} Q_n$$

حيث

$$Q_n = \sum_{1 \le j_1 \ldots < j_k \le n} P(A_{j_1} \cap \ldots . A_{j_k})$$

تطبق على الأحداث $A_i = \left\{ \text{الشخص الرقم } i \text{ يجد معطفه} \right\}$

هذه النتيجة يمكن تطبيقها على وضعيّات مختلفة، و تعبّر عن مبدأ عام و هو أنّ المصادفات أكثر احتمالًا ممّا يمكن توقّعه في البداية، يمكن المخاطرة على هذا مع حظوظ وافرة للربح.

لنعد إلى فارس de Méré. واحد من أسئلته أدّى Pascal إلى ابتكار- عام ١٦٥٤- المثلث الرقمي، (أو مثلث Pascal) الذي يسمح بحساب العوامل الثنائية :

$$\binom{q}{p} = C_q^p = \frac{P!}{q!\,(p-q)!} = \frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{q(q-1)\ldots 1}$$

=عدد التركيبات من q عنصر تأخذ من بين p عنصر

لقد وضع فارس de Méré المسالة الآتية :

يلعب لاعبان (A)و (B) متتالية ألعاب قفا و وجه, الأول الذي يكسب مجموع (N) لعبة يكسب الكل. نفرض أنّه- لسبب خارجي- قرّر اللّاعبان إيقاف اللّعب قبل النهاية، اللاعب (A) يحتاج إلى (m) لعبة أخرى ليكسب و اللّاعب (B) يحتاج إلى ربح (n) لعبة أخرى ليكسب، كيف يمكن قسمة مبلغ المخاطرة بعدل بين (A) و (B) ؟

مسألة القسمة هذه لا يمكن حلّها إلا بتعداد عدد الحالات N(A) التي يكسب فيها (A) و عدد الحالات N(B) التي يكسب فيها (B) و توزيع S حسب هذين العددين S × P(A) للاعب (A) و S × P(B) للاعب (B) حيث S المبلغ الجملي و حيث:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(A)+N(B)} \text{ و } P(A) = \frac{N(A)}{N(A)+N(B)}$$

نرى في P(A) و P(B) احتمالات الربح للاعبين (A) و (B) هذا الحل وجد بالتعداد عن طريق Fermat في حالة خاصّة أوّلًا ثمّ في الحالة العامة عن طريق Pascal في ١٦٥٤.

بما أنَّه لا بدّ من m+n-1 لعبته قبل الوصول إلى قرار نهائي (حيث إذا اكسب (A) ما كان لـ (B) فرصة الربح إلّا m-1 مرّة من قبل و العكس كذلك)، العددان N(A) و N(B) معطيان كالآتي:

$$N(A) = \binom{m+n-1}{0} + \binom{m+n-1}{1} + \cdots \binom{m+n-1}{n-1}$$

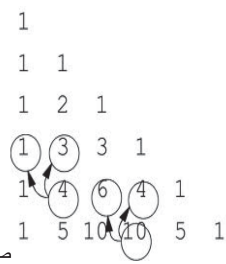
$$N(B) = \binom{m+n-1}{0} + \binom{m+n-1}{1} + \cdots\cdots\cdots \binom{m+n-1}{m-1}$$

المجموع N(A)+N(B) مساوٍ للعدد $2^{n+m-1} = (1+1)^{n+m-1}$ وهو عدد الألعاب الممكنة المتبقيّة. لذلك إذا كان (A)يحتاج إلى لعبتين للكسب و B لثلاث لعبات N(A)= 1+4+6 و N(B) = 1+4 فنجد إذا $\frac{11}{16}$ من S تعطى للاعب (A) و $\frac{5}{16}$ (و ليس كما يمكن توقعه بسذاجة $\frac{3}{5}$ و $\frac{2}{5}$ من S).

الشكل التحليلي لعوامل ذي الحدّين لم يكن معروفًا وقتذاك، استعمل Pascal المثلث الرقمي (صورة ٣) نجد

$$\binom{5}{2} = \frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1} = 10 = 6+4$$

و كذلك يمكن حساب بقيّة العوامل بجمع العنصرين في السطر الأعلى الموجودين في الأعلى و على شمال الرقم المطلوب (انظر صورة ٣) نحصل على مثلث Pascal بوضع i في السطر و العمود j العامل ذي الحدّين $\binom{i}{j}$ الأعداد i و j يمكن أن تكون صفريّة بوضع المعطى ١=!٠.



صورة لمثلّث Pascal

الذي يهمّنا هنا هو أنَّه في هذا الحساب تظهر- لأوّل مرّة- فكرة الربح المؤمل، أو توقّع الربح- نسند في الواقع- للاعبين الجزء من المخاطرة الذي يتوقعون ربحه باعتبار احتمالات ربح كلّ منهما.

الفصل الثالث

توقّع الربع في لعبة المصادفة
قانون برنولي للأعداد الكبيرة

رأينا في الباب الثاني في مسألة قسمة المبالغ المخاطر بها في حالة خاصّة بسيطة من حساب توقّع الكسب في لعبة مصادفة عامّة، أنّ الإمكانيات المختلفة تكون : ربح، S_1 مع احتمال p_1، S_2 مع احتمال p_2 .... S_k مع احتمال p_k حيث $p_1+...+p_k=1$.

الكسب المحصول عليه, نرمز له بالرمز X ,هو عدد عشوائي (نقول إنّ X متغير عشوائي) نعرّف توقّعه (أو التوقّع الرياضي) الذي نرمز له بالرمز E(X) بالمجموع: $E(X) = p_1S_1 + ...p_kS_k$

بهذه الطريقة في مسألة فارس de Meré ، اللاعب (A) يحصل على توقع الكسب المساوي:

$$0 \times (1- P(A)) + S \times P(A) = S \times P(A)$$

فكرة التوقّع قدّمها في البداية Huygens في ١٦٥٧ في كتابه De Ratiociniis in Aleae Ludo (في منطق لعب الزهر).

كلمة التوقّع تظهر في اللاتينية تحت اسم "expectatio" مع التأويل أنها " الثمن المناسب الذي يتخلّى من أجله لاعب عن مكانه في لعبة ما".

تأويل Huygens مجسّد لمسألة التوقع، و لكنّه لا يخلو من مخاطر، في الواقع من الأفضل اعتبار التوقّع كعامل رياضي - بدل لحساب- نحصل عليه منطقيًّا من الفكرة التجريبيّة " للقيمة المحسوبة تقريبًا" للكسب " المتوقّع ". لهذه الأسباب فالتوقع- كما عرفناه ,و عكس بعض التعريفات الأخرى الممكنة- يسمّى التوقع الرياضي. من السهل بناء بعض الأمثلة حيث التوقّع الرياضي لا يساوي القيمة المنتظرة للربح. لنأخذ مثلًا

لاعبَين (A)و (B) يلعبان لعبة، حيث يخاطر (A) بمليون أورو مع احتمال خسارة (١/١٠٠٠ و (B)) يخاطر (١٠٠٠) أورو مع احتمال خسارة يساوي (٩٩٩/١٠٠٠)

هذان اللّاعبان عندهما توقّعات رياضيًّا متساوية تقريبًا (1000€) للاعب (B) و (999€) للاعب (A)).بالنسبة للتوقّع الوضع أفضل للاعب (B) ، مع ذلك يبقى أنَّ وضع(A)الذي ربحه شبه مؤكّد (مع نسبة ربح 99,9%) يبدو أفضل بكثير من وضع (B).

من بين الأمثلة المشهورة من الحالات التي لا تتأقلم فيها مسألة التوقّع الرياضي مع فكرة الربح المنتظر تناقض Saint-Pétersbourg الذي طرحه Nicolas Bernoulli على Montmort عام (١٧١٣) وعاود تناوله Daniel Bernoulli عام (١٧٣٨) ودرسه بعد ذلك Laplace (١٧٤٩-١٨٢٤) و مؤخّرًا Feller(١٩٥٠) و Martin-lof (J.Appl Probab. 22.634-646) (١٩٨٥)، لعبة-Saint Pétersbourg لعبة تلعب بين خصمين (A)و(B) يحصل (A) في البداية على مبلغ جمليّ S وحدة في حين يتأثر ربح (B) بنتيجة متتالية ألعاب قفا ووجه، إذا ربح (B) n لعبة الأولى و خسر اللعبة n+1 يحصل على 2^n وحدة، هكذا يخاطر(B) على ظهور قفا و (A) على ظهور وجه ، إذا كانت الألعاب المتتالية كالآتي:

F B يحصل على وحدة (A) يحصل على S

PF B يحصل على وحدتين (A) يحصل على S

PPF B يحصل على٤ وحدات (A) يحصل علىS

PPPF B يحصل على٨ وحدات (A) يحصل علىS

PPPPF B يحصل على ١٦ وحدة (A) يحصل على S

السؤال يتمثل في تحديد قيمة S حتى تصبح اللّعبة عادلة.

والحل المنطقي يستدعي أن تكون توقعات الربح للاعبين متساوية، لكن هذا مستحيل بما أنّ توقّع ربح B غير منتهٍ لأنّه يساوي:

$$1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right) + \cdots + 2^n \times 2^{-n-1} + \cdots$$

المبلغ (S) المعطى للاعب (A) يجب أن يكون غير منتهٍ كي تكون اللعبة عادلة، مع ذلك هذا ليس عادلًا حقًّا، مثلًا لو حُدّد المبلغ المعطى للاعب (A) بـ $S = 1024 = 2^{10}$ لا يستطيع (B) تحقيق ربح أكبر من S إلا

باحتمال $\frac{1}{1024} = 2^{-10}$ و هذا يؤدّي إلى أنّ (A) يكون متأكّدًا عمليًّا من تحقيق ربح أكبر من ربح (B) إذا لعبت اللّعبة مرة واحدة، هناك في الظاهر إذن تناقض، حيث الحلّ العادل منطقيًّا يكون في مصلحة (A) مقارنة باللّاعب (B)، هناك طريقة سهلة لحلّ هذا التناقض تكمن في قول: إنّه يستحيل أن نجعل اللّعبة عادلة؛ هذا غير مرضٍ لأنّه انطلاقًا من مبدأ أنّ لكل شيء ثمنًا نعتقد أنّه لا بدّ من أن تكون هناك طريقة أخرى لحساب المعطى S غير طريقة حساب التوقع.

الحلّ الأفضل "إنسانيًّا " لتناقض Saint-Petersbourg قدمه، دون شكّ، Daniel Bernoulli منذ عام (١٧٣٨) في كتابه "Specimen Theoriae Novea de Mensura Sortis" حيث عرض نظريّة جديدة لتقييم المخاطرة " ينطلق فيها من مبدأ أنّ ربح اللّاعب لا يصلح إلّا إذا قورن بثروته، حينئذ للّاعب الذي يملك الثروة α أن يقدّر الربح $d\alpha$ نسبيًّا إلى القسمة $\frac{d\alpha}{\alpha}$ و ليس نسبيًّا إلى $d\alpha$ لذلك إذا كان للاعب (c) الثروةα ولعب لعبة حيث ربحه أو خسارته المحسوبة سلبًا متغيّر عشوائي X يعرف Daniel Bernoulli الصلاحية المتوسطة للعبة بالتعبير (أين$\log u$ يرمز للوغاريتم الطبيعي ذي الأساس e للعدد u)

$$U(\alpha,x)=\alpha E(\log(X+\alpha)/\alpha)$$

حيث (E) ترمز للتوقع الرياضي، إذا آلت α إلى ما لا نهاية $\alpha\log((X+\alpha)/\alpha)$ تؤول إلى X و تصبح الصلاحية المتوسطيّة $U(\alpha,X)$ إذا كانت قريبة من التوقّع الرياضي. ممدّدًا هذا التعريف يعرف Daniel Bernoulli التوقع المعنوي $E_M(X,\mu)$ للعبة بالمساواة

$$\alpha\log\left(\frac{E_M(X,\alpha)+\alpha}{\alpha}\right) = U(\alpha,x) = \alpha E\left(\log\frac{X+\alpha}{\alpha}\right)$$

في حالة يكون $X = S_1$ باحتمال $X = S_2, p_1$ باحتمال p_2 و هكذا هذه القواعد تؤدّي إلى تعريف التوقّع المعنوي بالقاعدة:

$$E_M(X,A) = \left\{a\left(1+\frac{S_1}{a}\right)^{p_1}\ldots\ldots\left(1+\frac{S_k}{a}\right)^{p_k}\ldots\right\} - a$$

في لعبة Saint-Petersbourg اللاعب (B) يملك الثروة β و يكون توقعه المعنوي

$$E_M(X,B) = p(b) - b = \left\{(b+1)^{\frac{1}{2}}(b+2)^{\frac{1}{4}}\ldots\ldots(b+2^p)^{\frac{1}{2^p}}\ldots\right\} - b$$

لجعل اللّعبة عادلة بإعطاء (A) مبلغًا مساويًا للتوقّع المعنويّ للاعب (B) يجب أن يكون هذا المبلغ β -P(β) وحدة. كمثال إذا كان β0= 2= β -P(β)إذا كان β10= , 3,04= β -P(β) و إذا كان β 100= فإنّ 4,38= β -P(β) و 5,97= β -P(β) إذا كان β 1000=

للأسف، إذا بدا التحليل جيّدًا للّاعب (B) فهو لا يخدم مصلحة (A) بالدرجة نفسها، حيث نلاحظ أنّه إذا كانت α ثروة (A) محدودة فإفلاسه ممكن مع احتمال غير صفريّ، بينما يكون توقّعه المعنوي سالبًا ما لا نهاية؛ يمكن لهذا أن نعيب على فكرة التوقّع المعنوي عدم احترام التناظر للاعبين.

في الواقع حصل التخلّي عن هذه الفكرة بصفة كليّة تقريبًا لصالح التوقع الرياضي، رغم أهميتها الحقيقيّة الاجتماعيّة الاقتصاديّة.

توجد مقاربات أخرى عصرية أكثر للعبة Saint-Petersbourg نعرضها بإيجاز من خلال n لعبة متماثلة، الربح S_n للاعب B يتبع القانون النهاية $\frac{S_n}{n\log n} \to 1$ (تقارب في الاحتمال عندما $n \to \infty$) هنا Logn=logn/log2 يرمز للوغاريتم في الأساس ٢ (انظر Feller١٩٥٠). نستطيع أن نستعمل هذه الخاصيّة للحصول على تقييم مختلف لما يملكه B (انظر S.Csorgo, R.Dodunekova (1991), Sums, Trimmed Sums and Extremes, Bale, Birkhauser)). "تناقضات" مثل ما يوجد في لعبة Saint-Petersbourg ليست في الواقع متناقضة إلّا أنّها تمزج- أحيانًا بطرق شائكة- بين المسائل الرياضيّة الدقيقة و بين التأويل الفيزيائي المخاطر.

كان Daniel Bernoulli (1700-1782) من عائلة علماء الأشهر من بينهم أبوه Jean Bernoulli (١٧٤٨-١٦٦٧)(مخترع ذو العروتين) و عمه Jacques Bernoulli (١٧٠٥-١٦٤٥) مخترع أعداد Bernoulli.

قطعت مرحلة كبيرة في مسار تطور حساب الاحتمالات بنشر- بعد وفاته - في ١٧١٣, عمل Jacques Bernoulli," Ars Conjectandi " أو "فن الفرضيّات الحدسيّة". في هذا الكتاب عرض البرهان الدقيق الأوّل للقانون الضعيف للأعداد الكبيرة، فيه نأخذ متتالية ($X_1, X_2 ... X_n$ ..) متغيّرات عشوائيّة مستقلّة، يأخذ كلّ واحد منها القيمة (١) باحتمال (p) و القيمة(٠) باحتما (1-p) المجموع الجزئي للمشاهدات:

$S_n = X_1 + \cdots + X_n$

يؤول كعدد المرّات التي تأخذ فيها X_i القيمة (١) إذا كانت (i) بين (١)و (n.) القانون الضعيف

للأعداد الكبيرة يقول: إنه لكل $\varepsilon > 0$ معطاة , الاحتمال $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > e\right)$ يؤول إلى ٠ إذا آلت (n)إلى $+\infty$.

يعبّر هذا القانون عن أنّ الذبذبة($\frac{S_n}{n}$)لظهور حدث في تكرار تجارب تؤول إلى الاحتمال (p) لمشاهدة هذا الحدث في تجربة واحدة من بين هذه التجارب. نلاحظ أنّ هذا الشكل من قانون الأعداد الكبيرة أضعف من الذي ذكرناه سابقًا، الذي يعبّر عن أنه مع المعطيات نفسها $\frac{S_n}{n} \to p$ باحتمال واحد. هذه النسخة تسمّى القانون القوي للأعداد الكبيرة، بينما في الشكل الذي طرحه Bernoulli يعرف القانون بالقانون الضعيف للأعداد الكبيرة.

واحد من الأدلّة على عدم بساطة هاتين النتيجتين يوجد في أنّه انقضى حوالي ٢١٥ سنة بين برهان القانونين: الضعيف و القوي للأعداد الكبيرة. القانون القويّ للأعداد الكبيرة لم يثبت إلّا في ١٩٣٠، في شكله النهائي، من طرف A.N Kolmogorov(١٩٨٧-١٩٠٣).

قانون الأعداد الكبيرة لـJ Bernoulli لا يقدّم معلومات دقيقة حول سرعة تقارب $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > e\right)$ نحو صفر.

هذا المشكل لم يحلّ إلّا في عام (١٧١٨) من طرف Abraham de Moivre (١٧٥٤-١٦٦٧) في كتابه" نظريّة الفرص" الذي أعاد تناوله في مؤلفه Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis

"تحاليل مختلفة للمتسلسلات و التربيعات". براهين Abraham de Moivre أعيد تناولها مع بعض التحسينات من طرفPierre-Simon de Laplace (١٨٢٧-١٧٤٩) في كتابه " النظريّة التحليليّة للاحتمالات" الذي نشر في ١٨١٢ حيث لم يذكر فيه de Moivre (1667-1754).

هذا يجعل النتائج المذكورة تنسب في الغالب إلى Laplace عوضًا عن أن تنسب لمبتكرها الأصلي.

استعمل de Moivre في برهانه نشرًا مقاربًا لـ $n! = n(n-1) - 1$ حتى يحسب الاحتمال $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. من قاعدته أمكنه استنتاج نسخة أولى من نظريّة النهاية المركزيّة مثبتًا أنّه إذا كان:

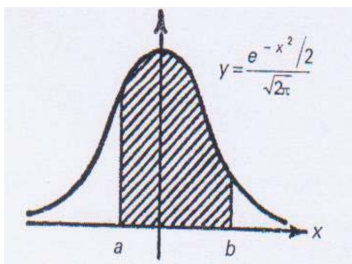
$$-\infty < a < b < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

النتيجة التي حصل عليها De Moivre Laplace ينتج عنها قانون الأعداد الكبيرة لـ Jacques Bernoulli

و توضح قانون الاحتمال النهاية للقسمة $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

نرى هنا القانون المشهور لـ Gauss أو القانون الطبيعي أو قانون Laplace-Gauss هذا القانون المقابل لكثافة تسمّى " المنحنى الناقوس"



ينسب عادة إلى Gauss أكثر من Laplace لأنّ Gauss(١٧٧٧-١٨٥٥) أثبت في (١٨٢١) في مؤلّفه " theoria combinationis observationum Erroribus Minimus Obnoxiae نظريّة تركيب الأخطاء ذات المقياس الضعيف" أنّها في إطار أعمّ، نهاية قانون الاحتمال لمجموع أخطاء عشوائيّة مستقلّة ذات مقياس ضعيف حين يصبح عددها غير متناه.

هكذا نرى أنّ نتائج Laplace و de Moivre كانت مجرّد حالات خاصّة لتقارب عامّ يلعب فيه القانون الطبيعي دورًا شاملًا.

قانون الأعداد الكبيرة لـ J. Bernoulli الذي توضحه نظريّة النهاية المركزيّة يعبّر عن التقارب الذي يسمّى ضعيفًا أو في الاحتمال للمتتالية $\frac{S_n}{n}$ نحو القيمة المشتركة للتوقع $E(X_i)=p$,, $i=1,2$, لمتغيّرات الجمع.

لنأخذ بصفة أعم عوضًا عن متغيرات عشوائيّة X_i تأخذ القيم (١) أو (٠) متغيرات X_i تأخذ القيم x_1 باحتمال x_k p1.......... بالاحتمال p_k حيث $p_1 ....p_k$ أعداد موجبة أو صفرية تحقق $p_1 + \cdots p_k = 1$ إذا تناولنا- من ثمّ- ذبذبات مشاهدات $x_1.....x_k$ من الممكن استنتاج قانون J. Bernoulli للأعداد الكبيرة المذكور سابقًا في لعبة "القفا و الوجه" عندنا بصفة عامّة لكل $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum Xi - E(X)\right| > \varepsilon\right) = 0$$

حيث $E(X) = p_1 x_1 ....+ p_k x_k$ ترمز للتوقّع الرياضي للمتغير العشوائي $X= X_i$ (نكتب $A= B$ حينما يعرف الطرف الأيمن الطرف الأيسر).

هذه النتيجة ما هي إلا حالة خاصّة نصّت في شكل مضعّف القانون القوي للأعداد الكبيرة لصاحبه(1930) Kolmogorov " بشأن القانون القوي للأعداد الكبيرة",

,Comptes rendus de L’ Academie des sciences Paris 191, 910-912

الذي نقدّم الآن نسخته الأعم: لتكون X_1, X_2 ..... متتالية متغيّرات عشوائيّة مستقلّة، و ذات قانون احتمال موحّد، معرّف بدالة التجزئ $F(x)= P(X_1 \leq x)$ ، عندئذ نهاية المتوسط من الدرجة n المعرف بـ $l = \lim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ موجودة باحتمال واحد، إذا كان توقّع القيمة المطلقة $X = X_1$ أي:

$E(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X| dF(x)$ محدودا.

حينئذ عندنا حتمًا:

$$l = lim\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x)$$

المساواة المذكورة التي تعرف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X تمدّد الأمثلة السابقة بإعطائه معنى كتكامل Lebesgue –Stieljes (مسائل تعود لـ Henri – Leon Lebesgue (1875-1941) و Thomas –Joannes Stielges(1856-1894)). طريقة واضحة لتعريف مثل هذا التكامل معطاة بالقاعدة:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x) = \lim_{M,N \to \infty}\left\{\lim_{n \to \infty} \sum_{k=-nM}^{nN} \frac{k}{n}\left(F\left(\frac{(k+1)}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right\}$$

و ما هو إلا تمديد للمتغيرات العشوائيّة، أيًّا كانت، لتعريف التوقّع للمتغيرات العشوائيّة ذات القيم القابلة للعدّ الذي يعرّف كالآتي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(X = x_i)$$

التوقّع الرياضي لمتغيّر عشوائي هو إذن النهاية باحتمال ١، لمتوسّط نسخ مستقلّة ذات قانون مماثل للمتغيّرX عندما تؤول n إلى ما لا نهاية.

قانون الأعداد الكبيرة المذكور أعلاه يمكّن من فهم التأويلات الخاطئة التي تعرّضت لها مسألة التوقّع الرياضي، في لعبة ما توقّع الربح ما هو إلا نهاية متوسّط الأرباح المشاهدة بعد لعب عدد مرتفع من المرّات، و ما يعنيه "عدد مرتفع من المرّات" هو النقطة الأساسيّة بالتأكيد.

في المثال المذكور حيث يخاطر A بمليون يورو مع احتمال خسارة $\frac{1}{1000}$ و (B) يخاطر بألف يورو مع احتمال خسارة $\frac{999}{1000}$ توقّع ربح A هو٩٩٩ € في حين توقّع ربح (B) هو ١٠٠٠€ . على المدى الطويل، إذن

الوضعية تناسب اللاعب B بحيث لو فرضنا أنّنا كرّرنا عددًا مرتفعًا من ألعاب متماثلة سيكون ربح B مؤكّدًا، ومن البديهي أنّه إذا اكتفينا بعدد صغير من الألعاب سيكون الوضع مناسبًا للاعب (A).

يكون من غير العدل - في هذا المجال- ألّا نذكر Simeon Denis Poisson (1787-1840) الذي كتب التسمية "قانون الأعداد الكبيرة " الذي حصل في مؤلّفه " بحوث في احتمالات القرارات في المادّة الجنائيّة و المادّة المدنيّة (١٨٣٧) على نسخة متميّزة نذكرها الآن.

عوضًا عن أن نأخذ متتالية متغيّرات X_n تأخذ القيمتان ١ أو ٠ باحتمال p أو 1-p نسمّي عادة قانون مثل هذه المتغيّرات قانون Bernoulli تناول Poisson متغيّرات مستقلّة و لكن ليست بالضرورة ذات القانون نفسه حيث $P(X_n=1)=p_n, P(X_n=0)=1-p_n$ أثبت Poisson أنّ نتيجة القانون الضعيف للأعداد الكبيرة تبقي صائبة حيث تعوض- في تقريره- بالمتوسّط $\overline{p_n}=p_1+.....p_n$ للاحتمالات المتتالية. بلغة أخرى نسخة Poisson من قانون الأعداد الكبيرة تثبت أنّه لكل $\varepsilon > 0$ عندنا

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \overline{p_n}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

بإمكاننا أن نعتقد- بشيء من السذاجة- أنّه إذا كان توزيع عناصر المتتالية غير متجانس فسوف يؤدّي ذلك إلى عدم صحّة قانون الأعداد الكبيرة، في الواقع هذا ليس صحيحًا رغم الغرابة الظاهرة فإنّ ما يحدث هو العكس تمامًا. هذه الخاصيّة توضّحها نتيجة لـ: Hoeffding Wassily(1956) Annals of Math Statistics 27, 715-721

تبيّن أنّ احتمال الانحراف: $P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \overline{p_n} > \varepsilon\right)$ لكل $\epsilon > \frac{1}{n}$ تكون الأكبر إذا ثبّتنا $\overline{p_n}$ عندما تكون الأعداد p_i متساوية. نجد النتيجة نفسها لو عوّضنا X_n ب $1-X_n$. بلغة أخرى ذبذبة الربح تكون مركّزة أكثر حول التوقّع إذا كانت احتمالات الربح للمتغيّرات المختلفة (المستقلّة)المشاهدة غير متجانسة.

هذه الخاصيّة غير المنتظرة معاكسة للحدس، تظهر قوّة قانون الأعداد الكبيرة التي تتجاوز صحتها كثيرًا حالات الألعاب المتجانسة، هذا القانون إذن لا يتأثّر كثيرًا عندما نتناول ذبذبات ظواهر تتغيّر أثناء التجربة.

من المهم - في هذه الأثناء- أن نذكر أنّ التوقّع متغيّر عشوائي ليس دائمًا معرّفًا، بالعودة إلى قانون الأعداد الكبيرة لهذه الملاحظة النتائج الآتية:

١) إذا كان التوقّع لمتغيّر غير منتهٍ يتقارب متوسّط متتالية أحداث مكررة مستقلّة نحو ما لا نهاية باحتمال 1.

٢) إذا لم يكن التوقّع معرّفًا (نستثني الحالة التي يكون فيها التوقّع غير منتهٍ) يكون متوسّط متتالية أحداث مكرّرة مستقلّة تباعديًّا عندما تؤول n إلى ما لا نهاية و يتذبذب إلى ما لا نهاية باحتمال ١.

لنعطي بعض الأمثلة:

١) مارتنجيل كلاسيكي : نأخذ لاعبين (A) و (B) في لعبة قفا ووجه غير متوازنة A يكسب باحتمال $p<\frac{1}{2}$ وB يكسب باحتمال $1-p\geq\frac{1}{2}$. هذا يحدث، مثلًا، حيث يكون A مخاطرًا على الزوجي أو الفردي و خصمه B هو الكازينو، هناك نظام يسمح في الظاهر للاعب (A) بربح مؤكّد يتمثل في المخاطرة في البداية بواحد، و المضاعفة في حالة الخسارة في كل مرة، و إيقاف اللعب عند أول كسب يسجل و (تسمّى هذه مارتنجيل Hawks)، نستطيع أن نلخّص إمكانيات اللعب المختلفة في الجدول الآتي :

عدد الألعاب اللازمة لكي (A) يكسب	الاحتمال	المخاطرة اللازمة	الربح
1	P	1	1
2	$p(1-p)$	3=1+2	1
3	$p(1-p)^2$	7=1+2+4	1
4	$p(1-p)^3$	15=1+2+4+8	1
5	$p(1-p)^4$	31=1+2+4+8+16	1
.		.	.
.		.	.
n	$p(1-p)^{n-1}$	$2^n-1=1+\ldots+2^{n-1}$	1
.		.	.
.		.	.

نلاحظ أنّ المبلغ المطلوب للاعب (A) يتزايد بسرعة كبيرة مع عدد الألعاب اللازمة قبل أن يسجّل أيّ ربح؛ لهذا يصبح التطبيق الفعليّ لهذه الاستراتيجيّة الرابحة مستحيلًا عمليًّا، حيث يتوقف اللّعب إمّا لأنّ (الكازينو) يفرض مخاطرات دنيا و قصوى ما يمنع (A) من مواصلة طريقته بعد حدّ معيّن أو أنّ(A) لايستطيع أن يغطّي مخاطراته التي تتجاوز ما يملكه. لقد استعملنا هنا مصطلح "مارتنجيل" لنسمّي حسب لغة اللاعبين طريقة لعب تؤمن الربح، حسب المصطلحات الرياضيّة الكلمة تعني متتالية عشوائيّة(X_n) يكون توقّعها الشرطي إذا عرفنا $X_{n-1}, X_{n-2}....$ يساوي X_{n-1}. إذا كان ذلك أكبر أو يساوي X_{n-1} نسمّى المتتالية "مارتنجيل سفليّة" و في حال العكس "مارتنجيل علويّة " أي في حال يكون التوقّع أقلّ أو يساوي X_{n-1}. هكذا حسب المصطلحات العلميّة الربح المتراكم أو الخسارة المتراكمة X_n للاعب (A) تكون مارتنجيل عندما يكون اللّعب متوازنًا (في المثال $p=1-p=\frac{1}{2}$) و مارتنجيل سفليّة في حال كان اللّعب لصالح (A) ($p>\frac{1}{2}$) و مارتنجيل علويّة إذا كان اللّعب لصالح خصم (A) (أي $p<\frac{1}{2}$). توقّع المخاطرات المتراكمة اللازمة قبل تسجيل أيّ ربح معطى بالقاعدة:

$$E\left(\text{المخاطرة اللازمة}\right) = \sum_{1}^{\infty}(2^n - 1)p(1-p)^n$$

هذه المتسلسلة تكون دائمًا تباعديّة إذا كان $0\leq p\leq\frac{1}{2}$ لهذا حتى في حال اللّعب المتوازن($p=\frac{1}{2}$) فأيّ لاعب متهور حاول بصفة متكرّرة تطبيق طريقة مماثلة سوف يرى من قانون الأعداد الكبيرة أنّ متوسّط المخاطرات اللازمة لمتابعة اللّعب تتزايد إلى ما لا نهاية- على المدى البعيد- ما يجعل إفلاسه مؤكّدًا مهما كانت ثروته الأولية.

٢) قانون كوشي : لقد وصفنا الطريقة المنطقيّة التي تبيّن كيف يظهر القانون العادي في الطبيعة كقانون احتمال كمّ عشوائي يؤول كمجموع كبير لمتغيّرات صغيرة ومستقلّة، هذه النتيجة ليست دائمًا صحيحة؛ إنّها تفترض أنّ المتغيّرات العشوائيّة الصغيرة تحقّق بعض الشروط- كافتراض مثلًا- وأن مربّعاتها ذات توقّع منتهٍ (هذا الشرط يمكن إضعافه بصفة ملحوظة من ناحية أخرى).

نستطيع أن نضع- بصفة عامّة- المسألة الآتية :

إذا كان عندنا $X_1 ......X_n$متتاليات متغيّرات عشوائيّة ـلها القانون نفسه - ما التوزيعات النهائية الممكنة لـ$\frac{X_1+\cdots....X_n-b_n}{a_n}$؟ حيث $a_n>0$ و b_n عاملان غير عشوائيّان يقع اختيارهما بطريقة مناسبة، نجد هنا نسخة عامّة من مسألة Gauss حيث ترمز X_i للمتغيّرات الصغيرة العشوائيّة.

هذا السؤال له أهمية؛ لأنّ التوزيعات التي نحصل عليها بهذه الطريقة يمكن عدّها "طبيعيّة"، والوسيلة التي تسمح ببنائها موجودة في ظواهر فيزيائيّة متنوعة. الحل لهذه المسألة حصل عليه Paul levy في (١٩٣٧) بابتكاره القوانين المستقرّة، نتيجته تبيّن أنّه إذا كان$E(X_i^2)$ منتهيًا، فقانون النهاية الوحيد الممكن هو القانون العادي، و في غير هذه الحالة نجد قوانين تسمّى قوانين مستقرّة، تعبيراتها معقّدة أكثر ، أبسطها قانون كوشي. في شكله المعهود X يتبع قانون كوشي إذا كان احتمال أن يكون X من بين a وb معطى بالقاعدة :

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{Arctg\, b - Arctg\, a}{\pi}$$

في الحالة العامة تعبير كثافة قانون مستقر معقد جدًّا في شكلها المختصر (باختيار وحدة تختار بعناية). كثافة قانون مستقرّ تتأثّر بعاملين α و γ يحققان $0 \le \alpha \le 2$ ($\alpha = 2$ تعطي القانون العادي$\alpha = 1$ تعطي قانون كوشي كحالة خاصة) $|\gamma| \le 1-|1-\alpha|$

عندنا كما سبق $P(a < X \le b) = \int_a^b f(t)dt$

و إذا وضعنا $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} t^{r-1}e^t dt$ لكلّ r>0 (هذه الدالة جاما gamma لأولير Euler تحقّق من بين خصائص أخرى$\Gamma(n) = (n-1)!$ لكل n عدد صحيح) تكون الكثافة f(x) معطاة بالقاعدة

$$0 < \alpha < 1$$

$$f(x) = \frac{1}{\prod x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\Gamma(\alpha k+1)}{k!}|x|^{-\alpha k}\sin\{\frac{k\pi}{2}(\gamma+\alpha-\frac{2\alpha}{\pi}Arg(x)\}$$

$$1 < \alpha < 2$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\Gamma(\frac{k}{\alpha+1})}{k!}|x|^k \sin\left\{\frac{k\pi}{2\alpha}(\gamma+\alpha-\frac{2\alpha}{\pi}Arg(x)\right\}$$

حيث نضع $Argx=\pi$ إذا كان $x>0$ و $Argx=0$ إذا كان $x<0$. هذه القواعد حصل عليها H H.Bergstromو W Feller في ١٩٥٢.

لا تمثل هذه القواعد من ناحية الأخرى التعبيرات الأبسط التي يمكن أن نحصل عليها، حيث تحويلات Fourier تأخذ شكلًا أقل تعقيدًا، نسبيًّا.

لقوانين الاحتمال هذه تطبيقات عديدة، وهناك أسباب قويّة لاعتقاد أنّها تصف فعلًا مجموعة من الظواهر الطبيعيّة، من بين هذه الظواهر نذكر كميّات متعلّقة بقياس تغيرات الطقس مثلما يمكن ذكر تغيّرات في قيم الأسهم.

وقعت دراست النماذج المتعلقة بالقوانين المستقرة في النّشرات العلميّة في العقود الأخيرة إثر أعمال Benoit Mandelbrot بصفة خاصّة، التي أظهرت علاقتها الوطيدة بالخاصيّات الهندسيّة لأشكال ذات بعد غير الأعداد الكاملة (Fractals) نحيل القارئ إلى Mandelbort 1975 Glieck(1988) و Falconer (1990).لمزيد من التفاصيل في هذا الموضوع.

فيما يتعلّق بالخصائص العامّة للقوانين المستقرّة نحيل إلى Lukacs (1970) و فيما يخصّ تحليلها الإحصائي يمكن الرجوع إلى:

Adaptive Estimation of the parameters of stable Laws S.Cosorgo

Coll Math J.Bolyai 36 North Holland(1984)

الخاصيّة الطبيعيّة للقوانين المستقرّة تبيّن أيضًا أنّه من الطبيعي لبعض الكميّات العشوائيّة ألّا يكون لها توقّع رياضي. الحالة الوحيدة لقانون مستقرّ غير عادي الذي تأخذ فيه الكثافة شكلًا بسيطًا -و نقصد هنا قانون كوشي- هي من هذا الصنف. نلاحظ بالفعل أنّ هذا القانون ليس له توقّع، حيث لا يمكن أن نسند معنى للتكامل المتباعد $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$

من السهل- نسبيًّا- أن نحاكي اصطناعيًّا متتالية المعدلات من الدرجة n لمتتالية متغيّرات مستقلّة تتبع قانون Cauchy نلاحظ أنّه في حين -حسب قانون Kolmogorov للأعداد الكبيرة- هذه المعدّلات ليست تقاربيّة عندما تؤول n إلى ∞.

سلوك المعدّلات محير، بما أنّ القيم المشاهدة مع مرور الزمن تميل نحو الاستقرار تارّة؛ لتقوم بعد ذلك بقفزات في اتجاه أو في غيره بتذبذبات عنيفة و غير متوقّعة. هذا الصنف من التغيّر يفاجئ باستمرار الذين يشاهدون لأوّل مرّة ظاهرة من هذا الصنف. نتوقّع- عادة- أنّه يجب أن نشاهد في كلّ الحالات تقارب المعدّلات نحو نهاية محدودة مع ذلك، و على الرغم من أن التقارب يحصل في أغلب الحالات، توجد حالات عديدة مصنّفة، حيث لا يحدث التقارب تركيبيًّا. يحسن في هذه الحالة أن نجد تأويلًا صحيحًا للظاهرة دون أن نلجأ بطريقة خاطئة إلى إسناد التذبذبات لعوامل خارجة عن المشاهدة.

الفصل الرابع

الأساسات المنطقية لحساب الاحتمالات
إنشتاين والحركة البروانية نموذج كولمو جوروف

فيما سبق، قدّمنا تفسيرات إجمالية لفكرة الاحتمال، ويجدر بنا الآن أن نكون أكثر دقة في ما يخص النموذج المستعمل لوصفه، كذلك علينا أن نفرق بدقة بين الاحتمالات كنظرية رياضيّة و الاحتمالات كوسيلة وصفية للعالم الذي نعيش فيه.

نقاشات عديدة حصلت في ما يخص وجود الاحتمالات في الطبيعة أو عدم وجودها، يوجد في هذا المجال " الموضوعيون " الذين يقرّون بأنّ الاحتمال موجود طبيعيًّا لأسباب تناظر فيزيائي، حتى وإن كنّا لا نستطيع تحديد ذلك دائمًا بطريقة واضحة.هكذا لعب القفا والوجه والورق تقدّم أمثلة احتمالاتها معرّفة بصفة موضوعيّة. من وجهة نظر أخرى "الذاتيون " لا يريدون رؤية احتمال مسند لكلّ حدث ممكن لظاهرة عشوائيّة، و لكن "درجة اعتقاد" مرتبطة بالمشاهد تعبر ببساطة برقم عن تقييمها لحظوظ حدوث ظاهرة ما، وراء كل هذا تلتصق- غالبًا- معتقدات دينيّة أو فلسفيّة تهم الجبريّة و الحريّة، قوّة الإله الخارقة و كثيرًا من الأشياء الأخرى.

من جهة نظرنا، يمثل هذا خليطًا سيّئًا يؤدّي إلى ضياع و صراعات بعيدة كلّ البعد عن النقاشات العلميّة الجادّة، فحساب الاحتمالات علم رياضيّ دقيق مثل: الهندسة، الجبر، أو التحليل، ويجب أن نفرّق بين هذا العلم و بين الاستنتاجات التي يمكن الحصول عليها بتطبيق نموذج احتمالي على الكون الذي نعيش فيه.

نتذكر الثورة التي أتى بها نموذج النسبيّة في تفسير ظواهر فيزيائيّة مناقضة لقوانين الميكانيكا الكلاسيكيّة، لكن لا يوجد أي فيزيائي جادّ قادر على إثبات أنّه لا يوجد نموذج أدقّ يؤدّي إلى فهم أفضل لتركيب المادّة أو تفسير بعض الظواهر الفلكيّة المستعصية على الفهم- ظاهرًا- على ضوء النظريّات الحاليّة، يحصل ببساطة أنّه في عدد كبير من الظواهر القابلة للمشاهدة توافق النتائج التي تقرّها النظريّات المشاهدات، هذا هو المقياس الوحيد لملاءمة النموذج، وإذا لم يكن كذلك فيجب بناء نموذج آخر.

مثلما أنّه لا يمكننا إثبات مسلّمة، فإنّه- دون شكّ - يستحيل أن نثبت أو ننفي- منطقيًّا- واقع أنّ الاحتمالات توجد خارج عقول الرياضيّين، لكن من الممكن مشاهدة ملاءمة النموذج لعدد كبير من الظواهر و إعطاؤه- بهذه الطريقة- شرعيّة تجريبيّة، إضافة إلى ألعاب المصادفة التي تشكّل مثالًا اصطناعيًّا نوعًا ما، نستطيع أن نذكر- في الدرجة الأولى- حركة الجزئيات في سائل، التي تعطي صورة حيّة للحركة البراونية أو عمليّة (Weiner Levy) هكذا إذن إناء مملوء بالغاز يحتوي عددًا مهولًا من الذرّات الهائجة في حركة دائمة تجعلها تتصادم فيما بينها و على جوانب الإناء محدثة آثارًا قابلة للمشاهدة والتوقّع بوساطة حساب الاحتمالات.

ليس من غير المجدي أن نذكّر ببعض النقاط في هذا الموضوع .التسمية " حركة براونيّة " تعود إلى Robert Brown عالم نبات إنجليزي شاهد في(١٨٢٧) أنّ جزيئات صغيرة معلّقة في سائل غير متحرّك تتعرّض لحركات غير منقطعة و عشوائيّة- في الواقع- الجديد في مشاهدة Brown يتأتى بصفة خاصّة من طبيعة السائل الذي توجد فيه الجزيئات و استعمال المجهر، الظاهرة شوهدت في الغاز و أوّلت بأنّها حركات تنقّل. فيما يخصّ مشاهدة حركة جزيئات الغبار في مكان مظلم فيه شعاع ضوء فبالتأكيد هذا متاح للجميع حتى أنّ الظاهرة مذكورة في Rerum Natura (عناصر من الطبيعة) Titus Lucrece (القرن الأول قبل المسيح Lucretius Carus) ونقدّم هنا ترجمة حرّة "شاهدوا ماذا يحدث عندما تدخل أشعّة الشمس غرفة مظلمة، سوف ترون جزيئات صغيرة مختلفة تتحرّك في كلّ الاتجاهات في الفضاء المضاء، كمعركة متواصلة حيث تتصادم الواحدة مع الأخرى، صفًّا وراء صف في متتالية معارك استثنائية، و من هذا نستطيع أن نتخيّل قدْر الذرّات التي- أزليًّا- ترمى منها الواحدة نحو الأخرى في الفراغ اللامتناهي.

الجزيئات الصغيرة الموجودة تتحرّك بسبب الصدمات المتكرّرة و غير المرئيّة للذرات، و تقذف بدورها بضرباتها الذرّات الكبرى للغبار، هكذا يتكوّن الهيجان من الذرّات و يظهر لحواسنا بوساطة الأجسام المتحرّكة بصدمات غير مرئيّة". لا يمكن أن نقدّم تفسيرًا أفضل للظاهرة من تفسير Lucrece

أمّا فيما يخصّ النمذجة الدقيقة، فلم يتمّ هذا إلّا في عام (١٩٠٥) من قبل Albert (1879-1955) Einstein هذا الأخير كان مولعًا بأعمال Ludwig Boltzmann من ١٨٩٦ إلى ١٨٩٨ التي تتناول حركية الغازات. يأخذ في أطروحته، التي ظهرت في (١٩٠٥) حركة جزيء حرّ يتعرّض للقوى المتأتية من ذرّات السائل الذي يتحرّك فيه . سين إسقاط الحركة على مستقيم يقدم دالة $X(t)$ $t \geq 0$

إذا فرضنا أنّ الموقع الأوليّ لهذا الإسقاط هو $x_0=X(0)$ يكون الاحتمال $P=P(x_1<X(t)\leq x_2)$ و أنّ الموقع في اللحظة $t>0$ و يكون بين x_1 و x_2 معطى بالقاعدة.

$P=P(x_1<X(t)\leq x_2)=\int_{x_1}^{x_2}p(x_0,x,t)dx$ حيث $P(x_0,x_1,t)$ دالة أثبت إنشتاين أنّها حلّ للمعادلة التفاضليّة الجزئيّة $\frac{\partial p(x_0,x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 p(x_0,x,t)}{\partial x^2}$

التي لها حلّ وحيد ممكن (باعتبار الشروط الحديّة) و هو كثافة قانون Gauss أو Laplace-Gauss)

$$p(x_0,x,t)=e^{-(x-x_0)^2/(4Dt)}/\sqrt{4\pi Dt}$$

في التعبير الأعلى D ترمز لثابت قيمته لافتة للانتباه، نجد $D=\frac{2RT}{N_Af}$ حيث $R=8{,}314472 J.mol^{-1}k^{-1}\ \pm 0.000015$ وهو ثابت الغازات الكاملة الكوني يساوي أيضًا $k_B\times N_A$ حيث $K_B=1.3806503\times 10^{23}\ m^2kgs^{-2}k^{-1}$ ترمز لثابت بولتزمان T للحرارة وN_A عدد Avogardo

$N_A=6.02214179\times10^{23}\pm 0.000\ 00030\times10^{23}$

عدد الذرّات المركّبة الموجودة فيmole أو ذرّة مركّبة جراميّة قيمتها، المرجع هو عدد الذرّات للنسخة ١٢ للكربون المحتواة في ١٢ جرام من الكربون. عدد Amedeo Avogadro (1776-1850)يسمّى بهذا الاسم تكريمًا له و $f=12\pi\eta r$ عامل الاحتكاك متناسب مع ضرب نصف قطر الجزيئ في اللزوجة η للسائل.

هذه هي القاعدة التي سمحت بتقييم تجريبي لعدد Avogadro باستعمال تجارب تهم الحركة البراونيّة، وهذه الأعمال التي مكنت Jean Perrin من الحصول على جائزة نوبل في (١٩٢٦).

تجارب أخرى لتحديد عدد Avogadro أدت إلى تأكيد صحة النموذج:

لنذكر بصفة عابرة أنّ نمذجة حركة جزيء بالحركة البراونيّة (أو عمليّة Weiner Levy) المتأتية من حساب Einstein ما هي إلا مقاربة. حسابات أدق طوّرت من طرف الفيزيائي البولوني Marian Von

Smoluchowski (1872-1917) لأخذ قوي خارجيّة بعين الاعتبار، كقوّة الجاذبيّة، و كذلك من طرف Leonard Orstein (1880-1941) و George Uhlenbeck (١٩٠٠-١٩٨٠) الذين بنوا في ١٩٣٠ نظريّة رياضيّة للعمليّة تسمّى عملية Ornslein –Uhlenbeck مقدمين نظرية أدق (G.E Uhlenbeck

(And L.S Ornstein 1930 on the Borwnian Motion Phys .Rev 36, 823-841

المثال السابق لاستعمال قوانين الاحتمال لوصف حركات الجزيئات على مستوي الذرّات، يبيّن القدرة العامّة للنماذج الاحتماليّة لإعطاء تأويلات كميّة لظواهر فيزيائيّة، عدد آخر من الأمثلة المختلفة من هذا الصنف يؤدي- دون شكّ- إلى تأكيد- بالتجربة- استعمال هذه النماذج لمجمل علوم المادّة، رغم هذا الخلافات على الطبيعة الموضوعيّة للاحتمالات موجودة. المقولات الآتية تبيّن هذا النقاش Bruno de Finelli (١٩٨٥-١٩٠٦)، المذكور، من الأنصار المعروفين لذاتية الاحتمالات Mark Kac (١٩٨٤-١٩١٤) وDenis Victor Lindley (١٩٢٣)

مذكوران بالتتالي: الأوّل احتمالي موضوعيّ، و الثاني Bayesian (مستعمل لطرق Bayes في نظريّة القرار) ذاتي (١٩٦١) M. Kac" ليس من السهل أن نقول ما نظرية الاحتمالات؟ ليس ممكنًا أن نحّدد إلى أي مدى يمكن التحدّث عن نظرية، اعتبر أنّ نظريّة الاحتمالات ليست فقط مجالًا من مجالات الرياضيّات و لا تنحصر في مجموعة متوافقة من المسلّمات و النظريات، في رأيي حساب الاحتمالات هو طريقة تفكير". D.Y. Lindley (1973) " موضوع الاحتمالات يدرس منذ أكثر من قرنين، و من البداية هناك جدل حول معناه، في وقت ما كان هذا الجدل يقتصر على المستوى الأكاديمي، و لكن بسبب انتشار الأفكار الاحتماليّة إلى عدد كبير من النشاطات الإنسانيّة فإنّ الاحتمالات أنتجت نتائج عالية المستوى. أهمية الجدل هي أيضًا زادت بنسب مشابهة، و هذا واضح بصفة خاصّة في الإحصاء، حيث يعاد النظر في المبادئ الأساسية حسب النقاشات حول معنى مبدأ الاحتمال.

حينما يكون من الصعب الجواب عن سؤال ما، يكون من الممكن أنّ سبب ذلك هو أنّ السؤال مطروح بطريقة خاطئة، و كنتيجة يستحيل الإجابة عنه، هذه هي طريقة Finetti للخروج من المأزق: مبدأ الاحتمال غير موجود، هو موجود خارج الفرد، أي ليس موجودًا بطريقة موضوعيّة. الاحتمال هو وصف لعدم تأكّدكم " قراء هذه الكلمات " ممّا يخص العالم . أمّا نحن فلن نأخذ موقفًا بين الذاتيّين والموضوعيين مقرّين بالرأي أنّ كلًّا من وجهتي النظر يمكن أن يكون لها أهميّة، و أنّه يوجد حالات حيث وجود احتمال موضوعي تابع

يبدو طبيعيًّا جدًّا بجانب حالات حيث إدخال قانون احتمال يبدو اصطناعيًّا، وحيث مبدأ الاحتمال الذاتي يبدو مناسبًا أكثر(مثال: نظريّة القرار الإحصائيّة) في النهاية سياق التطبيق هو المحدّد.

تطوير مسلّمات دقيقة للاحتمالات كنظريّة رياضيّة أخذ قرونًا. كلّ المؤسّسين التاريخيّين للاحتمالات منذ:

Cardan Gerolamo Cardano)(1501-1576), Galileo Galilei (1564-1642), Pierre de Fermat (1601-1665) , Blaise Pascal (1623-1662), Jacques Bernoulli (1654-1705), Christian Huygens (1629-1695), Pierre Remond de Montmort (1678-1679) (في مؤلفه "محاولة تحليل لألعاب المصادفة" ١٧٠٨)

George Louis Leclerc de Buffon (1708-1788) Abraham de Moivre (1667-1754) , Thomas Bayes (1702-1761) (في مؤلّفه الذي ظهر بعد وفاته " محاولة لحل مسالة صدف " ١٧٦٣)

Pierre Simon de Laplace (1749-1827)

Karl- Friedrich Gauss (1777-1855) ,Simeon –Denis Poisson (1781-1840)

ومثل أغلب الرياضّيين إلى نهاية القرن ١٩ اكتفوا بتعريف الاحتمالات كقسمة "عدد الحالات المناسبة" على "العدد الجملي للحالات مع اعتماد وجود حالات أوليّة متوازنة الاحتمالات. يبدو شيئًا فشيئًا واضحًا على ضوء ما قدّمه

Andrei Andreyevitch Markov (1856-1922), Pafnouti Tchebychey (1821-1884), Alexandre Mikhailovitch, HENRI Poincaré (1854-1912) Nikolai Lobatchevski (1793-1856), Lyapounov (1857-1918), Joseph Louis François Bertrand (1822-1900)

أنّ هذا التعريف غير مرضٍ، حيث لا يمكّن من التعامل مع قوانين الاحتمالات (دوال التوزيع) المتّصلة كقانون Laplace- Gauss كما أنّه يطرح صعوبات نظريّة مختلفة. لا يوجد- في الواقع- أيّ مشكلة في تناول- باستعمال طرق تركيبية- الاحتمالات في الظواهر التي يكون فيها عدد الحالات الممكنة منتهيًا، لكن ماذا نفعل عندما يؤول هذا العدد إلى ما لا نهاية؟

المثال الأكثر طبيعيّة معطى بقانون Laplace – gauss الذي رأينا برهان وجوده " الفيزيائي " عددًا بالمصادفة أو حسب المصطلح المعهود، متغيّر عشوائي X يتبع قانونًا عاديًّا أو قانون Laplace-Gauss de Moivre ذي التوقّع μ و التباين s^2، ما يرمز له $N(\mu, s^2)$ إذا كان لكل ∞>b≥a≥∞- احتمال انتماء X إلى الفترة (a,b) معطى بالتكامل :

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b exp\left(\frac{-(t-4)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{dt}$$

مثل هذا التكامل (انظرصورة٤) يعرف المساحة تحت منحني Gauss بين a و b.

مثل هذا التعبير يبدو طبيعيًّا حاليًّا، حيث أصبح التكامل جزءًا من الثقافة (و يدرّس اليوم في التعليم الثانوي), علينا أن نعي أنّ ذلك لم يكن طبيعيًّا في بداية القرن ١٩، تكامل الدوال المتّصلة الذي يعطي معنى التعبير السابق في الواقع وقع تقديمه في (١٨٢٣) من طرف Augustin Louis البارون Cauchy (1789-١٨٥٧) و الأساسيات النظريّة بقيت غير متطوّرة حتى تنمية تكامل Riemann الذي أدخله George Friedrich وBernhard Riemann (١٨٢٦-١٨٦٦) في ١٨٦٧.

السؤال الذي يطرح مباشرة في المثال المذكور سابقًا، قانون Gauss ، حيث نستطيع أن نعرف احتمال أن تأخذ X قيمًا بين a و b بتكامل. إذا كانت A الآن مجموعة جزئية من R مجموعة الأعداد الحقيقيّة كيف يمكن تعريف احتمال أن تأخذ X قيما في A ؟ يمكن أن نعتقد بسذاجة أنّ ذلك الاحتمال معرّف لكل A ، لكن الواقع أقلّ بساطة. لكي نفهم أكثر طبيعة المشكلة من الأسهل أن نعوّض قانون Gauss بقانون منتظم. هذا التوزيع هو النموذج القياسي لمصطلح "يؤخذ عدد عن طريق المصادفة في فترة". إذا X بالتعريف متغيّر عشوائي موزّع بانتظام على [0,1] إذا كان لكل $0 \leq a \leq b \leq 1$

$$P(a < X \leq b) = b - a = \int_a^b dt$$

إذا كانت A أيّ مجموعة جزئيّة من [0,1] تحديد احتمال أن تكون X منتمية إلى A بالتكامل $P(X \in A) = \int_A dt$ يكافئ تحديد قياس A أو بلغة أخرى طول A.

نرى أنّ حساب الاحتمالات متّصل مباشرة بحساب التكامل، و تقدم الثاني حدّد تطور الأول.

بما أنّ مشكلة تحديد طول لمجموعة جزئيّة A من [0,1] يكافئ بدقّة حساب احتمال أن يكون متغيّر عشوائي منتظم يأخذ قيمة في A من الطبيعي أن نهتمّ بالحلول التي قدّمها الرياضيون. لم يحلّ المشكل إلّا في ١٩٠١ في جزئه المهمّ من طرف Henri Leon Lebesgue (١٨٧٥-١٩٤١) مع بناء التكامل الذي يحمل اسمه. الإضافات التي قدّمت لهذا التكامل من طرف Arnaud Denjoy (١٨٨٤-١٩٧٤) و Emile Borel (١٨٧١-١٩٥٦) تبيّن مع ذلك أنّ أيّ نظريّة رياضيّة ليست أبدًا نهائية.

هذه التواريخ تفسّر بنفسها لماذا- بسبب قوة الواقع- كان يستحيل على الاحتماليين تطوير أساسات قويّة لحساب الاحتمالات قبل سير القرن العشرين، كان عليهم انتظار أن تصل نظريّة التكامل إلى مستوى كافٍ من النضج للارتكاز على ذلك ، فحساب الاحتمالات و الإحصاء الرياضي (التخصّص الأخير يهم طرق تأويل معطيات المشاهدة) هما علمان معاصران نموّهما لم يحصل إلّا مؤخّرًا بالأساس منذ ١٩٢٠، وهذا رغم النتائج المتميزة- غالبًا- التي وصلا إليها سابقًا في غياب الأساسات المنطقيّة التي تضمن صحّتهما بكل دقّة، يمكن التفكير في هذا النموّ حيث مسلّمات علم ما طوّرت بعد مدّة طويلة من ولادته واستعماله. حتى و إن بدا ذلك مفاجئًا فيبدو أنّ التفكير - في الرياضيات- يتبع الفعل بسهولة أكبر من أن يسبقه.

في(١٩٠٠)، في ملتقى عالميّ للرياضيات في باريس قدّم الرياضي الألماني David Hilbert (1862- 1943) محاضرة مشهورة طرح فيها ٢٣ مسألة غير معروفة الحلّ. كان لمحاضرته وقع كبير، وأثر في البحث لعقود تلت، من بين المسائل المطروحة المسألة رقم ٦ التي احتوت- بالضبط -الحاجة الملحّة لتطوير مسلّمات دقيقة لحساب الاحتمالات.

شهد القرن ١٩ في ما يخصّ التخصّصات الأخرى في الرياضيات تقدّمًا ملحوظًا في الوضوح و الدقّة. بقي حساب الاحتمالات على هامش هذا التطوّر للأسباب التي ذكرناها سابقًا، و لهذا السبب لم يكن يعدّ كجزء من الرياضيات من طرف كثير من العلماء، و لكن كجزء خاصّ من الفيزياء(في المسألة رقم ٦ من المسائل المذكورة " وضع مسلّمات للفيزياء و العلوم التابعة لها ").

أوّل محاولة جدّية لإعطاء إطار دقيق للاحتمالات كانت من طرف Ludwig Von MISES (1881- 1973) (انظر L. Von Mises (1964)).

Mathematical Theory of Probability and statistics
Academic Press New York

كانت فكرة Von Mises هي الاعتماد على قوانين الأعداد الكبيرة لتعريف قوانين الاحتمالات للمتغيّرات العشوائيّة، وكان لا بدّ- حسب مسلّماته- افتراض أنّ كلّ كمٍّ عشوائيٍّ يمكن تكراره عددًا غير منتهٍ من المرّات، من هذه المرّات نستطيع أن نبني التركيبة العشوائيّة الأساسيّة بوساطة مشاهدة ذبذبة الأحداث، هذه وجهة نظر إحصائيّة بالأساس هدفها تجاوز اعتراضات بعض معارضي الاحتمالات الذين ينفون الوجود الفيزيائي للاحتمال- إذا لم يكن مبدئيًّا- هناك وسيلة لحسابه بصفة طبيعيّة، كانت فكرة Von Mises أنّ كلّ احتمال يمكن بناؤه من مشاهدة عدد غير محدود من النسخ للظاهرة المعنيّة.

على الرغم من أناقة تقديم Von Mises لكن لم تكن مسلّماته مرضية تمامًا كنقطة انطلاق لحساب الاحتمالات (على الرغم من بقائها ملائمة). وجدت النظريّة منعزلة عن تطوّر التخصّصات الأخرى في الرياضيّات مثل نظريّة التكامل، بالإضافة إلى أنّ المسلّمات لم تخوّل إلّا تناول ظواهر يمكن إعادتها بشكل غير متناهٍ دون إثبات وجودها في كلّ مرّة.

توصّل الرياضي الروسي Andrei Nikolayevitch Kolmogorov (1903-1987)

في سنة ١٩٣٣ إلى تأسيس قاعدة المسلّمات التي تطورت على أساسها الاحتمالات إلى يومنا هذا (Kolmogorov A N 1950)

(Foundations of The Theory of Probability, Chelsea, New York)

تأتي أفضيلة نموذج Kolmogorov- إضافة إلى بساطته- من أنه يصل منطقيًّا حساب الاحتمالات بحساب التكامل كما كان يمكن أن يتوقّع، ممّا يسمح بتطبيق على- الإطار الاحتمالي- ترسانة كل النتائج والتقنيات للتحليل الرياضي.

ليس من العجب إذ أنه بعد تعريفKolmogorov للأساسات لحساب الاحتمال تطور هذا العلم بسرعة كبيرة خلال الخمسين سنة التي تلت. هكذا- بسبب قوّة الواقع- هذا التخصّص ولد بحق في ١٩٣٣ كفرع غير نمطي من الرياضيات.

تشكيلKolmogorov يقدّم التركيبة الأساسيّة لفضاء الاحتمالات (Ω,A,P)و هذا يفترض المعطى الأوليّ Ω مجموعة الأحداث الأوليّة غير القابلة للتجزئ، كل حدث مثل"ω ∈ Ω (تعبير يعني ω تنتمي إلى Ω) يصف كليًّا إمكانيّة نظريّة لتحقّق الظاهرة المدروسة، أي حدث A يجب أن يكون منطقيًّا بحيث لكل ω ∈ Ω نستطيع القول إذا تحقق ω ، إذا كان الحدث A متحققا أولا،نلاحظ أنّ هذه الخاصيّة تمكّن من أن تكون A متماثلة مع المجموعة الجزئيّة منΩ المتكوّنة من كلّ ω تؤدّي إلى تحقيق A. هكذا مجموعة كلّ الأحداث الممكنة نظريًّا تتساوى نظريًّا مع المجموعة (Ω) P مجموعة أجزاء Ω.

العمليّات المعهودة لنظريّة المجموعات مثل: الاتحاد، الفرق، التقاطع يمكن تأويلها مباشرة بمصطلح تحقّق أو عدم تحقّق الأحداث.

A ⋃B: اتحاد B و A الحدث الذي يتحقّق إذا تحقّق واحد على الأقل من الحدثين: A وB.

A⋂B تقاطع A وB الحدث الذي يتحقّق إذا تحقّق A وB معًا.

A-B الفرق B وAالحدث الذي يتحقّق إذا تحقّق A ولم يتحقّق B.

Ø: المجموعة الخالية: الحدث المستحيل: حدث لا يتحقّق و فائدته أنّه يجعل العملية A⋂B دائمًا ممكنة حتى عندما يكون BوA غير متلائمتان (لا يمكن تحقيقهما معًا).

Ω : مجموعة كلّ الأحداث الممكنة نظريًّا: الحدث الذي يتحقّق دائمًا.

(الملاحظة نفسها هنا للعملية A ⋃B تصبح دائمًا ممكنة بإدخال Ω) نكتب في الاتجاه نفسه A⊆B (A محتواة فيB) إذا كان: كلّما تحقّقت A تحقّقت B .

لنعطي بعض الأمثلة على هذه النمذجة.

١) لعبة بسيطة لقفا وجه توصف بالأحداث الأوليّة الممكنة F: الوجه P: قفا ولذلك $\Omega = \{F, P\}$ و الأحداث المشاهدة هي ببساطة

$$\Omega = \{\mathrm{F}, \mathrm{P}\}, \{F\}, \{P\}, \emptyset$$

٢) لعبة القفا و الوجه تكرر مرتان نجد

$$\Omega = \{(F,F),(F,P),(P,F),(P,P)\}$$

و الأحداث الأخرى هي :

$$\emptyset, \{w_1,w_2\}, \{w_1,w_3\}, \{w_1,w_4\}, \{w_2,w_3\}, \{w_2,w_4\}, \{w_3,w_4\}, \{w_1,w_2,w_3\},$$

$$\{w_1,w_3,w_4\}, \{w_2,w_3,w_4\}, \{w_1,w_2,w_4\}, \Omega = \{w_1,w_2,w_3,w_4\}$$

"كمثال الحدث " لا يظهر قفا إلا مرّة واحدة يساوي $\{w_2,w_3\}$

بعد تمثيلنا للتجربة و نتائجها بالثنائي $(\Omega , P(\Omega))$

علينا أن نعطي معنى لتعريف الاحتمال على $(\Omega, P(\Omega))$

نفرض كمعطى أنّ المجموعة $\mathcal{A} \subseteq P(\Omega)$ للأحداث القابلة للاحتمال (أي يمكن تعريف احتمالها تسمّى جبر الأحداث إذا كانت تحقّق الأحداث الآتية

i) $\mathcal{A}$ تحتوي Ω

ii) إذا كان A و B في $\mathcal{A}$ فإن $A\cap B$, $A\cup B$, A-B و B-A تنتمي إلى $\mathcal{A}$ عند ذلك نسمّي احتمالًا على($\Omega, \mathcal{A}$) كلّ دالة P تأخذ قيمها في $[0,1]$ بحيث

i) لكل B وA في $\mathcal{A}$ حيث $A\cap B=\emptyset$ A وB لا يتحققان معًا عندنا

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ii) (مسلّمة الاتصال القابل للعدّ) إذ كانت $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots A_n$ متتالية متناقصة (للاحتواء) من الأحداث وتقاطعها خالٍ (لا يوجد $\omega \in \Omega$ بحيث تحقّقها ينتج عنه تحقّق كلّ الأحداث A_i ......i=1,2,3) فيكون عندنا $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$ مسلّمة الاتصال القابل للعدّ تعبّر عن إمكانيّة أخذ النهاية لمتتاليات أساسيّة لنموذج Kolmogorov، لأنّها تسمح بربط فكرة الاحتمال بفكرة القياس، من الممكن مناقشة ضرورة هذه المسلّمة التي ليست بطريقة واضحة طبيعيّة، مع ذلك فإنّ كلّ النماذج الاحتمالية البسيطة تحققها. المسلّمة- بالتأكيد- بديهيّة إذا كان Ω

منتهيًا، و هي كذلك متحقّقة بسبب خاصيّات التكامل عندما نتناول الاحتمال المسند إلى متغيّر عشوائي حقيقي مثلًا.

على سبيل المثال، إذا كان X يتبع القانون العادي (m,s^2) N نأخذ Ω=R و $\mathcal{A}$ مجموعة كلّ الاتحادات المنتهية لفترات (منتهية أو غير منتهية) R، الاحتمال الذي نرمز له بالرمز P_X يعرف لكل A∈$\mathcal{A}$ بالمساواة

$$P_X(A) = P(X \in A) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_A \; exp\left(\frac{-(t-u)^2}{2\sigma^2}\right)dt$$

الأهميّة الأساسية لنموذج Kolmogorov تتأتّى من أنّه يؤدّي إلى تمديد طبيعي للاحتمال، المعرف مبدئيًّا على جبر أحداث $\mathcal{A}$، لمجموعة أحداث أشمل تسمّى سيجما حقل أحداث مغلقة تحت العمليات المعهودة على المتتاليات (و ليس فقط عددًا منتهيًا من العمليّات). نسمّي بصفة عامة سيجما حقل كلّ جبر أحداث (Ω)P C⊂ مغلق تحت الاتحاد و التقاطع القابلين للعدد. سيجم حقل مصطلح رياضي- حقل**σ** – , و بما أنّ (Ω)P سيجما حقل فمن السهل أن نرى أنّه لكلّ مجموعة جزئيّة (Ω)β⊂P تقاطع السيجما حقولها التي تحتوي βوهو أيضًا سيجما حقل. نسمّي هذا السيجما حقل، السيجما حقل الموّلد ب β و نرمز له بالرمز $\sigma(\beta)$

النتيجة الآتية لصاحبها الرياضيّ اليوناني Constantin Caratheodory (١٨٧٣-١٩٥٠) و المعروفة تحت اسم نظريّة Caratheodory للتمديد أثبتت في ١٩١٨ في الإطار العام لنظريّة المقياس، إذا كان P احتمالًا معرّفًا على جبر أحداث (Ω)$\mathcal{A}$⊂P متكوّن من مجموعات جزئيّة من Ω إذن تعريف P يمدّد بطريقة وحيدة للسيجما حقل $\sigma(\mathcal{A})$ المولد بـ $\mathcal{A}$ في(Ω)P. ليس متاحًا لنا-هنا- أن نقدّم برهانًا لهذه النظريّة التي يجب تأكيد عدم بساطتها. النسخة المذكورة من النظريّة تعود في الواقع إلى تمديد للاحتمال يحاكي نموذج تكامل Lebesgue، يمكّن هذا التمديد من تعريف احتمال أحداث مثلًا: في لعبة قفا وجه متتالية و غير منتهٍية ("ذبذبة " "وجه " تؤول إلى ½ عندما تؤولn إلى ∞). دون التمديد يكون الأمر خاليًا من المعنى، كذلك بسبب هذه النظريّة يمكن بناء أحداث احتمالها صفر دون أن تكون خالية. في تكرار منتهٍ للعبة القفا و الوجه الحدث الوحيد ذو الاحتمال صفر هو Ø الحدث المستحيل.

من هنا، فإنّه ما كان للقانون القوي للأعداد الكبيرة أن يوجد دون تمديد فكرة الاحتمال المعطاة من طرف Caratheodory، هذا يسوّغ المكانة التي منحناها لهذه التطورات رغم طابعها النظري، من المؤسف أنّه يصعب فهم النظريّة العصرية للاحتمالات دون الدخول في مثل هذه التفاصيل التي دونها لا نستطيع أن نفهم الطبيعة العميقة للأشياء.

في المحصلة علينا ذكر وجود نماذج عدديّة للخطأ لا تحقّق المسلّمات (بصفة خاصّة خاصيّة الجمع)

$P(A \cup B) = P(A)+P(B)$ إذا كان $A \cap B = \emptyset$)

واحدة من هذه النظريّات التي لها نجاح نسبي لتطبيقاتها في الآلية هي نظريّة المجموعات المشوشة لصاحبها- متخصّص الحاسب الأمريكي ، من أصل روسي إيراني- لطفي عسكرزادة (١٩٢١) إجمالًا في النظريّة الكلاسيكيّة للمجموعات كلّ مجموعة A تصنفها الدالة المؤشرة $I_A(t)$ التي تساوي ١ إذا كانت $t \in A$ و صفرًا إذا كان $t \notin A$، في نظريّة المجموعات المشوشة نعوض الدالة المؤشرة بدالة اعتقاد $b(t)$ تأخذ قيمًا عشوائيّة بين ٠ و ١ التي تصف درجة الاعتقاد التي يسندها الملاحظ للحدث $\{t \in A\}$، مع ذلك رغم جوانبها النظريّة المغرية النظريات البديلة تصطدم بغياب الدعم التجريبي الفيزيائي. كما سنرى الاحتمالات حاضرة في الكون و هذا يسوّغ دراستها.

الفصل الخامس

الإرقام العاديّة لـ Borel والتفسير الطبيعي لقانون الإعداد الكبرى في لعبة القفا والوجة

كما أسلفنا في نهاية الباب الثاني فإنّ قانون الأعداد الكبرى لمتتالية أحداث قفا و وجه غير منتهٍة يمكن تأويله بطريقة غير حدسيّة (مثل التوازن الطبيعي بين القفا و الوجه). إطار نظريّة الأعداد، حيث حساب الاحتمالات له تطبيقات لافتة للانتباه يقدّم لنا التبيان الواضح في هذا الباب و الذي يليه.

لقد ذكرنا- فيما سب-، مثالين فيزيائيين لظواهر احتمالية:

١) تكرار غير متناهٍ لألعاب قفا ووجه مستقلّة: كما في مسلّمات Kolmogorov فضاء الأحداث الأوليّة هو Ω مجموعة متتاليات$u = (u_1, u_2, \ldots)$ حيث لكل n=1.2….. عنصر المتتالية u_n يساوي ٠ لقفا و ١ للوجه. الجبر$\mathcal{A}_1$ للأحداث الذي يعرف عليه مبدئيًّا الاحتمال P_1 يتكون من Ø وكلّ الاتحادات المنتهية لأحداث من الشكل $n \geq 1$

$$A = \{u \in \Omega, u_1 = \alpha_1 \ldots u_n = \alpha_n\}$$

احتمال حدث مثل هذا يحدّد ب $\frac{1}{2^n}$ حيث ١ أو ٠ =α_i لكل$i = 1, 2, \ldots. n$

٢) القانون المنتظم على[0,1] : المتغيّر العشوائي الذي يتبع هذا القانون يوافق فكرة "سحب بطريقة عشوائيّة عددا بين ٠ أو ١". المجموعة Ω_2 للأحداث الأوليّة هي هنا[0,1] فترة الأعداد الحقيقية بين ٠ و ١. الجبر $\mathcal{A}_2$ الذي يعرف عليه، مبدئيًّا، الاحتمال P_2 يتكون من كلّ الاتحادات المنتهية للفترات المحدودة غير المتقاطعة المحتواة في[0,1] .

$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$ حيث $0 \leq a_1 \leq b_1 \ldots\ldots \leq a_n \leq b_n \leq 1$ الاحتمال P_2 على $\mathcal{A}_2$ يعرف كالآتي: $P_2(A) = P(u \in A) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$في الواقع سوف نلاحظ أنّ هذين المثالين المختلفين في الظاهر هما واحد، و أنّه من الممكن المماثلة، بصفة طبيعية الأشياء العشوائيّة و الاحتمالات التابعة لها. حتى

نأسّس هذا التماثل، يكفي أن نلاحظ أنّ كلّ عدد$u \in [0,1]$ يمكن أن يمثل بالنشر الثناوي

$u \in [0,1] \leftrightarrow U=(u_1,u_2,u_3 \ldots\ldots)$

حيثu_n =0 أو ١ لكل.... n=1,2 و هذا ممكن بسبب المساواة :

$u=\varphi(U)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{2^n}$ هذا في الواقع التقسيم في الأساس ٢ مثل التقسيم في الأساس ١٠ (الترقيم العشري الكلاسيكي) مثلًا

$$\frac{1}{3}=0.333=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\cdots+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

و نلاحظ أنّ الدالة$u=\varphi(U)$ $U \rightarrow$ دالة من Ω_1 إلى Ω_2 في حين أنّه لرقم$u \in \Omega_2=[0,1]$ معرف بالصورة العكسية

$$\varphi^{-1}(u)=\{u \in [0,1], \varphi(u)=u\}, u \rightarrow U \in \varphi^{-1}(u)$$

لكن هذا المقدّم وحيد فقط في حالة الأعداد: $u \in [0,1]$ التي لا تكون من الشكل $\frac{k}{2^n}$ حيث عدد k صحيح.

مثلًا في التعداد الثناوي يمكن المماثلة بين

$(0,1,\ldots.1\ldots))$ و $\frac{1}{2}$ و $(1,0,\ldots\ldots)$ و$\frac{1}{2}$

(للسبب نفسه نكتب في الترقيم العشري .....1= 1,0000=0,9999 كتابة مسوّغة بأنّ كلّ عدد حقيقيx متماثل مع $(d_1,d_2,\ldots)$ في التعداد العشري مع d_n=1, 2,3,…….9 و..........n=1,2 يعرف كنهاية

$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{10^i}$

و نلاحظ في هذا السياق أنّ المساواة ...1=0,999 أو في التعداد الثناوي، المساواة (...,0,1,1) =½

ما هي إلّا مثال على متناقضة Zenon d’Elée (430-,495-) التي تعود إلى القرن الخامس قبل المسيح و فيها أنّ أكيل Achille يلاحق سلحفاة و لا يستطيع أبدًا اللّحاق بها. التسويغ يتمثل في قول: إنّه كلّما وصل

Achille إلى موقع السلحفاة تكون هذه الأخيرة غير موجودة، حيث تقدّمت خطوة صغيرة في الأثناء، في الواقع Achille يلحق دومًا بالسلحفاة لأنَّ المجموع اللامتناهي للمسافات المقطوعة بين الفترات المتتالية لتحليل Zenon d'Elée تكون متسلسلة تقاربيّة، نتحقّق من أنّ المجموعة N_2 للإعداد u من الشكل $\frac{k}{2^n}$ حيث kعدد صحيح احتمالها $P_2(N_2)=0$ في $\Omega_2 = [0,1]$. نتحقّق كذلك من أنّ $N_1 = \varphi^{-1}(N_2)$ الذي يقابله في Ω_1 يتكون من المتتاليات $U=(u_1, u_2, \ldots\ldots)$ من ٠ و ١ و الثابتة بعد رتبة معيّنة احتمالها $P_1(N_1)$ صفري.

التطبيق φ $\Omega_1 \rightarrow \Omega_2 = [0,1]$ (لنذكر أن Ω_1 هي مجموعة المتتاليات

$U=(u_1, u_2, \ldots\ldots)$ متكونة من ٠ و ١) يحقق العلاقات الآتية التي تربط Ω_1 بـΩ_2.

φ تطبيق شامل من Ω_1 إلى Ω_2 (كلّ عنصر من عناصر Ω_2 صورة بالتطبيق φ لعنصر من عناصر Ω_1 على الأقل).

φ تقابلية من Ω_1-N_1 إلى Ω_2-N_2 (كلّ عنصر من عناصر N_2 -Ω_2 هو صورة لعنصر وحيد من N_1 - Ω_1 بالتطبيق φ).

نستطيع إذن أن نماثل N_1- Ω_1 و N_2-Ω_2 بوضع $A_2 = \varphi(A_1)$ لكلّ

$A_1 \in \mathcal{A}_1$ نلاحظ أنه لكل $0 = P_2(N_2) = P_1(N_1)$ بما أن $A_1 \subseteq \Omega_1 - N_1$

$(\Omega_2 - N_2) = P_2(\varphi(A_1)\, P_1(A_1) = P_1(A_1 \cap (W_1 - N_1)) = P_2(j\ (A_1) \cap$

هذه المساواة تؤدّي بصفة عامّة إلى وجود حدث A ينتمي إلى Ω_1 مماثل لـ A_2 ينتمي إلى $\varphi(\Omega_1)$ إذا كان الفرق$(\varphi(A_1) - A_2) \cup (A_2 - \varphi(A_1))$ ينتمي إلى المجموعة ذات الاحتمال الصفري N_2. هذه العملية تبيّن أنّ الاحتمالين P_2 و P_1 المعرفين على أحداث متواحدة متساويين.

بهذه العمليّة نستطيع مواحدة النموذجين $(\Omega_1,\sigma(\mathcal{A}_1),P_1)$ و$(\Omega_2,\sigma(\mathcal{A}_2),P_2)$.إنّه الآن مهمّ أن نرى كيف يتحوّل إلى $(\Omega_2,\sigma(\mathcal{A}_2),P_2)$ قانون الأعداد الكبيرة الذي حصلنا عليه على $(\Omega_1,\sigma(\mathcal{A}_1),P_1)$ و الذي يعبّر عن التقارب باحتمال ١ لمتوسّط المتتالية$u_1,u_2,\dots u_n$ **نحو** $\frac{1}{2}$.

بالتحويل إلى $(\Omega_2,\sigma(\mathcal{A}_2),P_2)$ قانون الأعداد الكبيرة على$(\Omega_1,\sigma(\mathcal{A}_1),P_1)$ نحصل على :

توجد مجموعة جزئيّة A من $[0,1]$ مقياسها صفر، بحيث كلّ عدد u ينتمي إلى المتممة $N=[0,1]-A$ يكون له النشر الثناوي $U=(u_1\ u_2\ldots\ldots)$ المتكون من متتالية ٠ أو ١ بحيث

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i=\frac{1}{2}$$

نلاحظ إذن أنّ كلّ الأعداد في $[0,1]$ باستثناء الأعداد التي تنتمي إلى مجموعة مقياسها صفر والمعرّفة سابقًا تحقّق قانون الأعداد الكبيرة المقابل للعبة " القفا و الوجه " أي أنَّ معدلاتهم تؤول إلى ½. الأعداد من هذا الصنف المكونة للمجموعة $\mathbb{N}$ سمّيت أعدادًا عادية من طرف Emile Borel (١٩٥٦-١٨٧١) هذه الخاصيّة المثبتة في ١٩٠٩ من طرف Borel تمثل أوّل مثال للقانون القوي للأعداد الكبيرة قبل أن يثبت Kolmogorov الشكل العام في ١٩٢٨.

سوف نعود في آخر الباب للتطوّر التاريخيّ لقانون للأعداد الكبرى الذي تلى اكتشاف Borel، نتناول في طريقنا تركيبة المجموعات ذات المقياس الصفري- كتتمّة لنقاشنا لهذا الموضوع- في الباب الرابع. بصفة عامّة مقياس Lebesgue لفترة$A=[a,b]$ من المستقيم الحقيقي R يتساوى مع طولها

$\lambda(A)=a-b$. كما ذكرنا في السابق, في الباب الرابع, نظريّة Lebesgue مع نظريّة Caratheodory للتمديد تسمح بتوسيع تعريف القياسLebesgue $\lambda(.)$ إلى أصغر سيجما حقل يحتوي الفترات، هذا السيجما حقل يتساوى مع السيجما حقل البورالي$\beta=\beta(R)$ بصفة عامة في فضاء توبولوجي F السيجما حقل البورالي يرمز لأصغر سيجما حقل مجموعات جزئية منF تحتوي المجموعات المغلقة والمفتوحة،$\beta(R)$ يعطي مثالًا خاصًّا لهذا التركيب في حال $F=R$ نستطيع استنتاج$\lambda(A)$ لكل$A\in\beta(R)$ ، القيمة المناسبة

تكون منتهية إذا كانت A محدودة، تمديد المقياس من طرف Lebesgue يؤدّي إلى توسيع أشمل لهذا التعريف لسيجما حقل $a(R) \acute{E}\, b(R)$

لمجموعات جزئيّة من R تسمّى قابلة لقياس Lebesgue مع هذا من الطبيعي أن نسأل هل من الممكن توسيع التعريف إلى كلّ مجموعة جزئيّة؟

الجواب عن هذا السؤال هو بالنفي. نصل بسهولة إلى تناقض لو قلنا إنّ مثل هذا التمديد موجود.

يمكن أن نفكّر- بشيء من السذاجة- أنّ المقياس$\lambda(A)$ موجود لكل $A \subseteq R$ و لتأكيد هذه الفكرة يمكن تخيّل المستقيم الحقيقي كسلك حديدي غير منتهٍ يُقصّ إلى أجزاء لنحصل على قطع نحسب طولها بحساب الكتلة بالميزان.

في الواقع دون أن ننتبه لذلك فإنّ فكرة أن نحصل علي مجموعة جزئية من R بقطع معين يفرض أن نكون أجرينا هذه العمليّة بمتتالية (قابلة للعدّ) ضربات مقص.

هذا يفسر أنّ الجواب النهائي لمسألة التمديد للمقياس من طرف Lebesgue في (١٩٠١) أوجد تفرقة بين المجموعات القابلة للقياس و المجموعات غير القابلة للقياس، الأولى يمكن تعريف مقياس Lebesgue لتقاطعها مع أيّ فترة محدودة، و الثانية ليست لها هذه الخاصيّة، إذن نرى أنّ المجموعات الجزئية القابلة للقياس بتعريف Lebesgue هي سيجما حقل يحتوي الفترات (ومن ثمّ يحتوي السيجما حقل البورالي$\beta(R)$ و لهذا ليس من الممكن الحصول على مجموعة جزئيّة من R غير قابلة للقياس بمتتالية قابلة للعد عمليات. وجود مجموعات لا تقاس بمقياس Lebesgue يمكن إثباته بوساطة مسلّمة الاختيار على الرغم من عدم قدرتنا على تكوين واضح لمثل هذه المجموعات.

مجموعة N ذات قياس Lebesgue صفري تقابل الفكرة الحدسيّة لمجموعة جزئيّة ذات "كتلة خطيّة" صفريّة على المستقيم الحقيقي، و يمكن وصفها بأنّ لكل $\varepsilon > 0$ يمكن أن تحتوي في مجموعة جزئيةA_ϵ قابلة للقياس بحيث مقياس Lebesgue $\lambda(A_\varepsilon)$ يكون أقل من ε. الخيار الأبسط لمثل هذه الـA_ϵ اتحاد قابل للعدّ لفترات ما يؤدّي إلى $[a_{n,\varepsilon}, b_{n,\varepsilon}]$ $N \subset A_\varepsilon = \cup_1^\infty$حيث

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n,\varepsilon}-a_{n,\varepsilon}) \leq \varepsilon$

على الرغم من بساطة الصورة التي توحي بها هذه المجموعات يمكن أن يكون لها تركيب معقّد، كمثال: المجموعة Q مجموعة الأعداد الكسريّة، مقياسها صفر، و يوجد أمثلة كثيرة لمجموعات مقياسها صفر و غير قابلة للعدّ. تقدّم الكسريات طائفة مهمة. لكل A مجموعة جزئية من R^d يعرّف بعد Hausdorff $dim_H(A)$ للمجموعة A كأصغر مؤشر ٠ ≤ δ بحيث لكل $\varepsilon > 0$ نستطيع أن نغطّي A بمتتالية مستطيلات In(ضرب فترات) بحيث $\sum_{n\geq 1} \lambda(I_n)^{\delta+\varepsilon} < \infty$ بحيث $\lambda(.)$ ترمز لمقياس Lebesgue على R^d. بعد Hausdorff فكرة ترجع لصاحبها Hausdorff Felix (١٨٦٨-١٩٤٢) تتساوى مع تعريف البعد الهندسي المعهود للمجموعات الجزئيّة المنتظمة (منحنيات، مسطّحات) في R^d. واحدة من نتائج هذا التعريف أنّه إذا كان $dim_H(A) < d$ فإن مقياس Lebesgue للمجموعة A صفري. تمثّل الكسريّات مجموعات جزئيّة من R^d بعدها ليس عددًا صحيحًا، و بالتمديد بعدها يمكن أن يكون أيّ شيء. مثال لهذا الصنف هو مجموعة Cantor الذي قدمه Georg Cantor (١٨٤٥-١٩١٨) و يتكوّن من الأعداد $u \in [0,1]$ حيث نشرها في الأساس ٣ يأخذ الشكل $u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{3^n}$ n=1,2,.... $u_n = 0$ أو 2 مجموعة Cantor ليست قابلة للعدّ و مقياسLebesgue صفري و بعد Hausdorff يساوي $\frac{\log 2}{\log 3} < 1$

نهتم الآن بجزئيّات نتيجة Borel (١٩٠٩) فيما يخصّ الأعداد العاديّة. لنكتب النشر الثناوي لعدد x بين ٠ و ١ على الشكل :

$x=\sum_{1}^{\infty}\frac{U_n(x)}{2^n}$ حيث $u_n(x) = 0$ أو 2 n=1,2,....

لنتفق لتجنّب عدم الوضوح، في تعريف الأعداد $\{u_n(x), n\geq 1\}$ في حال تكون x من الشكل $\frac{k}{2^n}$ مع k عدد صحيح أن تكون متتالية ثابتة و تساوي واحدًا بعد رتبة ما. هذا التحديد يمكّن من تعريف $\{u_n(x), n \geq 1\}$بطريقة وحيدة لكل$x \in [0,1]$ إذا وضعنا الآن لكل n=1,2,3......

$S_n(x) = 2\sum_{k=0}^{n} u_k(x) - n$

النتيجة المذكورة سابقًا E. Borel 1909 (27,247,271) Circ. Mat. Palermo تعود إلى القول إنّه

لكل x في $N = [0,1]$-{**مجموعة قياسها صفر**} (سوف نقول: إنّ الخاصيّة تتحقق تقريبًا لكل x في [0,1]

أو أيضًا تقريبًا في كلّ مكان في $x \in [0,1]$) عندما $n \to \infty$ $S_n(x) = o(n)$ الرمز $u_n = o(v_n)$ أو

un=O(vn) يعبّر عن أن $\left|\frac{U_n}{V_n}\right| \to 0$ او أن $\left|\frac{U_n}{V_n}\right|$ محدود)

على ضوء هذه النتيجة من الطبيعي أن ندرس سرعة التقارب $\frac{S_n}{n}$ نحو صفر. إثر أعمال Borel حصل على تقديرات متتالية لهذه السرعة من طرف :

- (1913) Haussdorff الذي أثبت أنّه لكلّ $\varepsilon > 0$ و تقريبًا لكلّ x في [0,1]

$$S_n(x) = o(n^{\varepsilon+\frac{1}{2}})$$

- Hardy and Littlewood(١٩١٤) الرياضيين Godfrey Harold Hardy (١٨٧٧-١٩٤٥) و John Edensor Littlewood(١٨٨٥-١٩٧٧) كان لهما تعاونا مشهورا (أثبتا أنّه تقريبًا في كلّ x في[0,1]

$$S_n = O(\sqrt{n\, logn})$$

- khintchine (١٨٧٨-١٩٥٩) حصل على أفضل نتيجة من الرتبة الأولى في بحث في Mathematische Zietschrift 18-109-116 (A khintchine ١٩٢٣)

باستعمال نسخة خاصّة من الوغاريتم المكرّر($\log\log x = \log(\log x)$ الذي يلعب دورًا مهمًّا في هذه النتيجة و التي تليها (هذه دالة ذات تزايد بطيء جدًّا). هذه النتيجة تقول إنه تقريبًا لكلّ x في [0,1]

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{S_n(x)}{\sqrt{2\, n \log logn}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} inf \frac{S_n(x)}{\sqrt{2\, n \log logn}} = -1$$

بلغة أخرى لكلّ $0 < \varepsilon < 1$ يوجد لكل x في $[0,1]$ باستثناء مجموعة مقياسها صفر مؤشر $n_{\varepsilon,x}$ بحيث إذا كان $n \geq n_{\varepsilon x}$ عندنا

$$-(1+\varepsilon)\sqrt{2\log logn} \leq S_n(x) \leq (1+\varepsilon)\sqrt{2n\log logn}$$

و من ناحية أخرى تحت المعطيات نفسها يوجد عدد غير منتهٍ من المؤشّرات n بحيث

إمّا $S_n(x) \leq -(1-\varepsilon)\sqrt{2\,n\log\log n}$ أو $S_n(x) \geq (1-\varepsilon)\sqrt{2\,n\log\log n}$

نتيجة Khintchine، التي سنناقشها لاحقًا في الباب ١١ توصف، في الرتبة الأولى سرعة تقارب $\frac{S_n}{n}$ نحو صفر وقع تحسينها في شكل أمثل في ١٩٤٣ من طرف

William Feller (١٩٠٦-١٩٧٠) انظر W Felle (١٩٤٣)

“The general form of the so-called law of iterated logarithm “

(T.A.M.S, 54, 373-402). يعوض Feller الدالة $\varphi(t) = \sqrt{2t\log logt}$ بدالّة موجبة متزايدة غير محدّدة، ويثبت أنّه تقريبًا لكلّ $x \in [0,1]$

a) إذا كان $\sum \frac{\varphi_n}{n} \exp\left(\frac{(\varphi_n)^2}{2}\right) < \infty$ فإنه إذا كان n عددًا كبيرًا بما فيه الكفاية فإنّ

$$-\varphi(n)\sqrt{n} \leq S_n(x) \leq \varphi(n)\sqrt{n}$$

b) إذا كان $\sum \frac{\varphi_n}{n} \exp\left(\frac{\varphi(n)^2}{2}\right) = \infty$ فإنّه لعدد غير منتهٍ من المؤشرات عندنا

$S_n(x) \leq \varphi(n)\sqrt{n}$ أو $\varphi(n)\sqrt{n} \leq S_n(x)$

و على الرغم من أنّ التأويل الذي يمكن تقديمه بحساب الاحتمالات لتقارب معدّلات النشر الثناوي نحو $\frac{1}{2}$، مريح للتوقّع، لكن هذا القانون يعبّر أيضًا عن نتيجة دقيقة من نظريّة الأعداد. عند وعينا بهذا ندرك إلى أيّ مدىً تأخذ نظريّة الاحتمالات جذورها بعمق في الرياضيات الأكثر أساسيّة، مثل هذه الأمثلة استعملت كثيرًا

من طرف المدافعين عن الاحتمالات الموضوعيّة- الموجودة في الطبيعة- لدحض براهين الذاتيّين الذين يعتقدون أنّ الاحتمالات ليس لها وجود طبيعي.

نحن الآن قادرون على أن نحيط بالطبيعة المنطقيّة لتقارب المعدّلات في تكرار غير منتهٍ للعبة القفا والوجه.

في الواقع التحقيق الفيزيائي للعبة مماثلة يشابه تمامًا- إذا فكّرنا قليلًا- اختيار عدد حقيقي من الفترة $[0,1]$ بصفة عشوائيّة، إنّنا نتحدّث هنا عن محاكاة فيزيائيّة للفكرة الثنائيّة النظريّة لمتتالية عشوائيّة، حيث اختيار الأعداد بصفة عشوائيّة يتحقّق بوساطة آليّة بشريّة تتمثّل في رمي قطعة نقديّة في الهواء.

من الصعب عامّة التحقّق من أنّ عددًا ما عاديّ (أي له نشر ثانويّ يحقّق قانون الأعداد الكبرى) أم لا .
نعلم في كلّ الحالات أن الأعداد الكسرية من الشكل $\frac{p}{q}$

حيث p و q عددان صحيحان ليست أعدادًا عاديّة بسبب دوريّة العناصر في نشرها. انظر A Renyi (Mat Tidsskrift B 41-48) (1948)

كخاتمة لهذا الباب ليسمح لنا أن نستشهد بقول Emile Borel (1945)

(Calcul des probabilités Gauthier-Villars p 92)" لعبة القفا و الوجه ذات المبدأ السهل لها طابع شديد العموميّة و تؤدّي إذا درسناها بالتفصيل إلى الرياضيات ذات المستوى الشديد العلو".

الفصل السادس

أمثلة أخرى لحساب الاحتمالات في نظريّة الأعداد
Hardy و Ramanujan , Erdos , Kac و Leveque
النشر في كسور متواصلة

أعمال Borel على الأعداد الطبيعيّة و على قانون الأعداد الكبيرة الذي عبّر عنه بطريقة النشر الثناوي الذي ذكرناه في الباب الخامس يبّينان بوضوح الروابط بين حساب الاحتمالات و نظريّة الأعداد. عندنا هنا مجال واسع جدًّا. أين يمكن إثبات نتائج في ظاهرها بعيدة كلّ البعد عن فكرة المصادفة ذاتها؟ وما هي إلّا قوانين احتمالية معبر عنها في إطار خاص.

نحتاج إلى أكثر من كتيّب لذكر هذه التطبيقات و لا نستطيع ذكر إلا مختارات قليلة.

أعداد Borel العاديّة أعداد حقيقيّة ذات التركيبة التي ليست أوليّة، من السهل علينا التعامل مع الأعداد الصحيحة، و سوف نكتفي فيما سيأتي بأمثلة ذات تركيبة احتماليّة حاضرة بصفة طبيعية في هذه الأشياء الحسابيّة، ليكن n عددًا صحيحًا طبيعيًّا مثل n=٢٥٢ مثل هذا العدد له تفكيك إلى أعداد أوليّة من الشكل

$$1 < p_1 < \cdots < \mathrm{p_r} \quad n = p_1^{k_1} \ldots . p_r^{k_r}$$

أعداد أوليّة مختلفة. (العدد p يكون أولي إذا كان يقسم على p و على 1 فقط) $\mathrm{k_1} \ldots \mathrm{k_r}$

أعداد صحيحة غير صفريّة.

مثلًا $252 = 2^2.3^2.7$ $P_1=2$ ،$P_2=3$ ،$P_3=7$ ،$K_1=2$ ،$K_2=2$ ،$K_3=1$ ،r=3

في ١٩١٧ الرياضيّان : الانجليزي، G.H .Hardy (1877-1947) و الهندي Srinivasa Ramanujan Iyengar (1887-1920)

تحصّلا على نتيجة مذهلة

G.H .Hardy and S Ramanujan (1917)" the normal number of prime factors of n "
Quart J 76-92

أثبتنا أنّه تقريبًا لكلّ الأعداد الصحيحة لها ما يقارب $\log logn$ قاسم أولي، بصفة أدق أثبتنا أنه لكلّ متتالية عددية $\varphi(n)$ تحقّق $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$، التناسب، المسند للعدد n، للأعداد $k = 1,2 \dots n$ حيث

$$\frac{|V(k) - \log \log n|}{\sqrt{\log n \log n}} \geq \varphi(n)$$

يؤول إلى ٠ إذا آلت n إلى ∞.

أقل ما يمكن أن يقال هو أن هذه النتيجة تذكّر بنوع من قوانين الأعداد الكبرى الحسابيّة، مع ذلك فإنّ علاقة هذه الخاصيّة مع حساب الاحتمالات لم توضح في الإبان لأنّ Hardy و Ramanujan لم يبنيا برهانهما في هذا الاتجاه، و كان لا بدّ من انتظار بحث في ١٩٣٤((P.Turan (1934)

"On a theorem of Hardy and Ramanujan .J London Math soc 9,274-276 . للرياضي المجري(P. Turan (1910-1976

حتى تتوضّح الطبيعة الاحتماليّة لنظريّة Hardy وRamanujan . أمكن لـ Turan إعطاء برهان ابتدائي لهذه النتيجة بتطبيق متباينة Bienaymé-Tchebychey

المعروفة من الاحتماليين التي تعود إلى (Irenee Jules Bienayme (1796-1878

هذا الاكتشاف كان له صدىً كبير بما أنّه التطبيق الأوّل المهم لحساب الاحتمالات على الحساب، تبعه عدد كبير من الأعمال المتشابهة التي تظهر قوّة الوسائل الرياضيّة- التي أوجدت في البداية لدراسة الظواهر العشوائيّة- و ثراء تطبيقاتها.

يحدث أن قانون أعداد كبيرة غالبًا ما يربط بنظريّة النهاية المركزية كما هو الحال في مجموع متغيّرات مستقلّة. نظريّة Hardy و Ramanujan لا تخرق القاعدة كما أثبت ذلك Pal Erdos و Mark .Kac في ١٩٤٠. قانون Gauss للأخطاء في نظريّة الدّوال الجمعية في نظريّة الأعداد-Amer.J. Math (62, 738 742). لنذكر- بالمناسبة- أنّ الرياضي المجري Pal Erdos (١٩١٣-١٩٩٦) هو شخصيّة علميّة شهيرة

كتب مع ما لا يقل عن ٥٠٤ شريك لبحوث علميّة (من بينهم كاتب هذا الكتاب). نتيجة Kac Erdos تؤدّي إلى بناء توزيع Laplace-Gauss، الاحتمالي لأعلى درجة، من تعداد بسيط للأعداد الصحيحة. يجدان أنّه إذا كان$N_n(x)$ يرمز لعدد الأرقام الصحيحة$k = 1,2,\ldots n$ بحيث $\frac{V(k)-log\,logn}{\sqrt{\log logn}} \leq x$فإنه لكلّ x في R

إذا آلت n إلى ∞ فإنّ القسمة $\frac{N_n(x)}{n}$ تتقارب نحو القانون العادي $N_{(0,1)}$ بمعنى أنّه :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{n} = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$$

سرعة التقارب حصل عليها في ١٩٥٨ Turanو Renyi

Alfred Renyi (1921-1970) رياضي مجريّ مشهور و أكّد حدسيّة Leveque التي تعود إلى ١٩٤٩ بإثبات أنّه عندما تؤولn إلى ∞

$$\frac{N_n(x)}{n} = \phi(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log logn}}\right)$$

وهي سرعة لا يمكن تحسينها.

نرى هنا ظهور الدالة اللوغاريتمية المكرّرة التي سبق ذكرها في نهاية الباب الخامس، أي $\log\log x = \log(\log x)$

هذه الدالة تتزايد نحو ما لا نهاية عندما تؤولx إلى∞ و لكن ببطئ شديد بحيث $\log\log n$ تبدو للمقاييس "الإنسانية" للأعداد تقريبًا ثابتة: x =1000 $\log\log x \cong .9$

$\log\log x \cong 3.0$ $x = 1000000000$ و $\log\log x \cong 5.4$ $x = 10^{100}$

نذكر هنا أنّ عدد الذرّات في الكون (مع خطأ لا يتجاوز الأعشار) يقارب ١٠^٨٠ ما يعطي فكرة عن درجة كبرn اللّازمة لنحصل على دقّة مقبولة في هذه النظريات. هكذا إذا أخذنا بعين الاعتبار نتائج

وLeveque Renyi وTuran (١٩٥٨) فإنّ نظريّة Kac- Erdos (١٩٤٠) ليست لها استعمالات تطبيقيّة لحساب التوزيع العادي. يجب على n أن تكون كبيرة بصفة هائلة لنحصل على دقّة في مستوى العُشر الأوّل.

الدّالة $V(n)$ (عدد قواسم n الأوليّة) مثال لدالّة جمعيّة حسابيّة، دالّة عددية$f(n)$ n=1,2, تكون من هذا الصنف إذا كان $f(mn) = f(m) + f(n)$ إذا كان m و n عددين أوليّين (إضافة إلى $V(n)$ مثال لدالّة حسابيّة جمعية معطى بالدالة $\log f(n)$ حيث $f(n)$ دالّة Euler المعرفة كعدد أرقام n, k=1,2, الأوليّة مع n).

Renyi وTuran (Acta Arith 4,71-84) أثبتا أنّ نتيجة المقاربة التي حصل عليها للدالة $V(n)$ تبقى صحيحة لمجموعة كبيرة من الدوال الحسابيّة الجمعية. الأبحاث في هذا المجال إلى الآن لا تزال نشيطة.

مثال آخر لوجود تركيبة احتماليّة في نظريّة الأعداد معطى بالتقسيم في كسور متواصلة. كلّ عدد غير كسري x بين ٠ و ١ يمكن أن يكتب بطريقة وحيدة في شكل كسر متواصل حسب القاعدة

$$x = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \cfrac{1}{a_3(x) + \cdots}}}$$

حيث $\{a_k(x), k \geq 1\}$ متتالية تبنى كالآتي بالاستقراء. لنرمز بالرمز $[u]$ للجزء الصحيح للعدد u المعرف كأكبر عدد أقل أو يساوي u. لنضع حينئذ $T(u) = \frac{1}{u} - \left[\frac{1}{u}\right]$ نعرف المتتالية $\{a_k(x), k \geq 1\}$ بالاستقراء :

$$]a_1(x) = [\tfrac{1}{x}$$

$$k \geq 1 a_{k+1(x)} = a_k\big(T(x)\big) = a_1\left(T^k(x)\right)$$

نلاحظ أنّه إذا كان(x) غير كسري المتتالية. $a_k(x)$ ...k=1,2, متتالية أعداد صحيحة تحقّق$a_k(x) \geq 1$.

لكن إذا كان x كسري تقف المتتالية بعد رتبة معيّنة. إضافة إلى ذلك إذا كان x غير كسري عندنا النتيجة النهاية.

$$x = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1}(x) + \cfrac{1}{r_n(x)}}}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1}(x) + \cfrac{1}{a_n(x)}}}}$$

من المهم حساب $r_n(x) \in [1,\infty]$ المعرّف بالمساواة

$$r_n(x) = a_n(x) + \cfrac{1}{a_{n+1}(x) + \cfrac{1}{a_{n+2}(x) + \cdots}}$$

هذه المسألة تناولها Gauss في رسالة إلى Laplace حيث لاحظ أنّه لكلّ$t \in [0,1]$ مقياس Lebesque

$\lambda(.)$ للمجموعة نرمز لها $\{r_n^{-1}(.) \leq t\}$

$\{x \in \mathbb{R}, \frac{1}{r_n(x)} \leq t\}$ من نقاط [0,1] التي تحقّق $\frac{1}{r_n(x)} \leq t$ لها نهاية عندما تؤول n إلى∞ معطاة

$\lim_{x \to \infty} l\,(r_n^{-1}() \leq t) = \frac{\log(1+t)}{\log 2}$ نجد أن$\frac{1}{r_n(x)}$ تتحوّل مثل متغيّر عشوائي. تبقى أسئلة عديدة إلى اليوم دون أجوبة فيما يخص هذه النهاية. فيما يخص الخطأ

$$E_n(t) = (\lambda(r_n^{-1}(.) \leq t) - \frac{\log(1+t)}{\log 2}$$

لا نعرف بالضبط سرعة تقاربه نحو الصفر. حصل Kuzmin في ١٩٢٩ على نتيجة تحدّد أنّ الخطأ من الدرجة $O(q^{\sqrt{n}})$ لكلّ عدد qغير معروف بحيث $0 < q < 1$. حسن Paul Levy هذه النتيجة بإثبات الدرجة $O(q^{n})$ لعددq يحقق$q \leq 0,7$ في وقت لاحق في ١٩٦١ أثبت Szusz أنّه في حدّ Levy

يمكن اختيار $q < 0,4$. تحديد الدرجة الأمثل لتقارب $E_n(t)$ نحو ٠ يبقى إذن مسألة مطروحة ومستعصية.

نمذجة الكسور المتصلة بوساطة الاحتمالات يمكن أن تنجز بأخذ $\Omega =$[0,1] كفضاء الأحداث الأوليّة و كمقياس احتمال، أي مقياس على [0,1].

في الحالة الخاصة لمقياس Lebesgue نلاحظ نتيجة تقارب نحو نظام مستقر، هذا مرتبط لمقياس Gauss على [0,1] الذي ترمز له بالرمز $\gamma(.)$ و يعرف بـ $\gamma(A) = \frac{1}{\log 2}\int_A \frac{dx}{1+x}$

لكلّ A قابلة للقياس جزئيّة من [0,1]. إذا كان x متغيّرا عشوائيا ذا قانون معرف بمقياس Gauss أي بحيث $P(X \in A)$=γ(A) لكلّ مجموعة A قابلة للقياس من[0,1]، نعرف المتتالية العشوائيّة$\{a_n(X), n \geq 1\}$ المتكونة باحتمال ١ من أعداد موجبة تملك الخاصيّة المميزة أنّها متتالية مستقرة تحقّق ل k=1.2.....

$$P(a_n(x) \geq k) = \gamma(\{x, a_n(x) \geq k\}) = \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log 2}$$

لمزيد من التفاصيل يمكن الرجوع إلى (M.Iosifescu(1978

“ Recent advances in the metric theory of continued fractions

Trans VIII Prague . conf Vol A, 27-40

لتطبيقات أخرى لحساب الاحتمالات على نظريّة الأعداد نرجع إلى (Mkac(1949

“Probability methods in some problems of

analysis and number theory” bull .amer. Math.soc 55,1949, 641-655

أيضًا إلى(1979) P.D.T .A . Elliot “Probabilistic number theory”

Springer New York

أمثلة أخرى لمحاكاة جبريّة للمصادفة معطاة من طرف (١٩٨٤) J. Bass

"دوالّ الارتباط، دوالّ شبه عشوائيّة و تطبيقات” Paris Masson و في المؤلف (1986) L .Devroye

“Nom –Uniform Random Number Generation “

New York , Springer و الممكن تحميله مجانًا على الموقع

http:cg.scs. carteto.ca/≈/Luc/ rn bookindex. html.

الفصل السابع

استقلالية المتغيّرات العشوائية

نظريّة kolmogoro, دوال Rademacher التبديلية ونظريّة Finetti

إلى الآن تعاملنا بصفة مستمرة- دون شرح- مع مسألة الاستقلالية التي حسبها- يكون متغيّران عشوائيّان هكذا- نسمّي- فيما سيأتي- الأعداد التي تتبع قوانين المصادفة مستقلان إذا كان يصدران عن ظواهر عشوائيّة تجعل "النتيجة المشاهدة بالنسبة للواحد ليس لها تأثير في الآخر، هذه فكرة فيزيائيّة و تعبيرها الرياضي الدقيق يكون كالآتي :

أولا لكلّ $n \geq 2$ نقول: إنّ الأحداث $E_1, \dots, \mathrm{E}_n$ مستقلّة إذا كـــان

$P(Ei_1, \cap \dots \cap Ei_k) = P(Ei_1) \dots . P(Ei_k)$ لكلّ المؤشرات التي تحقّق $1 \leq i_1 \leq \dots \leq \ i_k \leq n$

هذا يفرض $2^n - n - 1$

علاقة و نلاحظ (باستثناء n=2) أنّ استقلالية $E_1 \dots . \mathrm{E}_n$ ليست متحققة بمجرد تحقّق

$$P(E_1 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1) \dots P(E_n)$$

بصفة عامّة لكلّ $n \geq 2$ المتغيّرات العشوائيّة المعرّفة على فضاء الاحتمالات $X_1, \dots, X_n$ نفسها تكون مستقلّة إذا كان لكلّ $\mathrm{A}_1 . \dots . \mathrm{A}_n \subseteq R$ مجموعات قابلة للقياس (أي بحيث احتمال الأحداث $E_i = \{X_i \in A_i\}$ يكون معرّفًا) الأحداث $E_n = \{X_n \in A_n\}, \dots E_i = \{X_i \in A_i\}$.

مستقلّة. لنشرح هذا التعريف: نثبت أنّ التعريف المعطى للاستقلالية مماثل لفكرة الاستقلاليّة الفيزيائيّة لحدثين E وF. إذا كان الفضاء اتحادًا منتهيًا لأحداث ابتدائية متساوية الاحتمال نجد إذا أخذنا

العلاقات $0 < P(E)$ ، $P(F) < 1$

$$P(E) = \frac{\text{عدد الحالات حيث } E \text{ يتحقق}}{\text{عدد الحالات الكامل}}$$

$$P(F) = \frac{\text{عدد الحالات التي يحقق } F}{\text{عدد الحالات الكامل}}$$

أن نقول : إنّ F ليس لها تأثير فيزيائي في E يعود إلى قول إنّ القسمتين:

$$\frac{\text{عدد الحالات التي يتحقّق فيها} E \text{ ويتحقق فيها } F}{\text{عدد الحالات التي يتحقّق فيها} F}$$

و

$$\frac{\text{عدد الحالات التي يتحقّق فيها} E \text{ ولايتحقق فيها } F}{\text{عدد الحالات التي لا يتحقّق فيها} F}$$

هما متساويان . إذا استعملنا الاحتمال نكتب مساواة القسمين كالآتي :

$$\frac{P(E \cap F)}{\mathrm{P(F)}} = \frac{P(E \cap (\Omega - \mathrm{F}))}{P(\Omega - \mathrm{F})} = \frac{P(E) - P(E \cap F)}{1 - P(F)}$$

بتوحيد المقام نجد

$$P(E \cap F) - P(E \cap F)P(F) = P(E)P(F) - P(E \cap F).P(F)$$

و هذا مكافئ بالتأكيد للتصنيف " الرياضي" للاستقلاليّة للحدثين F و E

$$P(E \cap F) = P(E).P(F)$$

هكذا إذن الاستقلالية " الفيزيائيّة" لحدثين تكافئ مساواة احتمال تقاطعهما مع ضرب الاحتمالين للمجموعتين.

فيما سبق فرضنا أنّ $0 < P(F) < 1$. إذا كان $P(F) = 0$ أي F=$\emptyset$ و إذا كان $P(\bar{F}) = 1$ أي F =Ω حدثان لا يؤثر وقوعهما أو عدمه في الحدث E. نرى إذا كيف يمكن وصف الاستقلال الفيزيائيّة بالقاعدة

$$P(E \cap F) = P(E).P(F)$$

الحجة التي قدمناها لا تخلو من فرضيات ضمنية من بينها أن معرفة أن F يتحقّق لا يقدم أيّ معلومة عن تحقّق أو عدم تحقّق الأحداث الابتدائية التي تكونه، هذه الفرضية تمكّن من تعريف الاحتمال الشرطي بالقسمة (عدد الحالات المناسبة) يقسم على عدد الحالات الكامل.

مسألة الاحتمال الشرطي التي ذكرناها هي من أصعب المسائل في حساب الاحتمالات، تعرف- مع ذلك- كالآتي : بوساطة الأحداث، الاحتمال الشرطي$P(E/F)$ احتمال E إذا عرفنا F معطى بـ

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

هذه القاعدة صحيحة إذا كان$P(F) \neq 0$ لنكتب بصفة متناظرة مع الشرط$P(E) \neq 0$

$$P(F/E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

من هاتين القاعدتين نجد القاعدة المشهورة لـ Bayes التي تسمّى قاعدة المقلوبيّة

$$P(F/E) = \frac{P(E/F)P(F)}{P(E)}$$

أو تحت شكلها المتناظر $P(F/E).P(E) = P(E/F).P(F)$

باستثناء هذه القواعد الابتدائيّة لا نستطيع هنا أن نقدّم عرضًا تفصيليًّا للمسائل الرياضيّة و الفيزيائيّة المرتبطة بالشرطيّة. في ما يخص مسلّماتها نحيل إلى كتاب

Foundations of Probability San Fransisco A.Renyi Holden Day (1970)

التناول الرياضي للشرطيّة يحتاج إلى تقنيات دقيقة من نظريّة المقياس مثل نظريّة

Radon- Nikodym ما يصعب شرحه في مساحة صغيرة.

سوف نكتفي بسبب احتياجات ما سنطرحه بالمرجع التجريبي لمسائل الاستقلاليّة و الارتباط التي في النهاية يسهل فهمها في مبدأها.

سنقبل إذن- دون أشكال أخرى للعمليّة- مسألة الاحتمال الشرطي لمتغيّر عشوائي X إذا عرفنا المتغيّر العشوائيY. و هذا يعطي معنى للاحتمال الذي نرمز له :

$P(X \in A/Y$=y) أن يأخذ X قيمة في A إذا علمنا أن Y=y. هذا الاحتمال الأخير يمكن تأويله تجريبيًّا (على الرغم من أنّ هذه القاعدة ليست دائمًا صحيحة) كنهاية للتعبير

$$\frac{P(\{X \in A\} \cap \{y - \delta y < Y \leq y + \delta y\})}{P(y - \delta y < Y \leq y + \delta y)}$$

عندما تؤوّل δ_y إلى ٠

التوقّع الشرطي للمتغيّرX إذا علمنا أنّ Y=y يمكن تعريفه كتوقّع قانون الاحتمال الشرطي للمتغيّر X إذا علمنا Y=y

معتمدين على هذه التعريفات يصبح ممكنًا بناء متتالية غير متناهية متكوّنة من نسخٍ مستقلّة لمتغيّر عشوائي ذي قانون غير محدّد، هذه النقطة لها أهمّيتها النظريّة لأنّه لا يكفي أن نقبل الفكرة الفيزيائيّة لوجود مثل هذه المتتالية لاستنتاج أنّ لها معنى كشيء رياضيّ متناسق مع مسلّمات الاحتمال حسب Kolmogorov. (و هذا من نقاط ضعف مسلّمات Von Mises الذي يأخذ هذا البناء كمسلّم) هذه العمليّة تقع حسب المراحل الآتية:

١) عندنا في البداية قانون احتمال متغيّر عشوائي $X \in \mathbb{R}$ يمكن أن نأخذ كفضاء أحداث ابتدائيّة المجموعة R للأعداد الحقيقيّة يوجد الحدث $\{X = x\}$ مع x، نختار إثرها كجبر الجبر البوريلي $\beta = \beta(R)$ الذي يعرف كأصغر سيجما حقل يحتوي المجموعات المفتوحة والمغلقة، هذا ممكن إذا

علمنا في البداية الاحتمالات $P(a < x \le b)$ لكلّ $a \le b \in R$ نحصل على فضاء احتمالات (Ω,β ,p)

2) نعرف قوانين البعد المنتهي معرفين لكلّ $n \ge 1$ قانون الاحتمال المشترك لـ $(X_1 ....X_n)$ بالمساواة

$$P(X \in A_1 ,....,X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

لكل$A_1.....A_n$ في β. هذه العمليّة تعرف (من نظريّة التمديد لCaratheodory انظر الباب VI) لكلّ $n \ge 1$ احتمالا على$\Omega_n= R^n$ مصحوبا بالجبر $\sigma(\beta^n)$ كما في الباب الرابع $\sigma(\mathcal{A})$ ترمز إلى أصغر سيجما حقل يحتوي $\mathcal{A}$.

٣) بتكرار الخطوة ٢) لكلّ $n \ge 1$ نعرف احتمال P على الفضاء $\Omega_\infty = R^N$ حيث $N=\{1,2, , ,\}$ فضاء المتتاليات$(x_1,.. ...)$. جبر الأحداث القابلة للاحتمال هو هنا الاتحاد $\mathcal{A} = U_{n\ge}\sigma(B^n)$ بحيث إذا كان $A \in \mathcal{A}$ يوجد $n \ge 1$ حيث $A \hat{I} s(B^n)$ ما يسمح بالكتابة

$$P((X_1,X_2,...) \in A) = P((X_1 ,X_2,..,X_n) \in A) = P_n(A)$$

نكون بهذا قد عرفنا احتمالا على $\mathcal{A}$ بحيث إذا قيد على $\sigma(B^n)$ يتساوى مع P_n. نظريّة Caratheodory للتمديد (انظر الباب VI) تؤدي إلى التمديد و بطريقة وحيدة لتعريف احتمال P_∞ على $\mathcal{A}_\infty = \sigma(\mathcal{A})$.

نصل إلى $(\Omega_\infty ,\mathcal{A}_\infty,P_\infty)$ فضاء الاحتمالات المطلوب.

الخطوات الثلاث السابقة تؤدّي إلى تعريف احتمال جملي للعمليّة العشوائيّة $(X_1,....,X_n ..)$ يمكِّن من حساب للاحتمالات لأحداث تستدعي عددًا غير منتهٍ من عناصر المتتالية، بعض التفكير يبيّن منطقيّة وبساطة هذا المسار المنطقي الذي تتخلّله مرحلة صعبة وحيدة تخص التمديد الوحيد التي دعامتها نظريّة التمديد لـ Caratheodory.

تعرف النتيجة التي تحصلنا عليها باسم نظريّة التمديد لـKolmogorov. الطريقة- الموصوفة- هنا لبناء متتالية متغيّرات مستقلّة لها قانون الاحتمال نفسه، و يمكن استعمالها لتعريف قانون الاحتمال الجملي لأيّ متتالية متغيّرات عشوائيّة، مع الشرط الوحيد أن قوانين البعد المنتهي، أي القوانين P_n $(X_1 ,X_2 ....)$ تكون كلّها معرّفة و متناسقة.

لا تؤدّي نظريّة الوجود لـ Kolmogorov إلى بناء سهل إلّا إذا كانت المتغيّرات العشوائيّة مستقلّة، وسنقدم الآن أمثلة أخرى لبناء متتالية عشوائيّة لا متناهية بطرق مختلفة، في هذا الاتجاه يقدّم الوصف في الباب الخامس للعلاقات بين متتالية الألعاب قفا ووجه المرقمة ب ٠ و ١ و النشر الثناوي للأعداد $u \in [0,1]$

بناءَ سهلًا (نسبيًّا) لمتتالية عشوائيّة لا متناهية، لنذكّر أنّه إذا كانت U متغيّرًا عشوائيًّا ذا قانون احتمالي منتظم على $[0,1]$ أي أنّ $P(U \leq u) = u$ لكلّ $0 \leq u \leq 1$ النشر الثانوي لـ U $U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}$ فإنّه يقدم متتالية لا متناهية $(X_1, X_2, \ldots)$ لمتغيّرات عشوائيّة مستقلّة لها القانون نفسه، حيث $P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ لكلّ $n \geq 1$.

مثال آخر في الاتجاه نفسه: قدم في الباب VI إذا عرفنا متغيّرًا عشوائيًّا X يتبع مقياس Gauss على $[0,1]$ أي أن $P(X \leq x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}$ لكلّ $x \in [0,1]$. نشر X في كسور متّصلة تحت الشكل: $X = \cfrac{1}{X_1 + \cfrac{1}{X_2 + \ldots}}$ يعرف مع احتمال ١ متتالية $\{X_1, X_2 \ldots\ldots\}$ متغيّرات عشوائيّة قيمها في $N^* = \{1,2,3,\ldots\ldots\}$ و تحقّق لكلّ $n \geq 1$. و $k \in \mathbb{N}^*$ $P(X_n \geq k) = \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log 2}$. يمكن التحقّق من أنّ هذه المتتالية مستقرّة، بمعنى أنّه لكلّ $n \geq 1$ القانون المشترك ل(X_k, X_{k+1}, X_{k+n}) لا يتأثّر ب k و لكن المتغيّرات العشوائيّة ... X_1, X_2 ليست مستقلّة.

مثال آخر لبناء جمليّ لمتتالية عشوائيّة معطى بدوال Rademacher (1892-1969) :

هذه الدوال تكون متتالية $\{R_n(x), n \geq 0\}$ دوال للمتغيّر x في $[0,1]$ معرّفة كالآتي:

$$R_n(x) = \text{sgn}\{\sin(2^n \pi x)\}$$

إذا كان $u > 0$ $sgn\{u\} = 1$

إذا كان $u = 0$ $sgn\{u\} = 0$

إذا كان $u < 0$ $sgn\{u\} = -1$

دوال Rademacher قدّمت في H.A . Rademacher(1922)

(Math. Ann ,87, 112 - 138)

طبيعتها الاحتماليّة بيّنها الرياضي البولوني Hugo Dyonizy Steinhaus (1887-1972) في السنة نفسها H.D.Steinhaus (1922)

" الاحتمالات القابلة للعد و علاقتها بنظريّة المقياس" Fund. Math 4, 286-310 الدالة $R_0(x) = 1$ لكلّ $x \in [0,1]$ توضع على حدة. كما سبق نرمز ب U للمتغيّر العشوائيّ الذي قانون احتماله منتظم على $[0,1]$ أي يحقق $P(U \leq u) = u$ لكلّ $0 \leq u \leq 1$

المتتالية العشوائيّة المعرفة بالمساواة $X_n = R_n(U)$ لـ n=1 ,2,.... تكون متتالية متغيّرات عشوائيّة مستقلّة و لها القانون نفسه بحيث لكلّ $n \geq 1$

$$P(X_n = 1).P(X_n = -1) = \frac{1}{2}, n \geq 1$$

بلغة أخرى إذا اخترنا U بالمصادفة بين ٠ و ١ (حسب قانون احتمال منتظم في هذه الفترة) المتتالية $R_1(U), R_2(U)$ لها صفات متواحدة مع نتائج القفا و الوجه حيث ترقم النتائج الأرقام 1- و ١ . هذا التواحد يحصل باحتمال ١. يمكن أن نعترض على أنّ $R_n(x)$ تصبح ٠ بعد رتبة ما إذا كان $x = \frac{k}{2^n}$ و kعدد صحيح مع ذلك مجموعة الأعداد من هذا الشكل قياسها صفر و يمكن تجاهلها .

و بشكل عابر نذكر أنّ Rademacher درس تقارب المتسلسلات من الشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n R_n(U)$$

وأثبت أنّ التقارب يحدث باحتمال ١ ما يعني أنّ مجموعة x بحيث

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n R_n(x)$ تباعديّة مجموعة مقياس Lebesgue لها صفري إذا فرضنا $\sum_1^{\infty} c_n^2 < \infty$

وجب الانتظار حتى ١٩٢٥ لكي يثبت Kolmogorov و Khintchine العكس.

هذه النتائج ذات السبق ألهمت Kolmogorov نتيجة أساسيّة معروفة باسم نظريّة الثلاث متسلسلات التي تقدّم شروطًا كافية و لازمة لتقارب متسلسلات متغيّرات عشوائيّة مستقلّة

(A .N Kolmogorov (1928) Math Ann 99,309-319)

(A.N . Kolmogorov 1929 Math Ann102 ,484- 489)

من الأفكار الأساسيّة لحساب الاحتمالات فكرة التبديلية في حال لعبة، حيث عدد الاحتمالات الممكنة منتهٍ، ذلك هو مبدأ أنّ هذه الاحتمالات تكون قابلة مثل الكويرات المخلوطة في كيس ما يسوّغ فكرة إسناد احتمالات متساوية و اعتبار ذلك في أيّ تبيان. نقول عامّة إنّ المتغيّرات العشوائيّة

$\{X_i, i \in I\}$ حيثI مجموعة مؤشّرات (منتهية أو غير منتهٍة) قابلة للبديل إذا كان لكلّ مجموعة $\{i_1, \dots i_n\} \subseteq I$ مؤشّرات مختلفة. قانون الاحتمال المشترك لا يتأثر بخيارات معيّنة للمؤشرات $i_1, \dots, i_n$ كما سنرى تركيبة متتالية متغيّرات قابلة للتبديل و لا متناهية خاصة جدًّا، حيث لا تختلف كثيرًا عن الاستقلاليّة .

المثال الأبسط لمتتالية غير منتهٍة قابلة للتبديل معطى بالمتتالية.... Y_1, Y_2 لمتغيّرات عشوائيّة مستقلّة و لها القانون نفسه. مع ذلك يمكن بناء أمثلة أقل بساطة بسهولة. مثلًا لتكن Y متغيّرًا عشوائيًّا مستقلًّا عن المتتالية السابقة .... Y_1, Y_2 . المتتالية ..... $Y+Y_1, Y+Y_2$ تبقى أيضًا تبديليّة مع عدم استقلاليّة المتتالية، لكنّنا لا نبتعد عن حالة المتغيّرات المستقلّة. بالفعل القانون الشرطي للمتغيّرات

$$Y+Y_1, Y+Y_2 \dots$$

إذا علمنا أنّ Y= y هو قانون $y+Y_2, y+Y_1$ التي تمثّل متتالية مستقلّة لها القانون نفسه ، وإذا فرضنا أنّ $E(Y_i)=\mu$ موجودة فقانون الأعداد الكبيرة يُفرض باحتمال ١ أن

$$Y = -\mu + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (Y+Y_i)$$

تعبير يؤدّي إلى أن Y محدّدة كليًّا بمشاهدة قيم المتتالية $Y+Y_2, Y+Y_1$..

في ١٩٣٧ طوّر الرياضي الإيطالي Bruno de Finetti (١٩٠٦-١٩٨٥) ممثل مشهور للمدرسة الذاتية (انظر الباب لرابع) هذه الفكرة في إطار عام (B de Finetti 1937) " التوقّع قوانينه المنطقية و مصادره الذاتية "(Ann. Inst. Henri. Poincaré 7,1-68)

بإثبات النظريّة الآتية:

تكون متتالية لا منتهية $X_1, \dots, X_n$ لمتغيّرات قابلة للتبديل إذن و فقط إذا كانت مستقلّة شرطيًّا، أي أن يكون القانون الشرطي ل $X_1, \dots, X_n$ تحت شرط ما قانون متتالية عشوائيّة لمتغيّرات مستقلّة لها القانون نفسه. يجدر بنا هنا أن نبيّن نوعية الشرط المستعمل نضع لكلّ $x \in R$ و $n \geq 1$

$$\xi_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \le x\}}$$

حيث $I_A = 1$ اذا كان A متحققا و $I_A = 0$ اذا لم يتحقّق A و هي الدالة المؤشرة للمجموعة A . من الممكن إثبات باحتمال ١ أن متتالية الدوال $\xi_n(x)$ تتقارب بصفة منتظمة على R نحو نهاية (عشوائيّة) $\xi(X)$. اضافة الى ذلك القانون الشرطي ل $X_{n,}, \dots, X_1$ إذا علمنا $z(x)$ هو قانون متتالية متغيّرات عشوائيّة مستقلّة لها القانون نفسه .

الأهمية النظريّة لنتيجة B.Finetti كبيرة جدًّا، حيث إنها تبني علاقة وطيدة بين الاستقلاليّة و التبديليّة . من هنا إذا شاهدنا تحقيقًا خاصًّا لمتتالية غير منتهٍية و تبديليّة، فهذا يعود إلى تثبيت قيمة $x(x)$ ضمنيًّا لهذه التجربة و المتتالية المشاهدة يكون لها بالنسبة للمشاهد كلّ خصائص متتالية متغيّرات عشوائيّة مستقلّة لها القانون نفسه. لتوضيح هذه الخاصية نأخذ لعبة القفا و الوجه، و هذا يحقق متتالية ألعاب تبديليّة بمجرّد أن ترمى القطعة النقدية بالطريقة نفسها في كلّ مرة. هذا يقدم متتالية نتائج ليست مستقلّة في ما بينها إلّا أنّها مرتبطة بطريقة اللّعب.

نستطيع أن نحقّق متتالية ألعاب مختلفة لو كان هناك لاعب آخر يشارك في الرمي.

نحصل في هذا المثال على بيان كيف تتدخل كيفية اللّعب في متتالية تبديليه لا متناهية. شرطيًّا بالنسبة للاعب متتالية ألعاب قفا و وجه تكون إذن متكوّنة من متغيّرات مستقلّة لها القانون نفسه .

الفصل الثامن

قوانين الصفر أو الواحد للمتتاليات المستقلّة Hewitt–Savage و Kolmogorov, Borel–Cantelli مانوية قوانين الحظّ، المارتينجيلات

الوسيلة الأساسية لإثبات قوانين الأعداد الكبيرة هي تمهيدية Cantelli . Borel (١٩٠٩-١٩١٧) التي تنص أنّه إذا كانت $\{A_n, n \geq 1\}$ متسلسلة أحداث عندنا:

١) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ فإنه باحتمال واحد لا يوجد سوى عدد منتهٍ من الأحداث ضمن$\{A_n, n \geq 1\}$ متحقق في الوقت نفسه.

٢) إذا كان في حال العكس $\sum_1^{\infty} P(A_n) = \infty$ و بالإضافة كانت الأحداث $\{A_n, n \geq 1\}$ مستقلّة فإنه يوجد عدد غير منتهٍ من الأحداث المتحققة في الوقت نفسه و باحتمال واحد.

تمهيدية Cantelli . Borel مطبقة على الأحداث المستقلّة تنص على خاصية " الكل أو لا شيء". أي أنّه لا يوجد وضع بيني حيث للعدد $0 < p < 1$

عدد محدود من الأحداث $\{A_n, n \geq 1\}$ يتحقّق باحتمال p و عدد غير منتهٍ يتحقّق باحتمال 1-p لأنّه في الواقع ليس للمتسلسلة $\sum_1^{\infty} P(A_n)$ غير خيارين: إمّا أن تتقارب أو تتباعد. برهان التمهيديّة بسيط جدًّا.

إذا كان $\sum_1^{\infty} P(A_n) < \infty$ فإنّ $\sum_{m \geq n}^{\infty} P(A_n) \to 0$

إذا آلت n إلى∞ و لذلك $P(\cup_{m=}^{\infty} A_m) \leq \sum_{m \geq n} P(A_m) \to 0$ نستنتج أنّ $P\left(\lim\sup A_n\right) = P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} A_m) = 0$. في المقابل إذا كانت الأحداث$\{A_n, n \geq 1\}$ مستقلّة و تحقّق$\sum_1^{\infty} P(A_n) = \infty$ نجد

$$1 - P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} (\Omega - A_m)\right) = \lim_{k \to \infty} \pi_{m=n}^{k} \left(1 - P(A_m)\right)$$

$$\leq \lim_{k \to \infty} exp\left(-\sum_{m=n}^{K} P(A_m)\right)$$

و نستنتج أنّ $[P(\lim_{n \to \infty} supA_n) = 1]$

تمهيدية (E−Borel 1909) Borel−Cantelli ("عناصر نظريّة الاحتمالات " , F .Cantelli Paris
Hermann

Su due applicazioni di un teorema di G.Boole , Rendi conti della Acad . Naz .dei. lincei , 26, 39−45

هي من أول نظريات حساب الاحتمالات الذي تبيّن مسألة أنّ لمجموعة كبيرة من الأحداث النهائيّة المرتبطة بمتغيّرات عشوائيّة مستقلّة الاحتمال لا يكون إلا ٠ أو ١.

Francesco Paolo Cantelli (١٨٧٥-١٩٦٦) استعمل في برهانه في ١٩١٧ طرقًا استعملت سابقًا من طرفBorel في ١٩٠٩ لإثبات نسخة من نسخ القانون القوي للأعداد الكبيرة . أفكار Borel كانت مكتوبة بشكل أوليّ، و يرجع الفضل لـ Cantelli الذي وضعها في شكل يجعلها صالحة للاستعمال في إطار موسّع.
فكرة أنّه بصفة عامّة بعض الأحداث لا تكون إلّا مؤكّدة أو مستحيلة باحتمال واحد كتبت بطريقة واضحة و نهائيّة من طرف Kolmogorov

A.N. Kolmogorov (1933)Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung , Berlin, Springer .

كان Kolmogrov قد لاحظ

A.N.Kolmogrov (1929), Uber das Gesetz Der iterierten Logarithmus , Math, Ann 101, 126−136

A.N. Kolmogrov (1930) (CR. Acad .Sci Paris "في القانون القوي للأعداد الكبيرة" 191,910−930)

بأنّه بالنسبة لمتتالية متغيّرات عشوائيّة مستقلّة كلّما كان قانون ضعيف للأعداد الكبيرة صحيحًا يكون القانون صحيحًا في شكله القوي. مثلًا النسخة الضعيفة لتقارب المعدّلات هي لكلّ $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{=1}^{n}.\left(X_i - E(X_i)\right)\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

و النسخة القويّة تنص على أنّ $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - E(X_i)\right) \mid \to 0\right|\right) = 1$

نسمّي أحداث ذيل مرتبطة بمتتالية متغيّرات أحداثًا محدّدة بمشاهدة المتتالية كاملة و لا تتأثر بتغيير عدد منتهٍ من تلك العناصر . مثلًا الحدث

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i = \mu\right\}$$

حدث ذيلي حيث لا يتأثر بالقيم التي تأخذها $X_1,..,X_k$ و ذلك لكلّ $k \geq 1$ مثبتة.

نبني- بوضوح- مجموعة الأحداث الذيليّة بإدخال السيجما الحقل الذي نرمز له بالرمز

$\sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ أوّلًا

لكلّ الأحداث المشاهدة بعد n (أي أنّها توصف بمعرفة $(X_n, X_{n+1} \dots$). نعرف بعد ذلك السيجما حقل $\mathcal{A}_\infty$ للأحداث الذيليّة $\mathcal{A}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1} \dots)$ قانون ٠ أو ١ لـKolmogorov ينص أنّه بالنسبة لمتتالية متغيّرات عشوائيّة و مستقلّة $X_1, X_2 \dots$ لكلّ حدث ذيلي لا يكون احتماله إلّا ٠ أو ١ برهان هذه النتيجة العميقة جدًّا بسيط جدًّا.

يتمثّل البرهان في أن نتحقّق من أنّ حدثًا ذيليًّا $Q \in \mathcal{A}_\infty$ ينتمي حتمًا إلى كلّ $\sigma(X_n, X_{n+1} \dots)$

لذلك Q مستقل عن كلّ الأحداث المشاهدة المنتمية إلي $\sigma(X_n, \dots, X_{n-1})$

و هذا يؤدّي إلى أنّ Q مستقل عن السيجما حقل المولد بهذه الأحداث، أي

$$\sigma\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} \sigma(X_n \dots X_{n-1})\right) = \mathcal{A} \supset \mathcal{A}_\infty$$

و هذا يؤدّي إلى أنّ Q مستقلّ عن نفسه، و إثر مرور هذه المفاجأة أمام وضع غير معهود نلاحظ أنّ ذلك يعني

$$P(Q \cap Q) = P(Q) = P(Q)^2$$

و هذا لا يمكن إلّا إذا كان $P(Q) = 0$ او $P(Q) = 1$ نص قانون ٠ أو ١ لـ Kolmogorov يبين أهمية تناول سيجما حقل الأحداث في البراهين. إضافة إلى الأحداث الذيلية يمكننا أيضا أن نهتم بالأحداث اللاّ متغيّرة التي تتكون من أحداث A بحيث إذا تحقّق A $X_1=x_1 \dots X_n=x_n$ أيضًا يتحقّق لـ

$$X_1 = x_2, \dots X_n = x_{n+1}$$

حقل الأحداث القابلة للتبديل : التي تتكوّن من أحداث A تحقّق الآتي: إذا كان A متحققًا لـ

$X_1 = x_1 \dots, X_n = x_n$ فإنّ A متحقق أيضًا لـ $X_1 = x_{i_1}, \dots X_n = x_{i_n}$ لكلّ تبديل

$(1,\ldots,n)$ لـ $(i_1,\ldots,i_n)$

كمثال الحدث $\{X_{2n} \in A$ لكل n كبير$\}$ حدث ذيلي, و لكن ليس لا متغيّر . كذلك حدث مثل $\{\sum_{i=1}^{n} X_i \in A$ لكل n كبير$\}$ حدث قابل للتبديل, و لكن ليس ذيليًا. بعض التفكير يبيّن أنّ كلّ حدث لا متغيّر ذيلي و كلّ حدث ذيلي قابل للتبديل.

أضعف خاصيّة يمكن إدراجها للأحداث النهائيّة هي إذن خاصيّة القبول للتبديل، مع ذلك يبدو واضحًا أنّ هذه الخاصيّة مهمّة فقط في حالة المتتالية القابلة للتبديل، مهمة فقط في حالة المتتالية القابلة للتبديل ومن نظرية B. Finetti أيضاً في حالة متتالية متغيرات عشوائيّة ذات القانون نفسه و المستقلّة شرطيًّا.و من نظريّة B. Finetti (انظر الباب الثامن) متتالية المتغيّرات العشوائيّة ذات القانون نفسه و المستقلّة شرطيًّا. هذا يترك المجال للاعتقاد أن تمديد قانون ٠ أو ١ لـ Kolmogorov إلى حالة الأحداث القابلة للتبديل المرتبطة بمتتالية متغيّرات مستقلّة لها القانون نفسه.

(E. Hewitt and , L.J . Savage 1955) Hewitt et Savage

(symmetric measures on Cartesian products .TA.M.S 80,470- 501

أثبتنا أنّ هذه الخاصيّة صحيحة و أنّه إذا كانت $X_1 \ldots . X_n$ متتالية متغيّرات مستقلّة لها القانون نفسه فإنّ أيّ حدث قابل للتبديل على هذه المتتالية احتماله ٠ أو ١

(Edwin Hewitt (1920-1999) و Leonard Jimie Savage (1917-1971) احتماليّان أمريكيان).

النتيجة العامّة التي يمكن أن نستخلصها من هذا هي أنّه في مجمل نظريات النهايات الاحتماليّة علينا أن نتوقّع مشاهدة- في كلّ الحالات- قوانين قوية من الصنف "هذه الخاصية أو تلك صحيحة باحتمال ٠ أو ١" .ان هذه حالة عامّة ما يجعل أنّه تقريبًا لا يحدث أبدًا أن نحصل على نتيجة من النوع " هذه المتتالية أو تلك تتقارب نحو نهاية باحتمال $p\epsilon(0,1)$"

يمكن القول بشكل ما إنّ القانون الطبيعي لقانون الاحتمالات هو أن يولّد يقينًا في إطار حدوده الخاصة .على الرغم من أنّ قوانين ٠ أو ١ لـ Kolmogorov Hewitt – Savage يبقى منصوصًا عليها في الحالة الخاصة لمتتالية مستقلّة يمكن تمديدها في أغلب الحالات ذات الأهميّة، ما يعطي طابعًا كونيًّا لقانون ٠ أو ١. هذا يعبر عن خاصيّة مانوية لقوانين المصادفات (كثير من التأويلات الفيزيائيّة أو الأخرى قُدّمت لجعل هذا الاعتقاد المانوي قانونًا أساسيًّا للطبيعة.

لن ندخل في مثل هذا النقاش مكتفين بالنص الرياضي للقوانين. لقد ذكرنا سابقًا في البابIII مبدأ المارتنجيل. نعيد تناول هذه التركيبة في شكل مبسّط إذا كانت .. $X_1, X_2,$ متتالية عشوائيّة نقول إنها مارتنجيل إذا كان لكلّ $n = 2$,...

$$E(X_n / X_{n-1} .. X_1) = X_{n-1}$$

مارتنجيل سفلية إذا كان لكلّ $n = 2$,...

$$E(X_n / X_{n-1}, \dots . X_1) \geq X_{n-1}$$

مارتنجيل علوية إذا كان $E(X_n / X_{n-1} \dots . X_1) \leq X_{n-1}$ لكلّ $n = 2$,...

يمكن أن نحتفظ بالفكرة الحدسية أن المارتنجيل السفلية "تميل إلى الصعود" و العلوية " تميل إلى النزول. إذا كان $X_1, \dots X_n$ متتالية متغيّرات عشوائيّة مستقلّة لها القانون نفسه و التوقّع المنتهي نفسه $\mu = E(X)$ من السهل أن نرى أنّ $S_n = X_1 + \cdots X_n$ تعرف مارتنجيل سفلية إذا كان$\mu \geq 0$ و مارتنجيل علوية إذا كان $\mu \leq 0$ و مارتنجيل إذا كان $\mu = 0$. بالطريقة نفسها مبلغ كسب لاعب إثر n لعبة، إذا كان يلعب متتالية ألعاب مستقلّة ذات توقّع الكسب لصالح خصمه مارتنجيل علويّة. النتيجة الأساسية في هذه النظريّة هي نظريّة تقارب المارتنجيلات التي أثبتت في شكلها الأساسي من طرف Doobفي ١٩٤٠

(J.L .Doob1940)

"خصائص انتظام بعض مجموعات متغيّرات الحظ" (TAMS ,47,455–486) .هذه النظريّة تبيّن أنّ مارتنجيل تتقارب دومًا نحو نهاية محدودة، إذا كانت متتالية التوقّعات محدودة . فكرة الانطلاق للبرهان بسيطة جدًّا. نأخذ مارتنجيل سفليّة... T_1, T_2 (تجريبيا لها ميل للصعود) و نأخذ فترة محدودة

$0 \leq a \leq b < \infty$ من $R^+ = [0, \infty]$ نعرف β_n عدد التقاطعات الصاعدة بين ١ او n كعدد المرّات التي تمرّ فيها المتتالية $T_1, \dots, T_n$ من قيمة أقل أو تساويa إلى قيمة أكبر أو تساوي b. نثبت أن $bE(\beta_n) \leq E(T_n)$

بما أنّ T_n مارتنجيل سفليّة $E(T_n)$ غير متناقصة لذلك إذا كانت $E(T_n)$ محدودة فإنّ $\lim_{n \to \infty} E(T_n)$ موجودة و منتهية نستنتج أنّ العدد $\beta = \lim \beta_n$

عدد التقاطعات الصاعدة للفترة $[a, b]$ منتهٍ باحتمال واحد. بتغيير a و b نستنتج أنّه:

إذا كانت $T_1, T_2, \ldots\ldots, T_n$ مارتنجيل سفليّة موجبة بحيث$\sup E(T_n) < \infty$ فإن $\lim_{n\to\infty} \mathrm{T_n}$ موجودة و منتهية باحتمال واحد. بالإضافة :

$$\infty > \lim_{n\to\infty} E(T_n) \geq E(\lim_{n\to\infty} T_n)$$

هذه النتيجة تعمّم إلى أيّ مارتينجيل سفليّة $\mathrm{T_1, \ldots., T_n}$ بملاحظة أنّ

$$\sigma_n = max(T_n, 0)$$

هي أيضًا مارتنجيل سفليّة نستعمل كذلك مسألة أنّه إذا كانت S_2, S_1... مارتنجيل فإن ...$|S_1|, |S_2|$ تعرف مارتنجيل سفليّة موجبة و نستنتج نظريّة تقارب المارتينجيلات التي تنص على أنّه :

إذا كان $\mathrm{S_1}$, $\mathrm{S_2}$ ..مارتنجيل بحيث$\sup E(|S_n|) \leq K < \infty)$ فإنّ النهاية $\lim_{n\to\infty} S_n$ موجودة و منتهية باحتمال ١. بالإضافة النهاية تحقّق المتباينة $E(|lim S_n|) \leq K$. وراء كلّ هذه التطورات النظريّة في الظاهر, تختبئ فكرة اللّعب. تأوّل المارتنجيل السفليّة الموجبة بأنّها مبلغ الكسب في لعبة رابحة . نظريّة تقارب المارتينجيلات تبيّن أنّ هذا المبلغ يتقارب دومًا نحو نهاية ما عندما يبقى توقّعه محدودًا.

نستنتج أنّه في متتالية ألعاب بين لاعبين يملكان ثروتين محدودتين، و على شرط أن يبقى اللّعب متوازنًا من البداية إلى النهاية يكون اللّعب في صالح اللّاعب نفسه ، مع احتمال ١ بأن تنتهي اللّعبة دائمًا بإفلاس أحد اللاعبين.

لنبين قوّة الطرق التي أساسها المارتينجيلات، نذكر أنّه من الممكن استنتاج قانون الأعداد الكبيرة المعهود من نظريّة تقارب المارتنجيلات نأخذ $X_1, \ldots. X_n$ متتالية متغيّرات مستقلّة ممركزة $(E(X) = 0)$ و إذا وضعنا $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ المتتالية $S_1, \frac{S_2}{2}, \ldots \frac{S_n}{n}$ مارتنجيل. بتطبيق نظريّة تقارب المارتينجيلات نستنتج إذا كانت$E(X)$ موجودة أن $\frac{S_n}{n}$ تقاربية باحتمال ١ و النهاية لا يمكن إلّا أن تكون ثابتة و مساوية $E(X)$ من نظريّة ٠ أو 1 لـ Kolmogorov .

منذ ظهور أهميّة المارتنجيلات الراجع لـ1910−2004 Josef Leo Doob (انظر J.L.Doob "العمليّات العشوائيّة" (New.York, Wiley (1952) استعمال التقنيات المرتبطة تعمّم إلى حساب الاحتمالات إلى أن أصبح الوسيلة الأساسية. في الواقع أغلب قوانين الأعداد الكبيرة الكلاسيكيّة في حساب الاحتمالات يمكن إثباتها بفضل هذه الطرق

الفصل التاسع

النظرية المسرانيّة والطابع الكوني لتقارب معدلات المتتاليات المستقرة

النظريّة المسرانيّة الاحتماليّة هي دراسة تحويلات فضاء أحداث إلى نفسه تترك الاحتمال لا متغيّر. فكرة المسرانيّة ولدت بعيدا عن حساب الاحتمالات في دراسة الظواهر الميكانيكية .

إذا أخذنا نظامًا محافظًا- أي يتغيّر بطريقة معزولة عن الخارج, و لهذا يحافظ على طاقته دون ضياع - نستطيع أن نصف طابعه المحافظ بوساطة إحداثياته المعمّمة للموقع $x = (x_1, \dots x_N)$ إذا كان للنظام N درجة حريّة و عزم $p = (p_1, \dots p_N)$ إذا كان $H = H(x,p)$ يرمز للهاميلتونيان للنظام ممثّلًا الطاقة، تحوّل النظام مع الوقت إلى محكوم بالمعادلات الهاميلتونية

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i};\ \frac{dp_i}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial x_i} \qquad \text{و} \quad 1 \leq i \leq N$$

كمثال حركة نقطة ذات وزن (أو صلب نقطة كتلته m) يتعرّض إلى قوّتَي: توصف الجاذبيّة و الحركيّة في محور احداثيات عمودي بالمعادلات الجاذبيّة و الحركيّة توصف في محور إحداثي عمودي بالمعادلات.

١- الطاقة الجملية = {الطاقة الحركيّة} + {الطاقة الكامنة}

$$=\frac{1}{2}mv^2 - mgx$$

حيث v السرعة $=\frac{dX}{dt}$, x : الموقع العمودي

g: ثابت الجاذبية = ٩،٨١م/ث٢

٢)نضع في المعادلات السابقة $x_1 = x$ و $N = 1, p = p_1 = mv$ نتثبت من أنّ المعدلات الهاميلتونيّة متحقّقة بما أنّ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{-\partial(\frac{mv^2}{2})}{\partial(mv)} = v$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial x} = mg = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

حركة نقطة تحت تأثير الجاذبية

إذا تحول النظام يمكن أن نصفه بتحول نقطة R^{2N} $w = (x_1, \dots x_N;\ p_1, \dots p_N) \in$

تتغير في فضاء ذي 2N بعد و مع الوقت. إذا أخذنا تغيرات $w(t)$ بالنسبة إلى موقعها الأوليّ $w(0)$ التحويليّة $w(0)\to w(t)$ تعرف دالّة τ_t تتأثر بالوقت من الفضاء $\Omega=R^{2N}$ إلى نفسه معرفة كالآتي:

$$\tau_t: w(0) \in \Omega \dots . \to w(t) = \tau_t.\big(w(0)\big) \epsilon \Omega$$

طبيعة التحويليّة τ_t توضح بنظريّة Liouville الذي تثبت عدم تغيير مقياس Lesbegue في $\dots \Omega. = R^{2N}$ تحت هذا التطبيق. في المثال لنقطة ذات وزن نتثبّت من نظريّة Liouville في R^2 بملاحظة أنّ المعادلات الهاميلتونيّة للحركة تختصر بالنسبة لموقع أوليّ x_0 و سرعة أوليّة v_0 إلى

$$x = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + v_0 m v = m g t + m v_0$$

هكذا في المثال التحويليّة τ_t تعرف في R^2 كالآتي:

$$\tau_1 \binom{u}{v} = \begin{pmatrix} u + t\frac{v}{m} + \frac{1}{2} g t^2 \\ v + m g t \end{pmatrix}$$

تحويلة من R^2 إلى نفسه تحافظ بالفعل على مقياسLebesgue. دراسة الأنظمة الحافظة للطاقة يقابل إذن دراسة التحويلات التي ترتبط بالوقت من$\Omega = R^{2N}$ إلى نفسه، التي تحافظ على مقياس Lebesgue. من هنا جاء الاسم " النظريّة المسرانيّة "(الطاقة=ergos . في الاحتمالات، نبدأ بمتتالية مستقرة معرّفة كمتتالية متغيّرات ..... X_1, X_2 معرفة على فضاء الاحتمالات نفسه $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ حيث

$$\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} = \mathbb{R}^{\{1,2\dots\}}$$

نعرف تحويليّة تحافظ على الاحتمال بالتعريف

$$w \to \tau_1(w)$$

$$(x_1, \dots, x_n, ..) \circledR\ t_1(x_1, \dots, x_n ..) = (x_2, x_3, \dots x_{n+1}, \dots) \hat{I}\ W$$

العمليّة مستقرّة إذا كان قانون $(x_k, x_{k+1} \dots)$ مستقلًّا عن k هذا الطابع المستقر يوصف بأنّ التحويلة τ_1 تحقّق لكلّ $P\big(\tau_1(A)\big) = P(A)$, لكل $A \in \mathcal{A}$

أبسط مثال على متتالية مستقرّة معطى بمتتالية متغيّرات مستقلّة لها القانون نفسه. مثال آخر ذكر في الباب السادس معطى بالعناصر المتتالية للنشر في كسر متواصل لعدد بين ٠ و١. من متتالية مستقرّة أولى $\{Y_n, n \in z\}$ مؤشراتها $Z = \{0, \pm 1, \pm 2\ \}$ نبني بسهولة متتاليات أخرى مستقرّة بمعدلات متحركة من الشكل $X_n = \sum_{K=-M}^{M} a_k\, Y_{n-k}$ لكل $n \in z$

في حال وصف تحوّل سائل في حركة المعادلات الهاميلاتونية التي تصف النظام كدالّة في الوقت غير قابلة للاستعمال بسبب أنّها تدمج عددًا مرتفعًا من المتغيّرات (العدد نفسه للجزئيات التي تكوّن السائل) يستحيل فيزيائيًّا تحديد كلّ مواقعها الأوليّة. إذا أردنا مع ذلك وصف النظام إجماليًّا يأخذنا هذا إلى قياس كميّات مرتبطة بالظاهرة. إذا كانت $w \epsilon \Omega$ ترمز للنقطة الجارية للنظام نهتم بالدّالة الحقيقيّة $X(w)$ المحدّدة بهذه النقطة بما أنّ $X(w)$ ليست قابلة للمشاهدة مباشرة نبحث عن إمكانيّة حساب "قيمة متوسّطة " بتعبيرات مثل:

$$\frac{1}{n}\left\{X(w) + X(t\,(w) + \ldots X(t^{\,n-1}(w))\right\}$$

التي تمثل معدلات مشاهدات مختارة على فترات منتظمة من الوقت. اضطر الفيزيائيّون إلى افتراض أنّ المعدّلات السابقة المحسوبة بدلالة الوقت تتقارب نحو نهايات متساوية مع ما نحصل عليه عندما- في لحظة معطاة- نحسب المعدلات نفسها لكلّ المكونات الفرديّة للسائل.

ما ذكرناه الآن ببساطة هو ما يسمّيه الفيزيائيّون " الفرضية المسرانيّة". أهميّتها تكمن في مسالة أنّه في أغلب الاستنتاجات التي تؤدّي إلى إثباتها تؤكّدها التجربة. إذن هي نظريّة لها نجاعة حيث النموذج يتأقلم مع المعطيات. مع ذلك، و بعيدًا عن كلّ تناول فيزيائي، و بعيدًا عن ميكانيكا السوائل نلاحظ أنّ هذه الفرضيّة تعود في النهاية إلى تقرير تقارب المعدلات الاحتماليّة من نوع $\frac{1}{n}\left\{X(w) + X(t\,(w) + \ldots X(t^{\,n-1}(w))\right\}$ حيث $\Omega \to .\Omega. \to \tau$ تحويلة تدع غير متغيّر قانون الاحتمال في الفضاء $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ و الرمز $X(W)$ متغيّرا عشوائيا محدّدا بقيمة الحدث الابتدائي $w\ \epsilon\Omega$. نلاحظ مع هذه الكتابة أن الفرضية المسرانيّة مكافئة لقول أن المتتالية المستقرة للمتغيّرات العشوائيّة $\{n \geq 1, X(\tau^n(w))\}$ تحقّق قانون أعداد كبيرة (بمعنى التقارب للمعدلات نحو نهاية) .

تحت أي شروط يكون لنا قانون نهاية؟ إذا كان عندنا $X_1, X_2, \ldots$ متتالية عشوائيّة مستقرّة معرفة على فضاء احتمالات $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ من الممكن تعريف, لهذه المتتالية, السيجما حقل للأحداث اللا متغيّرة (انظر الباب الثامن)

حدث A من$\mathcal{A}$ لا متغيّر و فقط إذا كان $\tau(A) = A$. لنذكر (انظر الباب VIII) أنّ أي حدث لا متغيّر هو حتمًا حدث ذيلي. النظريّة الأساسيّة المسرانيّة لمثل هذه المتتالية أثبتها Birkhoff في ١٩٣١

(Proof of Ergodic theorem Proc .Nat. Acad.Sci . Etats Unis 17)

و عمّمها من بين آخرين (١٩٣٣) Khintchine (1945−47) Riesz دون أن ننسى أعمال Dunford,Kakutani, Yosida , VonNeumann

. Doob و Miller و Hartman,Ryll – Nardzewski

النتيجة تكتب، لمتتالية مستقرّة $\{X_n n \geq 1\}$ مع الشرط $E(X)(X = X_1)$ موجود أنّه باحتمال واحد

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ \sum_{i=1}^{n} X_i \ = E(X/\mathcal{A}_I)$$

النهاية تساوي التوقّع الشرطي$E(X/\mathcal{A}_I)$ للمتغيّر $X = X_1$ ، إذا عرفنا السيجما حقل $\mathcal{A}_I$ للأحداث اللامتغيّرة على $\{X_n n \geq 1\}$. في حال كانت متغيّرات المتتالية تقاربيًّا مستقلّة، أي تحقّق لكلّ A وB في $\mathcal{A}$، $P\big(A \cap \tau^n(B)\big) - P(A)P(B) \to 0$ عندما تؤول n إلى ∞ يمكن أن نثبت أنّ أحداث $\mathcal{A}_I$ تحقّق قانون ٠أو ١ في هذه الحالة$E(X/A_I) = E(X)$ باحتمال ١, و نجد قانون الأعداد الكبيرة الكلاسيكي.

الطرق المستعملة في النظريّة المسرانيّة خاصة جدًّا, و تجعل من هذا المجال جزءًا منفصلًا من حساب الاحتمالات. النتيجة التي ذكرناها تعطي فكرة جزئيّة جدًّا عن النتائج العميقة التي أمكن استنتاجها من الفكرة المسرانيّة الأوليّة. يبقى أنّه من اللافت للانتباه- حيث يثبت تحت الشرط أنّ التوقّعات للمتغيّرات منتهية- أنّ التقارب للمعدلات يبقى دائمًا صحيحًا لمتتالية مستقرّة. لمزيد التفاصيل انظر:

M. Loeve (1977) Probability Theory , Springer

الفصل العاشر

قوانين اللوغاريتم المكرر
Hartman – Wintner و, De Strassen

لتكن.. X_1, X_2 نسخ مستقلّة من المتغيّر العشوائي X . تحت شرط وجود العزم من الدرجة ٢ لنعرف المعدل μ و التباين σ^2 للمتغيّر X كالآتي :

$$\mu = E(X), \sigma^2 = var(X) = E((X-\mu)^2)$$

نظريّة النهاية المركزيّة (انظر (Math. Zeit 15, 211–225 (1922) (J.Lindeberg و

(W .Feller 1935) Math Zeit 40, 521. 559)

تبيّن أن دالّة التوزيع $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$ حيث $\sigma > 0$

تتقارب بانتظام نحو دالّة التوزيع $\phi(x)$ لقانون عادي N(0,1) أي $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}$

لنثبت $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ و نرمز بالرمز v_ε المتغيّر العلوي للقانون العادي $N(0,1)$ المعرف كالثابت الوحيد الذي يحقّق $\phi(v_\varepsilon) = 1-\varepsilon$. كنتيجة مباشرة لنظريّة النهاية المركزيّة نجد أنّه لكلّ $0 < \varepsilon < 1$ يوجد n_ε بحيث لكلّ $n \geq n_\varepsilon$ عندنا

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - u\right| \geq \frac{C_\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \leq \varepsilon$$

حيث C_ε ثابت موجب يمكن أن يأخذ مساويًا لـ $\sigma v_{\varepsilon/4}$

هذا يبين أن سرعة التقارب للقانون الضعيف للأعداد الكبيرة لـ Bernoulli هو $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ و النتيجة هي الأمثل، حيث لا يمكن أن توجد سرعة أكبر لهذا التقارب.

و بصفة أوضح النتيجة تبيّن أنّه لكلّ $0 < \varepsilon < 1$ و كلّ $n \geq n_\varepsilon$ يوجد حدث E_n, ε بحيث $P(E_n, \varepsilon) \geq 1-\varepsilon$ و على E_n, ε عندنا

$$\left|\frac{1}{n}\sum X_i - \mu\right| \leq \frac{C_\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

ماذا يمكن القول فيما يخص سرعة التقارب للقانون القوي للأعداد الكبيرة ؟ نتوقّع بصفة طبيعيّة سرعة تقارب أبطأ من $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$حيث إنّ هذه السرعة لا تتحقّق إلّا على E_n, ε الذي احتماله أقل من واحد . كما أسلفنا في الباب الخامس المسألة أجاب عنهاKhintchine في ١٩٢٣م في الحالة الخاصة لمتغيّرات Bernoulli التي تحقّق $p = P(X = 1) = 1 - P(X = 0)$ و$p \in (0,1)$. نتيجته تبيّن أنّ التقارب باحتمال ١ هو على الشكل $O\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right)$

كان لا بدّ من الانتظار حوالي ٢٠ سنة من الجهد حتى يتوصل

Aurel Wintner وPhilip Hartman في ١٩٤١م إلى نتيجة عامّة (انظر K. L Chow, H.Teicher (1988) , Probability ,Theory ,NewYork Springer .Chow .Kلمزيد من التفاصيل)

حتى نقدّم النتيجة نذكّر بالتعريفين الكلاسيكيين :

$$\lim_{n\to\infty} sup u_n = \lim_{n\to\infty} \begin{Bmatrix} sup u_m \\ m \geq n \end{Bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} inf u_n = \lim_{n\to\infty} \begin{Bmatrix} inf u_n \\ m \geq n \end{Bmatrix}$$

قانون اللوغارتم المكرر P.Hartman و Wintner (1941) (A.J .M 63 ,169-176)

يبين مع المعطيات المذكورة أنّه باحتمال١

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\sigma \log\log n}} \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right\} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} inf \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\sigma \log\log n}} \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right\} = -1$$

هذا القانون المعروف باسم قانون اللوغاريتم المكرّر بسبب الدالة

$\log\log n = \log(\log n)$ يظهر خصائص مميزّة للسلوك النهائي للمجموع الجزئي $S_n = X_1 + \cdots X_n$

من الدرجة n من المشاهدات. مثلما هو الحال في نظريّة النهاية المركزية، في قانون اللوغاريتم المكرّر تذبذبات S_n لا تتأثر أساسًا إلّا بكمي μ (متوسّط التوقّع) و σ^2 (التباين) "متجاهلة"" باقي خصائص توزيع X. من ناحية أخرى قانون اللوغاريتم المكرّر يثبت أنّه باحتمال ١ المجموع الجزئي الممركز $S_n - n\mu$ يقطع عدد غير منتهٍ من المرّات المستوى ٠ و في الوقت نفسه يقطع عددًا غير منتهٍ من المرّات لكلّ $0 < \varepsilon < 1$ مثبتة المستويات القصوى $\mp(1-\varepsilon)\sigma\sqrt{2n\log\log n}$

وجب الانتظار ٢٠ سنة أخرى بعد أعمال Hartman و Wintner حتى مكّن التطور العلمي من فهم أفضل للتركيبة العميقة لذبذبات المجموع الجزئي $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ بمقارنة هذه الذبذبات بذبذبات الحركة البراونيّة بفضل مبادئ اللاتغير. قبل ذكر هذه النتائج يجدر أن نعيد الحديث عن الحركة البروانيّة المذكورة في الباب الرابع أو عن تمثيلها الرياضي عملية Wiener Levy الأشياء العلمية سميت هكذا احتراما لـ Paul Levy (1886–1971) و Norbert Wiener (1894–1964).

إذا طلبنا من كثير من الرياضيّين و الفيزيائيين تعريف عمليّة Wiener، لوجدنا كثيرًا من الأجوبة المختلفة حيث هناك طرق عديدة لتحقيق هذه العمليّة. عمليّة Wiener دالّة عشوائيّة بحيث لكلّ خيار $0 \le t_1 \le \cdots .. \le t_n$ الزيادات $w(t_1) - w(0) \ldots, w(t_n) - w(t_{n-1})$ تعرف متغيّرات عشوائيّة مستقلّة تتبع قوانين عادية ذات الوسطاء المعرفة بـ :

$$, E\big(w(s)w(t)\big) = mim(s,t), s,t \ge 0 E\big(W(t)\big) = 0$$

$$E((w(t) - w(s))^2) = |t - s|$$

استقلاليّة الزيادات لعملية Wiener على فترات متتالية تسمح بإعادة تعريفها إلى التعريف على فترة. يكفي أن نوضح الخصائص للعمليّة $w(.)$ على $[0,1]$ لكي نستنتج الخصائص على الفترة $[0,\infty]$. يمكن إذن أن نصف $\{w(t), 0 \le t \le 1\}$ كمتغيّر عشوائي ذي قيم في الفضاء$C[0,1]$ فضاء الدّوال المتّصلة على$[0,1]$. هذا الفضاء مصحوب بتوبولوجيا التقارب المنتظم فضاء متّجهات معيّر و كامل (فضاءBanach). إذا أصحبناه بالسيجما حقل البورالي β أصغر سيجما حقل يحتوي المجموعات المفتوحة و المغلقة قانون احتمال $W(t)$ على $(C[0,1], B)$ يعرف دون صعوبة تقنية, و يمثّل مقياس Wiener. من الممكن أيضًا تعريف عملية Wiener بالنشر في متسلسلة دوال متعامدة عواملها عشوائيّة. هذا النشر المسمّى نشر (Karhunen–Loeve) معطى على $[0,1]$بالمتسلسلة (المنتظمة التقارب باحتمال ١)

$$0 \le t \le 1 \quad w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\{(k-1/2)\pi\}} \sqrt{2} \sin((k-1/2)\pi t)$$

حيث $Y_1, ... Y_n$ متتالية متغيّرات عشوائيّة مستقلّة ذات قانون واحد$N(0,1)$ ممركزة و مختصرة. الفيزيائي سوف يختار القول إن عملية Wiener هي تقريبًا ما نحصل عليه في حركة براونيّة مسقطة، أي بلغة أخرى $w(t)$ يتغيّر، باختصار، مثل$S_{[nt]}$ حيث $[u]$ الجزء الكامل منu و $S_n = X_1 + \cdots X_n$ مجموع جزئي لمتغيّرات صغيرة عشوائيّة مستقلّة كلّ منها توقّعه صفر و تباينه ١.

على الرغم من أنّ هذا التعريف تنقصه الدقّة, و أنّ الفكرة التي وراءه قديمة حيث استعملت بنجاح من طرف Einstein (1905) الذي وضعه في الشكل الرياضي, و استعمله كوسيلة قويّة لدراسة المتتاليات العشوائيّة فإنه لا يعود لأكثر من عقود عدة.

في ١٩٦٤ ملهما بأعمال الرياضي الروسي (1930)Anatoly Volodymyrovych Skorohod قدم V .Strassen برهانًا مميزًا لقانون اللوغاريتم المكرر مستعملا تقنية جديدة جدًّا للمقاربة القويّة (V. Strassen (1964) « An invariance principle for the law of iterated Logarithm » Z.Wahrsckeinlichkeitstheorie 3,211−226

طريقة Strassen تتمثّل في بناء عمليّة Wiener $w(t)$ على فضاء الاحتمال نفسه (الذي يمكن تكبيره لجعل العمليّة ممكنة) الذي تعرّف عليه المتتالية الأوليّة. إذا كانت X_1, X_n ... متغيّرات عشوائيّة مستقلّة لها القانون نفسه حيث $V(X_i) = \sigma^2 = 1 \; et E(X_i) = \mu = 0$ أثبت Strassen أنّه يمكن بناء عمليّة Wiener $w_{(.)}$ بحيث باحتمال ١ حين تؤول t إلى ∞

$$\left|S_{[nt]} - mt - s\, w(t)\right| = O(\sqrt{t \log\log t})$$

برهان قانون اللوغاريتم المكرر لS_n يتبع بديهيا من أنّه صحيح بالنسبة لعملية Wiener. في نفس البحث في ١٩٦٤ أثبت V. Strassen شكلا داليًّا لقانون اللوغاريتم المكرّر. باستعمال الرموز نفسها يأخذ متتالية الدوال

$$f_n(t) = \frac{S_{[nt]} - \mu t}{6\sqrt{2n \log\log n}}, 0 \leq t \leq 1$$

يبين أنّه، باحتمال ١ كلّ متتالية جزئيّة $[f_{nk}, k \geq 1]$ من $\{f_n, n \geq 3\}$ تحتوي متتالية جزئيّة متقاربة بانتظام على$[0,1]$ نحو نهاية f . المجموعة، التي نرمز لها بـ S، لكلّ النهايات المحصول عليها بهذه

الطريقة لها بناء متميز. هي مجموعة كلّ الدوال المتصلة مطلقًا على $[0,1]$ و التي تحقّق $f(0)=0$ و مشتقاتها $f'(t)$, حسب تعريف Lebesgue, تحقّق المتباينة $\int_0^1 f'^2(t)dt \leq 1$

هذه النتيجة تبيّن، بلغة أخرى، أن المجاميع الجزئية "من بعيد" تتذبذب قريبًا من مجموعة نهاية لدوال غير عشوائيّة، معرفة تمامًا بهذه القواعد. تطبيق خارق للعادة لهذه القواعد يؤدّي إلى الحصول على مجموعة كبيرة من القوانين النهائيّة. نأخذ لهذا الغرض دالّة $\theta \quad f \to \theta(f)$ التي تسند لكلّ دالّة محدودة f على $[0,1]$ قيمة عدديّة. نفرض أن θ متصلة بالنسبة لتبولوجيا التقارب المنتظم .

كنتيجة لقانون اللوغاريتم المكرر الدالي ل Strassen نجد أنّه باحتمال واحد

$$lim_{n\to\infty} \sup \theta(f_n) = sup\theta(f) \quad f \in S$$

نجد بهذه الطريقة عددًا كبيرًا من قوانين الأعداد الكبرى مثل: عدد الدوال θ و حساب الجانب الأيمن من المعادلة السابقة يحصل عليه بطرق تحليليّة بحتة (حيث ليس هناك احتمال) مرتبطة بالإطار العام لحساب التغيّرات.

طرق Strassen منذ ذلك الوقت طوّرت في اتجاهات مختلفة باستعمال مبادئ لا تغير أو مقاربات قويّة. هكذا إذا فرضنا أنّ $E(exp(tX_1)) < \infty$ لكلّ ϵ >ltl ϵ صغير بما فيه الكفاية، فالرياضيّان المجريان Tusnadyو Kolmos, Major أثبتا في ١٩٧٥-١٩٧٦ أنّه يمكن مقاربة $S_{[nt]}$ بعملية Wiener مع خطأ منتظم في tفي $[0,1]$ لا يتجاوز Clogn، باحتمال، ١ و C>0 ثابت مناسب .هذه الشروط متحقّقة لمتغيّرات Bernoulli. لهذا في حالة $P(X_1=1)=p$

$P(X_1=0)=1-P$نستطيع مقاربة S_n بـ$np+\sqrt{p(1-p)}w(n)$ بخطأ درجته $O(\log n)$ (إذا آلت n إلى∞ باحتمال ١). نحيل لمزيد من التفاصيل إلى:

M.Csorgo an P.Revesz 1981" Strong approximations in Probability and Statistics"

* Academic Press 1981 . و كذلك للكتاب

G.Shorack et J.A.Wellner (1986) Empirical processes With Applications to Statistics ,New York , Wiley

الفصل الحادي عشر

قوانين أخرى للأعداد الكبيرة استقرار القيم العظمي العاديّة نظريّة Glivenko–Cantelli

تقارب المعدّلات ليس النظريّة الوحيدة المميزة لحساب الاحتمالات، و نتائج مثل قوانين ٠ أو ١ لـ Kolmogorov و Savage– Hewitt تدفع للاعتقاد بوجود كمًّا آخر من " قوانين أعداد كبيرة " تصف سلوكيّات مؤكّدة للمتتاليات العشوائيّة.

من بين الإحصاءات المفيدة التي يمكن القيام بها على متتالية متغيّرات عشوائيّة مستقلّة ذات القانون نفسه $X_1, \dots X_n$ ، إضافة إلى المعدلات التي -كما رأينا- تتقارب باحتمال واحد، نحو التوقّع المشترك $E(X)$ إذا كان منتهيًا، يجب أن نذكر بالدرجة الأولى القيم القصوى

$Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ و $Y_n = min\{X_1, \dots, X_n\}$

إذا كان معروفًا منذ Gauss et Laplace أنّ توزيع المعدّلات حول التوقّع يؤول إلى التوزيع العادي إذا كان التباين للمشاهدات منتهيًا، فإننا لا نعلم- إلّا نادرًا أنّ القيم القصوى تقاربيّة لمعظم القوانين البسيطة المعروفة (باستثناء التوزيعات المتقطعة) نحو قوانين نهاية (يعبّر عنها بالنسبة للقيمة القصوى $Z_n - \frac{b_n}{a_n}$

بتغيير مناسب للسلم و التقارب يكون نحو التوزيع لمتغيّر عشوائيZ)

- قانون Frechet

$$a > 0 \quad P(Z \leq x) = \varphi_a(x) = \exp(-x^{-a}) \quad x > 0$$

- قانون Weibull

$$a > 0 \quad P(Z \leq x) = \psi_a(x) = \exp(-(x)^{-a}) \quad x < 0$$

- قانون Gumbel

$$P(Z \leq x) = exp(-e^{-x}) \quad x \in \mathbb{R}$$

هذه النتيجة وضعت في شكلها النهائي في ١٩٤٣ من طرف الرياضي الروسي
Boris Vladimirovitch Gnedenko(1912−1995)

« sur la distribution limite du maximum d’une serie aleatoire Ann Math , 44,423−453

يمكن الرجوع لمزيد التفاصيل إلى: المونو جراف 1987 J.Galambos The Asymptotic Theory Of Extreme Order Statistics (1981), Malabar Florida , Krieger

و كتاب NewYork Wiley (1981), « Order statistics » H. David

لنتناول الحالة الخاصة للأكابر الجزئيّة لمتتالية عادية $X_1, \dots, X_n$ حيث المتغيّرات العشوائيّة مستقلّة، و ذات القانون نفسه العادي الممركز والمختصر $N(0,1)$، حيث لكلّ $n \geq 1$

$$P(X_n \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$$

نجد إذن كتطبيق للنظريات النهاية إذا كان$Z_n = max(X_1, \dots X_2)$ فإن

من غير المتوقّع أن يظهر $\log 4\pi$ هنا. من ناحية أخرى العامل$\sqrt{2\log n}$ يؤدّي إلى أنّ المتتالية تتركز بالمقاربة على المتتالية للثوابت

$$c_n = \sqrt{2\log n} + \frac{\log\log n + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{2\log n}\left\{Z_n - \sqrt{2\log n} + \frac{\log\log n + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log n}}\right\} \leq x\right) = \exp(-e^{-x}), x \in R$$

بطريقة أوضح يمكن أن نثبت أنّه لكلّ $0 < \varepsilon < 1$ و مع احتمال واحد لكلّ n كبير بما فيه الكفاية، الحصر

$$\frac{(1-\varepsilon)\log\log n}{2\sqrt{2\log n}} \leq Z_n - \sqrt{2\log n} \leq \frac{(1+\varepsilon)\log\log n}{2\sqrt{2\log n}}$$

هذه النتيجة هي أفضل ما يمكن الحصول عليه بالمعنى أنّه غير متحقق إذا كان $\varepsilon = 0$ ينتج عن هذامباشرة أنّه باحتمال ١

$$\lim_{n\to\infty} \{Z_n - \sqrt{2\log n}\} = 0$$

مثل هذه النظريّة قد تبدو كتناقض أنّها تسمح بالفعل- إلى حدّ - ما بالتنبؤ بالقيم الفرديّة المتتالية $X_1, \dots\dots \quad X_n, \dots$بعد درجة معيّنة n من المشاهدة. إذا كانت n أكبر n_0 من الذي من بعده عندنا باستمرار مثلًا $|Z_n - \sqrt{2\log n}| < 0.01$

نستطيع التنبؤ- بكل تأكيد- أنّه ما بين اللحظة n للمشاهدة واللحظة n+k المعرفة بالمساواة

$$\sqrt{2\log n + k} - \sqrt{2\log n} = 0{,}02$$

سوف يكون- حتمًا- أحد عناصر المتتالية $X_n, \ldots, X_{n+k}$ قد تجاوز المستوى$\sqrt{2\log n}$. نستطيع المخاطرة على حدوثه مع احتمال الربح مساو لـ 100%.

لكن بما أنّ متغيّرات المتتالية مستقلّة، يجب أن يكون مستحيلًا التكهّن بمثل هذا الحدث و كذلك تأكد الربح يبدو مشبوهًا بصفة طبيعية. في الواقع ليس هناك تناقض حيث إن المخاطرة صحيحة فقط في حال n أكبر من n_0. هذا الشرط يؤثر على تحقّق المتتالية و يسمح بتنبؤ ليس له قيمة مؤكدة بدونه.

مثل هذه الأمثلة تبيّن أنّه ليس عبثيا أن نبحث عن قوانين أعداد كبيرة تؤدّي "بعد رتبة معينة من المشاهدة"، باحتمال ١، إلى التنبؤ بسلوك العناصر الفردية لمتتالية عشوائيّة. لكن بعض التفكير (انظر نتائج الباب الآتي) تبيّن أنّه من الادعاء الاعتقاد أنّه يمكن بناء إستراتجية رابحة في اللّعب على مثل هذه الخواص. فعلا نعوّض حدسية (n تتجاوزn_0) بيقين (مشاهدة بعض القيم القابلة للتوقّع إذا كانت المخاطرة قد كسبت).

علينا أن نكون قادرين على تقييم خطر الحدسيّة (المقاسة هنا باحتمال أن n يتجاوز n_0) لتحديد ما إذا كان " اللّعب تسوّغه الغنيمة" أم لا.

القانون العادي ليس التوزيع الاحتمالي الوحيد الذي بالنسبة له القيم القصوى لمتتالية عشوائيّة من المتغيّرات المستقلّة، ذات القانون نفسه، تحقّق قانون نهاية، باحتمال ١، من الأصناف المذكورة. القيم القصوى $Z_n = max\{X_i, \ldots X_n\}$التي تحقّق$Z_n - b_n \to 0$ تسمّى مستقرّة (المتتالية الثانية هنا غير عشوائيّة و تختار بعناية).

كانت موضوع أعمال عديدة انظر(1958)Geffroy و(1973) Resnick and Tomkis

مثال آخر غريب لقانون الأعداد الكبيرة يرجع إلى

Erdosو Renyi (J.Erdos et A.Renyi(1970)) « On a new law of large numbers » Journal d'analyse mathématique 22,103-111

هؤلاء الكتّاب يأخذون متتالية متغيّرات عشوائيّة مستقلّة، ذات القانون نفسه، بحيث تكون الدالة $\phi(t) = exp(tX_i)$ منتهية لكلّ $|t| < \varepsilon$ مع $\varepsilon > 0$عدد صغير بما فيه الكفاية. يهتمون بسلوك التعبير

$$M_n(k) = max\{S_{m+k} - S_m\,, 0 < m \leq n - k\}$$

في الحالة الخاصّة $[c\log n]$ $c > 0, k =$ ثابت $S_0 = 0$ و $S_n = X_1 + \cdots + X_n, n \geq 1$. كما في السابق هنا $X_n, \ldots, X_1$ متغيّرات عشوائيّة مستقلّة، لها القانون نفسه. القانون الجديد للأعداد الكبيرة لـ Erdos et Renyi يبين أنّه، باحتمال١، عندما تؤول n إلى ∞ ,

$M_n([c\log n])|([c\log n]) \to \alpha$ حيث $\alpha > E(x)$ هي حلّ المعادلة $exp\left(-\frac{1}{c}\right) = inf\{\emptyset(t)e^{-t\alpha}\}$. هذه النتيجة تبدو نظريّة جدًّا للقارئ الغير المتعود .مع ذلك ليس من الصعب استنتاج نتائج تأخذ شكلًا ليس بعيد المنال. مثال لهذا التطبيق نحصل عليه في حالة خاصّة للعب القفا (المرقم ٠) أو الوجه (المرقّم ١) مفترضين أنّ المتغيّرات تحقّق

$P(X=1)=1-P(X=0)=p$, $0<p<1$ نستنتج من نظريّة Erdos و Renyi، بثمن حساب ابتدائي نسبيا، بأن متتالية Ln للمتسلسلات المتتالية للوجه المشاهدة من بين n مشاهدة أولى$X_1,\ldots\ldots,X_n$ هي بحيث، باحتمال ١، إذا آلت n إلى∞ $\frac{\frac{Ln}{\log n}}{-\log p}\rightarrow 1$

لهذا نستطيع التنبؤ بطريقة دقيقة نسبيا بعدد " التمريرات الرابحة " (انظر لمزيد التفاصيل P.Deheuvels et L .Devroye (1987) Annals of Probability (1363–1386)

مثلًا للعبة n مرة قفا ووجه نجد توقّع ٦٤،٦ أي تقريبًا 7 بالمقاربة للأعداد الصحيحة بالنسبة إلى Ln. علينا إذن أن نتوقّع في مكان من متسلسلة

المشاهدات $X_1,X_2\ldots\ldots X_n$ سلسلة من ٧ (تقريبًا) وجوه متتالية .نلفت الانتباه إلى أنّ قانون احتمال Ln هو بسيط نسبيا انظر ; P.Erdos P.Révesz

“On the length of the longuest head–run” Topics in information theory .Coll .Math .Soc .J.Bolyai ,16,219–228)

نجد أن $k=1,\ldots\ldots,n$ $P(L_n\geq k)=P(M_n(k)=n)=\frac{n-k+2}{2^{k+1}}$

واحدة من القوانين للأعداد الكبرى تأخذ مكانًا استثنائيًّا في تطبيقات حساب الاحتمالات، هي نظريّة Glivenco – Cantelliتوصل إليها في 1933

Valerii Ivanovitch Glivenko (1879–1940)

و Francesco Paolo Cantelli (1875– 1966)

نأخذ متتالية متغيّرات عشوائيّة مستقلّة و لها دالّة التوزيع نفسها

$$F(x)=P(X_1\leq x)$$

لكلّ $n\geq 1$نعرف الدّالة التوزيعيّة التجريبيّة كالآتي:

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1_{\{X_i\leq x\}}=\frac{number\ of X_i\leq x}{n};\ 1\leq i\leq n$$

نظريّة Glivenko–Cantelli تبيّن أنّه باحتمال ١ $\lim_{n\to\infty}\begin{Bmatrix} sup|F_n(x)-F(x)| \\ x\in R \end{Bmatrix}=0$

هذه النظريّة تسمّى أحيانا النظريّة الأساسية للإحصاء؛ لأنها تبيّن أن مشاهدة عدد كاف من عناصر متتالية يؤدّي، بدقة غير محدّدة، إلى بناء قانون احتمال المتغيّرات (مبدئيًّا غير معروف) الذي يوصف بالدالة F(x) .

سرعة التقارب لهذه النظريّة حددت في ١٩٤٩ من طرف الرياضي الأمريكي الصيني Kai Lai Chung (ولد في ١٩٤٧) الذي أثبت أنّه في حالة اتصال F، باحتمال ١، عندنا

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\log\log n}}\{\sup|F_n(x)-F(x)|\}=1/2$$

مؤخّرًا أثبت A.A. Mogulskii (1980)

“On the law of the iterated logarithm for function spaces” Theor Prob . App 24,405-413

أنّه باحتمال ١ $\lim_{n\to\infty} inf\sqrt{2n\log\log n}\{sup|F_n(x)-F(x)|\}=\frac{\pi}{2}$

نتيجة غير متوقّعة بالمرّة بسبب وجود π في الجانب الأيمن من المعادلة. نوقف هنا أمثلتنا للأعداد الكبيرة لأنّ الموضوع شاسع لمثل هذه المساحة.

نحيل إلى الكتب P.Revesz(1968) “ the Laws of large numbers” Academic Press 1968

W.Stout (1974) « Almost sure Convergence” Academic Press

G.R.Shorack and J.A Wellner (1968) Empirical Processes with Applications to Statistics NewYork Wiley

لنتائج مشابهة من هذا الصنف

المسار العشوائي ومسألة إفلاس اللاعب

نرجع هنا إلى الدراسة- بالمصطلحات الاحتماليّة- لألعاب المصادفة و خاصة تلك التي يكون تقدّمها ممثلًا بالنتائج المتراكمة لأشواط مستقلّة، في مسار عشوائي.

يمكن الرجوع إلى الكتب:

Fspitzer (1964) “Principles of Random Walk “ Princeton , Van Nostrand

W.Feller (1966) ;” An introduction to Probability

Theory and its applications” Vol II New York Wiley

لوصف هذه الأشياء العشوائيّة. لنذكر كذلك مونوجراف:

(1990) P.Revesz

“Random Walk in Random and Non-Random Environements” Singapour World

Scientific.

المرجع الأخير يحتوي تطوّرات مبدعة تغطّي حالة المسارات العشوائيّة, التي لا تحقّق الفرضيات المعهودة. (انظر الأسفل)

المسار العشوائي الأبسط, نحصل عليه من متتالية ألعاب قفا ووجه مستقلّة. نتبنّى التأويل الآتي :سائر على مستقيم غير منتهٍ ينطلق في اللحظة t=0 من المصدر و يقوم بخطوة أولى إلى الأمام كلّ مرة تقع فيها القطعة النقديّة على الوجه, و يقوم بخطوة إلى الوراء كلّ مرة تقع فيها القطعة على قفا. إذا عرفنا S_n موقع السائر في اللحظة n و إذا وضعنا $X_n = 1$ عندما تظهر القطعة وجه و $X_n = -1$ عندما تظهر قفا .

المسار العشوائي$\{S_n, n \geq 0\}$ يعرّف كالآتي $S_0=0$

$S_n= X_1+ \ldots X_n$ $n\geq1$

في هذا النموذج $X_1 \ldots\ldots X_n$ متغيّرات عشوائيّة مستقلّة ذات القانون نفسه المعرّف كالآتي :

باحتمال$X_1 = 1, \frac{1}{2}$

باحتمال $X_n=-1,\ 1/2$

نستطيع أن نسند لهذا المسار العشوائي تأويلات متعدّدة، مثلًا الكسب المتراكم إذا خاطرنا دائمًا بالمبلغ نفسه في متتالية ألعاب متوازنة (اللاعبون عندهم فرص الكسب نفسها في كلّ لعبة منفردة). المسار العشوائي المبني, هكذا ينتمي إلى طائفة من عمليات Markov(التي سميت إكراما لـMarkov).

Andrei Andreyevitch Markov (1856–1922)

التي تصفها الخاصية أن تطور .. S_{n+2},S_{n+1} إذا عرفنا $S_0,S_1,\dots,S_n$ لا يتأثر إلّا بـ S_n. بلغة أخرى في مثل هذا النموذج، المستقبل إذا علمنا الماضي، لا يتأثر إلّا بالحاضر المباشر. نستطيع تعميم هذا المثال مفترضين أنّ اللّعبة ليست متوازنة، حيث احتمال الكسب يصبح p و $0<p<1$ في هذه الحالة

نعرف قانون X_n كالآتي:

باحتمال p $\quad X_n=1$

باحتمال $1-p$ $\quad X_n=-1$

في حال توقف اللّعب عندما تصل قيمة الكسب S_n الى مستوى محدّد $N\geq 0$ نحصل على مسار عشوائي محدود.

نمثّل مثل هذا المسار بسحب المصدر- إذا لزم الأمر- من $S_n=0$ الى $S_n=k$

بالعلاقات الاستقرائية الآتية (المبلغ الأولى للثروة اللاعب) $S_0=k$

إذا كان $S_n=0$ و $n\geq 0$ فان $S_{n+1}=0$

إذا كان $S_n=N$ و $n\geq 0$ فإن $S_{n+1}=N$

إذا كان $1 \leq S_n \leq N-1$ و $n\geq 0$ فان

باحتمال p $\quad S_{n+1}=S_n+1$

باحتمال 1-p $\quad S_{n+1}=S_n-1$

يمكن تعميم هذا النموذج أيضًا بافتراض أنّ اللاعب- في بعض الحالات- يحتفظ بكسبه دون تغيير.

يعود هذا إلى اعتبار العلاقات الاستقرائيّة الآتية:

المبلغ الأوليّ لثروة اللاعب $S_0=k$

-إذا كان $S_n=0$ و $n\geq 0$ فإنّ $S_{n+1}=0$

-إذا كان $S_n=N$ و $n \geq 0$ فإن $S_{n+1}=N$

- إذا كان $1 \leq S_n \leq N-1$ و $n \geq 0$ فان $S_{n+1}=S_n+1$ مع احتمال P

مع احتمال Q $S_{n+1}=S_n$

مع احتمال R $S_{n+1}=S_n-1$

حيث إنّ R,Q,P ثوابت موجبة تحقق P+Q+P=1

سوف نرى في الباب الثالث عشر أنّه باحتمال ١ أي مسار عشوائي محدود ينتهي: إمّا بمشاهدة:

$S_n=0$ إفلاس اللاعب

أو بمشاهدة:

$S_n=N$ إفلاس الخصم.

احتمال الواحد أو الآخر من بين الحدثين لا يتأثر إلّا بالقسمة $\frac{P}{P+R}$ لهذا التقدم النهائي للعبة السابقة مماثل للعبة تصفها العلاقات الاستقرائية الآتية (المبلغ الأولى لثروة اللاعب) $S_0=k$

- $S_{n+1}=0$ إذا كان $S_n=0$ و $n \geq 0$
- $N=S_{n+1}$ إذا كان $S_n=N$ و $n\geq 0$
- إذا كان $1 \leq S_n \leq N-1$ فإنه باحتمال $\frac{P}{P+R}$, $S_{n+1}=S_n+1$

باحتمال $\frac{R}{P+R}$ $S_{n+1}=S_n-1$

بسبب هذه الخاصيّة، إضافة احتمال Q لا يغير التقدم النهائي للعبة مع أنّه يساهم في تأجيل نهايتها. كمثال: إذا عرضت عليكم لعبة حيث يكون لكم:

١٥% فرصة للكسب.

٦٠% فرصة للمحافظة على ما عندكم .

٢٥% فرصة للخسارة .

سوف تحدث الأمور كما لو كان عندكم :

37,5% فرصة للكسب $\frac{15}{15+25}$.

62,5% فرصة للخسارة $\frac{25}{15+25}$.

اللّاعب البسيط أو المتفائل, سوف يحتفظ في النسخة الأولى من اللعبة بأنّ له %"75 نسبة الكسب أو المحافظة على ماله. يجب الحذر من هذه الأوهام مثل أوهام دور اللّعب التي تقدم تعويضات لكثير من التذاكر، مع تحديد كبير لاحتمالات الربح الحقيقي. مثل هذه العمليّات تعطي الانطباع للّاعبين بالربح في كثير من الحالات, في حين أنّ احتمالات خسارة كلّ ما يملكون- في وقت قد يطول نسبيًّا- تبقى مرتفعة.

المسار العشوائي المحدود, يسلك مثل مسار عشوائي غير محدود قرار إيقاف تقدمه ابتداءً من نقطة انطلاق k إذا وصل إلى مستوى N أو المستوى ٠.

من المهمّ تحديد الخصائص الاحتماليّة لمثل هذه اللعبة, و خاصّة احتمال إفلاس اللاعب الذي يقابل وجود وقت n تكون بعده $S_n = 0$.

في الباب الثالث عشر سوف نقدّم بعض النتائج من هذا الصنف، تهم المسارات العشوائيّة، التي يمكن أن يبدو بعضها مفاجئة.

الفصل الثالث عشر

تجنب الخسارة في المتدحرج و اللّعب

لنأخذ أوّلًا حالة المسار العشوائي المحدود (انظر الباب ١٢) التي نذكر بفرضياتها في شكل لعبة.
تلعب دائمًا بالمبلغ نفسه S=1 ضد خصم وحيد في متتالية ألعاب متتابعة مع احتمال p للربح و 1-p للخسارة في كلّ لعبة.
تبدأ بثروة أوليّة مبلغها k و من المقرر اللّعب حتى وصول المبلغ N أو الإفلاس أثناء المحاولة.
خصمك سوف نفترض أنّه أغنى منك, و يملك من المال ما يكفي لأن يجعله قادرًا على الدفع في كلّ الحالات.
في هذه الحالة يتوقف اللّعب باحتمال ١ في وقت محدود، احتمال الربح P_G معطى بالقاعدة :

$$P_G = \frac{1-(\frac{q}{p})^k}{1-(\frac{q}{p})^N}, p > q$$

$$P_G = \frac{k}{N}, p = q$$

احتمال الخسارة هو $P_R = 1 - P_G$ هذه النتائج قديمة جدًّا Christiaan Huygens (1629-1695) حصل عليها في 1657 لـk=12 و$\frac{q}{p} = \frac{5}{9}$. اثبت Jacques Bernoulli في ١٦٨٠ النتيجة العامة بإثبات أعاد تناوله Abraham de Moivre في 1711(انظر

L.Takacs (1977) Combinatorial Methods In The theory of Stochastic Processes Dekker p.18)

لنقدّم مثالًا على تطبيق هذه القواعد للعبة المتدحرجة. في هذه اللعبة نرمي كويرة على عجلة أفقية في وضع دوران, حيث تقف في إحدى الخانات الحمراء أو السوداء التي تحمل أرقامًا من ١ إلى ٣٦ مع خانة إضافيّة خضراء تحمل رقم٠ (العجلة الأوروبيّة) أو خانتين تحملان الرقمين ٠و٠٠ (في حالة العجلة الأمريكيّة) وهي خانات خاسرة دومًا للّاعب (مع قواعد تتغير من حالة إلى أخرى انظر ما سيأتي لاحقًا)

اختراع العجلة المتدحرجة ينسب دون أن يكون ذلك مؤكّدًا إلى Blaise Pascal (1623-1662) .أتي بها إلى باريس في 1765 و إلى مونتي كارلو في 1863).

قاع اللعبة في الحالة الكلاسيكيّة له الخانات (انظر البيان المقابل ← رسمان بيانيّان ص١٠٢و ص١٠٣)
المكاسب تحسب حسب قواعد متعدّدة. القانون الآتي يطبّق في فرنسا.

أ) ملآن: المخاطرة توضع على رقم واحد. يكسب اللّاعب ٣٥ مرّة قيمة المخاطرة إذا تحقّق الرقم.
ب) العارضة : المخاطرة توضع على الامتداد الخارجي لصف أفقي لثلاث أعداد. يكسب اللّاعب ١١ مرة مخاطرته إذا تحقّق واحد من الثلاثة أرقام.
ج) بين بين : توضع المخاطرة بين رقمين و يكسب اللاعب ١٧ مرّة مخاطرته .
د) الستية: توضع المخاطرة على الخط الخارجي على تقاطع صفين أفقيين، أي ٦ أرقام و يكسب اللاعب ٥ مرّات مخاطرته إذا ظهر أحد الأرقام المعنيّة .
ذ) المربّع: توضع المخاطرة على تقاطع ٤ أرقام و يكسب اللّاعب ٨ مرّات مخاطرته.
م) الفرص البسيطة: توضع المخاطرة على: الأحمر أو الأسود أو على زوجي أو على فردي أو على اللاّ عبور (الأرقام من ١ إلى ١٨) أو على العبور (الأرقام من ١٩ إلى ٣٦) يربح اللّاعب مبلغ مخاطرته في حال الكسب. مع التوضيح أنّه في حال ظهور ٠ المخاطرات على الفرص البسيطة تفقد نصف قيمتها.
ن) الاثنا عشر: المخاطرة توضع على الثلاث مناطق الآتية كلّ منها يحتوي ١٢ رقمًا. الاثنا عشر الأولى (من ١ إلى ١٢)

ف) الاثنا عشر الثانية: (الاثنا عشر الوسطيّة) الاثنا عشر الأخيرة (من ٢٥ إلى ٣٦) يكسب اللّاعب ضعف مخاطرته في حال الربح، إذا ظهر ٠ يفقد كلّ مخاطرته.

ق) الاثنا عشر بين بين: توضع المخاطرة علي خط التقاطع بين الاثنتي عشر و اثنتي عشرة أخرى و تحتوي ٢٤ رقمًا. يكسب اللّاعب نصف مخاطرته إذا ظهر أحد الأرقام.

ك) العمود توضع المخاطرة في أسفل إحدى الأعمدة التي تحتوي ١٢ رقمًا. لكلّ منها يكسب اللّاعب ضعف مخاطرته إذا ظهر ٠ الأعمدة خاسرة.

ل) العمود البين بين: توضع المخاطرة على تقاطع عمودين محتوية ٢٤ رقمًا، يكسب اللّاعب نصف مخاطرته في حال الربح.

خصائص المتدحرجة تحتّم أن يكون ٠ و ٠٠ أرقامًا خاسرة (لمصلحة البنك) حسب تقسيم مختلف حسب الحالة.

احتمال الكسب يقارب ½ في حال الفرص البسيطة (الاحتمال يتغيّر حسب القواعد المعمول بها في كلّ مؤسسة) في ما يلي سوف نفترض قواعد حساب يمكن أن تحتاج إلى تغيرات بسيطة تفصيليّة. يمكن الرجوع إلى الموقع.

mises-gains-roulette.html http://www.casino.zen.com/

للمراجع و التحديث و قواعد لعب الكازينو. نجد $p = \frac{18}{37} = 48{,}64866486\%$ للعجلة الفرنسية.

للتبسيط سوف نأخذ هنا حالة اللّعب و المخاطرة على زوجي فردي (أو أحمر- أسود أو عبور – لا عبور)
لنفرض أنّ لاعبًا ما يملك ثروة 10000€ و يلعب بأضعاف 100€ في هذه الحالة يجدر أن تعطى 100€

دور وحدة المخاطرة و الثروة الأوليّة هي k=100 وحدة €100. نفرض أن اللّاعب يقرّر أن يقف بمجرد أن تصل أرباحه إلى ثروة ترتفع إلى N>K وحدة€100 لنحسب احتمال الكسب حسب N.
بتطبيق القاعدة السابقة نجد الجدول الآتي (جدولI) (انظر ص ١٠٥ من الكتاب) لنفرض أنّه في مرحلة ثانية يريد اللّاعب أن يحصل على ثروة €11000 و أن يكفّ عن اللّعب في حال النجاح (ربح €1000 يمكن أن يبدو مهمًّا، و لكن إذا لم يكن الحال كذلك يكفي ضرب هذه الأرقام بعامل متناسب يختار بعناية) يستطيع اللّاعب كذلك أن يخاطر بوحدات €500 أو €1000 أيّهما أفضل ؟ بالنسبة لـ€500 يجب أن نأخذ k=20 و N=21,22 نجد النتائج الآتية:

احتمال الربح	اللّاعب يخاطر بوحدات ١٠٠€ إذا وصلت ثروته إلى يتوقف
94,17%	€١٠١٠٠
89,71%	10200
84,97%	10300
80,48%	10400
76,23%	10500
72,21%	10600
68,39%	10700
64,78%	10800
61.36%	10900
12.58%	**€11000**

احتمال الربح	اللّاعب يخاطر بوحدات ٥٠٠€ و يتوقف عند وصول ثروته إلى
92,25%	10500€
85,27%	11000€
78,96%	11500€
73,24%	12000€
68,04%	12500€

مقارنة بسيطة بين هذه الأرقام, تبيّن أنّه من مصلحتنا أن نلعب في كلّ مرّة أكبر خيار مربح ممكن حتى نصل إلى الحدّ الذي وضعناه في أسرع وقت ممكن. على كلّ حال من الممكن أن نثبت أنّه في متتالية ألعاب مستقلّة بين لاعبين بحيث يكون احتمال ربح (A)أكبر أو يساوي 1/2 في كلّ لعبة توقّع الكسب بالنسبة للاعب (B) بعد n لعبة يجب أن يبقى سالبًا أو صفريًا. لذلك مهما كانت

احتمال الربح	وحدة المخاطرة١٠٠٠اورووبقف اللّاعب عند وصول ثروته الى
88,26%	11000 اورو
78,53%	12000اورو
70,34%	١٣٠٠٠ اورو

استراتيجية اللّعب لكسب 1000€ مع المخاطرة بخسران 10000€ علينا أن نحترم العلاقة:

$$0 \leq 10000 * \left\{\text{احتمال الخسارة}\right\} - 1000 * \left(\text{احتمال الربح}\right)$$

لهذا عندما نلعب للحصول على ١١٠٠٠€ بوضع ١٠٠٠٠€ للعب لا نستطيع أن نتوقّع احتمال كسب أكبر من $90{,}91\% = \frac{10000}{11000}$. احتمال الربح في الاستراتيجية المقدّمة سابقًا، لمخاطرات فردية لـ1000€ هو هنا 88,26% و هذا ليس سيّئًا. سنرى الآن أنّه يمكن أن نحصل على أفضل من هذا حيث أفضل استراتيجية ممكنة تحقّق احتمال كسب يساوي 89,94%.

يحلم لاعبو الكازينوهات دائمًا بالحصول على مارتينجيل (تعرف كنظام لعب يدعى الربح المؤكّد بزيادة المخاطرات بصفة تدريجيّة)؛ لتأمين الغنى في اللّعب. من الواقع المثبت أنّه ليس ممكنًا تأكيد الربح للاعب كازينو إلّا في حال كانت العجلة غير متوازنة، و سوف نتناول هذا لاحقًا. مع ذلك نستطيع أن نطرح السؤال الآتي: إذا كان لدينا مبلغ معيّن و تحت رغبة ملحّة لمضاعفة المبلغ (إلى درجة الرغبة في اللّعب) إلى مبلغ آخر محدّد، أيّ استراتيجيّة نتبنّى بحيث نحصل على الاحتمال الأكبر للربح ؟ في حال اللّعبة التي ذكرناها (زوجي- فردي، أحمر- أسود)هذه المسألة تم حلها من طرف Lester Dubins et Leonard Savage في ١٩٥٦ (سوف نحيل- عوضًا عن البحث الأصلي- إلى كتاب Inequalities for stochastic processes.” How to gamble if you Must” Leonard Savage et Lester Dubins London. Dover)

اللذين أثبتا أنّ الاستراتيجيّة المثلى هي التي نحصل عليها بـ (اللّعب الجري) الذي يتمثل في المخاطرة بالمبلغ الذي يؤدّي- أو يقارب إذا تعذّر ذلك- إلى الهدف المنشود من أوّل لعبة. نصف هذه الإستراتيجية في حال لاعب يملك 10000€ و يريد الوصول إلى مبلغ 11000€ نجد في هذه الحالة احتمالًا يساوي 89,94% للوصول إلى هدف 11000€. لن نضيف أكثر في مسائل الاستراتيجية المثلى للعب، وسوف نعود لاحقًا إلى ذلك عند حديثنا عن أوقات الإيقاف لنثبت (و هو ما يبدو بديهيًّا لكلّ شخص عاقل) أنّه من بين كلّ الإمكانيّات، الخيار الأكثر اقتصادًا هو أن لا نلعب مطلقًا. الاستراتيجيات المثلى تتعلّق دائمًا بفكرة أنّه إذا كان لا بدّ من اللّعب فمن مصلحتنا أن نبقى على طاولة اللّعب أقل وقت ممكن. لنذكّر مع هذا بالنقاط الآتية :

❖ حسب علمنا إذا كانت كلّ الإمكانيات للّعب متاحة الاستراتيجية المثلى في لعبة العجلة غير معروفة

إذا حدّدنا إمكانيّات اللّعب إلى مخاطرات وحيدة الإستراتيجية المثلى معروفة, نحصل عليها باللعب بصفة متكررة على الخانات التي تؤمن الربح الأوفر و بحساب المخاطرات، إذا أمكن ذلك، بحيث يتحقّق الهدف في أول كسب مسجل. هذا يدفع بالطبع إلى المخاطرة الكاملة على الأعداد من ١ إلى ٣٦ أفضل من أي شيء آخر. مع ذلك الكسب منقوص (٣٥ إلى ١ عوض ٣٦ إلي ١) و هذا أقل أفضليّة من لعب الفرص البسيطة. من ناحية أخرى مخاطرة دنيا دائمًا تفرض من طرف الكازينو ما يؤدّي إلى أنّ كلّ المخاطرات يجب أن تكون أضعاف هذه الوحدة الأساسيّة. هذا يربك النتيجة السابقة التي تفترض أنّ الاستراتيجيّة المثلى تبنى بمخاطرات تتغير بصفة متصلة.

لنأخذ حالة لاعب يملك 10000€ و يرغب في الوصول إلى 11000€. إذا فرضنا أن هذا اللّاعب يستطيع أن يخاطر بأي مبلغ، بنجاعة ٣٦ إلى ١، الاستراتيجيّة المثلى تتمثل في وضع على الطاولة المخاطرات المتتالية ,28€, 29€, 30€, 31€ ......37€ مثل هذه الاستراتجية تعطي اللّاعب إمكانيّة أن يخسر 10000€ في ٨٦ شوطًا، إذا لم يكسب في تلك الأثناء، وفي لعبة واحدة الكسب المطلوب 1000€. احتمال الكسب يكون إذا في هذه الحالة $1-\left(1-\frac{1}{37}\right)^{86} = 90{,}52\%$ و هو ما يقارب الحد الأقصى النظري 90,91% بالتأكيد إذا كانت النجاعة ٣٥ إلى ١ و المخاطرات أضعاف مبلغ 10€ نلعب بالترتيب (من اليسار إلى اليمين ثم من الأعلى إلى الأسفل)

€٣٠	€٣٠	€٤٠	€٤٠	€٤٠	€٤٠	€٤٠	€٤٠	€٤٠
€٤٠	€٤٠	€٥٠	€٥٠	€٥٠	€٥٠	€٥٠	€٥٠	€٥٠
€٦٠	€٦٠	€٦٠	€٦٠	€٦٠	€٦٠	€٧٠	€٧٠	€٧٠
€٧٠	€٧٠	€٨٠	€٨٠	€٨٠	€٨٠	€٩٠	€٩٠	€٩٠
€٩٠	€١٠٠	€١٠٠	€١٠٠	€١٠٠	€١١٠	€١١٠	€١١٠	€١٢٠
€١٢٠	€١٢٠	€١٣٠	€١٣٠	€١٣٠	€١٤٠	€١٤٠	€١٥٠	€١٥٠
€١٥٠	€١٦٠	€١٦٠	€١٧٠	€١٧٠	€١٨٠	€١٨٠	€١٩٠	€١٩٠
€٢٠٠	€٢٠٠	€٢١٠	€٢٢٠	€٢٢٠	€٢٣٠	€٢٤٠	€٢٤٠	€٢٥٠
€٢٦٠	€٢٦٠	€٢٦٠	€٢٧٠	€٢٨٠	€٢٩٠	€٢٩٠	€٣٠٠	

طريقة اللّعب تبقى في نهايتها ٢٧٠€ إذا لم يكسب في تلك الأثناء، هناك ما يقارب ٧٩ إمكانيّة للكسب هنا أي احتمالا للكسب يقارب $1-(1-\frac{1}{37})^{79} = 88,51\%$. مثلما نرى في هذه الأمثلة اللّعب على الأرقام يؤدّي إلى نتيجة أقل نجاعة من لعب الفرص البسيطة من نوع زوجي فردي، بالإضافة فإنّه يجعل الخسارة تأخذ وقتًا طويلًا ما يجعلها مؤلمة دون شكّ. يدرك القارئ أنّ هذه الأرقام هي أبعد ما تكون عن التحريض على لعب العجلة. الهواة الذين على الرغم من كلّ شيء يميلون إلى اللّعب يجدر بهم أن يقوموا ببعض التجارب الأوليّة باختبار حظهم في لعبة الزهر بالمخاطرة ضد الستة (احتمال ظهورها 16,66%) و التخيّل أنّهم في كلّ مرة تظهر فيها الستة، لو كانوا في الكازينو لسلبوا الملايين. مع ذلك هل من الممكن الكسب المنتظم في الكازينوهات إذا استثنينا الغش الهمجي. يوجد عدد كبير من الطرق التي يعرضها المسمّون " المختصون " و التي تقدّم على أنّها تضمن للاعب ربحًا مؤكّدًا (نذكر من بين طرق أخرى لن نتناولها هنا مارتينجيل Hawks المارتنجيل الكبيرة ,خاطفة الذباب, طريقة

Whittaker, هرم D'Alember ,عكس D'Alembert La paroli, المارتينجيلات الأمريكية و الإنجليزيّة)

علينا التأكيد هنا أنّ هذه الطرق لا تصمد أمام المنطق. رأينا أيضًا أنّ الاستراتيجيّات المثلى في الحالات الكلاسيكيّة معروفة و أنّه ليس من الممكن أن نحصل على أفضل. لنأخذ على سبيل المثال مارتينجيل Hawks" الكلاسيكيّة التي تتمثّل في مضاعفة المخاطرة عند كلّ خسارة. يحدث أنّه في البداية تتماثل هذه الطريقة مع الاستراتيجيّة المثلى للعب زوجي- فردي و تؤمّن في الظاهر ربحًا مؤكّدًا . بالفعل إذا خاطرنا بـ ١ في اللعبة الأولى و ٢ في اللعبة الثانية و ٤ في اللّعبة الثالثة إلى آخره عندما تكسب يكون الكسب دائمًا ١. مع ذلك تصبح الأرقام كبيرة بسرعة و الربح لن يكون مؤكّدًا إلّا في حال كانت الثروة الأوليّة غير محدودة (انظر الباب الأول). بالإضافة إلى أنّ الكازينوهات تحدّد سقفًا للمخاطرات (هذا هو الحال في فرنسا حيث المخاطرة الدنيا هي 2€ و قد تكون أكبر، و المخاطرة الكبرى لا تتجاوز ٣٠ مرّة المخاطرة على رقم كامل أو ١٠٠٠ مرّة المخاطرة على فرصة بسيطة) و هذا لا يمكّن من متابعة اللّعب بعد حدٍّ معيّن. (انظر الموقع)

mises-gains-roulette.html http://www.casino.zen.com/

فكرة أذكى تتمثل في البحث عن نواقص اللّعبة المتأتية من :

- إمّا عدم تناظر آلة اللّعب .
- عادات من يدير اللّعب .

لتجنّب إمكانيّة أن يستطيع لاعب التفطّن إلى هذه النواقص- بملاحظة طاولات العجلة- تغيّر الكازينوهات الكبيرة العجلات و العاملين على الطاولات باستمرار، ما يجعل الملاحظة لمدّة كافية لكي تكون مفيدة صعبة التحقيق. نذكر مع ذلك مثال المهندس الانجليزي William Jaggers (١٨٩٢-١٨٣٠) الذي حقّق في ١٨٧٣ ربحًا نهائيًّا بمبلغ 325000$ (مبلغ فلكي في تلك الفترة) في لعبة العجلة في

Monte-Carlo باستفادته من النواقص الموجودة. استعمل William Jaggers ستة مساعدين لأخذ الأرقام التي تظهر في الطاولات المختلفة للعجلة ما جعله يستنتج أن بعض الأرقام تظهر بطريقة مرتفعة غير عاديّة. حقّق بعد ذلك متسلسلة ألعاب رابحة , قبل أن يجدّد الكازينو أجهزته، و يضع حدًّا لنجاحه.

لنرفض مباشرة الطرق المسمّاة " طرق التعويض" التي تتمثّل في اللّعب باستمرار على الأرقام التي لم تظهر منذ وقت طويل. سوف نرى لاحقًا بصفة دقيقة إلى أيّ مدى يكون هذا عبثيًّا و خطيرًا للاعب. طريقة مقبولة (و طبّقت بنجاح من طرف William Jaggers (انظر(Epstein, (Opt.cit114) تتمثل في الذهاب إلى كازينو و ملاحظة الطاولات إلى أن تميّز واحدة يكون عيب العجلة فيها يعوّض ما يأخذه الكازينو. يستطيع من يملك ما يكفي من المال حينئذ- و باللّعب لمدّة طويلة- أن يكسب بسبب عدم توازن اللّعب لصالحه مبلغًا يسوّغ السفر. من الخطأ الاعتقاد أنّ دور اللّعب تجهل هذه المخاطر،إنّهم يعملون كلّ ما في وسعهم للتعرّف إلى اللاعبين و الطاولات " غير العاديّة ".

أمّا من ناحية الوقت المقضى, فإنّه يستحقّ العناء بصعوبة كبيرة. لنقل ببساطة بأنّ ذلك ممكن.

طريقة أخرى، فيها حيلة تتمثّل في الحساب الاستباقي للخانات التي يمكن للكرة أن تسقط فيها، باستعمال سرعة دوران العجلة و سرعة الكرة. بين العشرين ثانية التي تفصل بداية الحركة و إيقاف

المخاطرات من الممكن التنبؤ بسقوط الكرة بدقّة و المخاطرة على ضوء ذلك. مع ذلك يبدو غير محتمل أن يسمح الكازينو للاعب أن يضع تجهيزات إلكترونية تسمح بذلك.

ندعو القارئ للتمرين على حساب الاحتمالات بعمل حسابات مشابهة للسابقة في حالة لعبة الكرة (تسعة أرقام من ١ إلى ٩ الخمسة لا رصيد له و الأرقام الباقية تكسب ٧ للواحد و الألعاب زوجي فردي (٩-٧-٣-١)و (٨-٦-٤-٢)و يعبر لا يعبر (٤-٣-٢-١)أحمر أسود (٨-٦-٣-١) (٩-٧-٤-٢)تكسب مبالغ مساوية للمخاطرة

نحيل لمزيد من التفاصيل إلى :

L Dubins and L Savage (1965)" Inequalities for Stochastic Processes How to Gamble If You Must" London, Dover

B.Epstein (1977)" The theory of Gambling and Statistical Logic", New York Academic Press

نعود الآن لدراسة مسار عشوائي غير منتهٍ و نذكر بتعريفه العام نضع $S_0 = 0$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i , S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$

حيث $X = X_1 \dots X_n$ متتالية متغيّرات عشوائيّة لها القانون نفسه بحيث :

$P(X=1)= p$ و $P(X=-1)= 1-p$ $0<p<1$

لنلاحظ أنّه يمكن أن نعبّر عن Sn بوساطة العدد N_n عدد تحقّق الحدث $X_k = 1$ و k بين ١ و n. فعلا

$$S_n = N_n - (n - N_n) = 2N_n - n$$

أو

$$N_n = \frac{1}{2}(S_n + n)$$

كذلك إذا عرفنا متغيّرات عشوائيّة جديدة

$Y_n = \frac{1}{2}(X_n+1)$ $N_n = Y_1 + \dots + Y_n$

نلاحظ أن $Y = Y_1, Y_2, \dots$ متتالية متغيّرات مستقلّة لها القانون نفسه $P(Y=1)=p$, $P(Y=0)=1-p$

نستطيع أن نتناول، دون فرق،Sn مجموع مكاسب اللّاعب منذ البداية أو N_n عدد الألعاب التي كسبت في الفترة نفسها. في ما يلي يحسن أن نضع q=1−p. القانونان الآتيان يطبقان مباشرة على هذا النموذج كنتيجة لنظريّات عامّة (أنظر الباب ٣ و الباب ٥) .

١) قانون الأعداد الكبيرة :عندنا باحتمال ١ عندما تؤول n إلى ∞ $\frac{S_n}{n} \to$ p−q=2p−1=E(X) أو بطريقة مكافئة $\frac{Nn}{n} \to$ p=E(Y)

٢) التقارب نحو قانون Laplace−Gauss (نلاحظ أنّ $Var(X)=4pq=4p(1-p)$

$$\lim P\left(\frac{S_n-n(p-q)}{2\sqrt{npq}} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$$

او بطريقة مكافئة

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n - np}{\sqrt{npq}} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

هذه النتائج المعروفة يجب تكميلها بقوانين أخرى غير معروفة التى أدّى جهلها أكثر من لاعب إلى الإفلاس.

أولا إذا شاهدنا لمدة طويلة المسار........ S_0, S_1 في حالة لعبة متوازنة(p=q=1/2) باحتمال واحد سوف تمر S_n عدد غير منتهٍ من المرّات بأيّ رقم صحيح معطى مهما كان صغره أو كبره. هذه النتيجة تصبح أدق بقانون اللوغاريتم المتكرر (أنظر الباب ١٠) الذي ينص على الآتي: باحتمال واحد لكلّ $0 < \varepsilon < 1$ يوجد عدد لا متناهٍ من المؤشّرات n بحيث

$$S_n - n(p+q) \ge (1-\varepsilon)\sqrt{8npq\log\log n}$$

و عدد لا متناهٍ من المؤشرات n بحيث $S_n - n(p+q) \le (1-\varepsilon)\sqrt{8npq\log\log n}$

بالإضافة إلى ذلك باحتمال ١ لكلّ $\varepsilon > 0$ يوجد $n_\varepsilon > 0$ بحيث لكلّ $n \ge n_\varepsilon$.

$$-(1+\varepsilon)\sqrt{8npq\log\log n} \le S_n - (p+q)n \le (1+\varepsilon)\sqrt{8npq\log\log n}$$

نتيجة مباشرة لهذا، في، حال متتالية ألعاب متوازنة بين لاعبين (B)و(A) لهما احتمال الكسب نفسه p=q=1/2 إذا كان اللّاعب (B) له ثروة كبيرة مقارنة باللاعب (A)، إذا باحتمال ١ اللّاعب الأقل غنا يفلس في النهاية. هذا هو المبدأ أي لاعب يتابع متتالية ألعاب ضد الكازينو سوف يكون خاسرًا في النهاية، حتى و إن كانت الألعاب متوازنة. للحصول على فرص مقبولة لتجنب هذا القدر و لاستطاعة "تفجير البنك" يجب أن يمتلك اللّاعب ثروة أولية على الأقل من نفس درجة ثروة البنك. لا شك في أن هذه حالة صعبة المنال. نحصل

أيضًا على نتيجة مهمّة تخص عودة S_n إلى مستوى ٠ باحتمال ١، هذا يحدث في لعبة متوازنة (p=q) عدد غير منتهٍ من المرّات خلال اللّعب .

-وفي لعبة غير متوازنة(p≠q)عدد منتهٍ من المرّات. هذا يعطي تفسيرًا تجريبيًّا للأسباب التي من أجلها يكون من مصلحتنا، في حال لعبة غير متوازنة(p<q) أن لا نخاطر بمخاطرات صغيرة متكرّرة و لمدّة طويلة و لكن بدل ذلك، بمخاطرات كبيرة و بسرعة. نتصرف بهذه الطريقة حتى لا ندع المجال لقانون الأعداد الكبيرة أن يطبق.

لنعط مثالًا عدديًّا :

إذا أخذنا سلسلة ألعاب قفا و وجه , طويلة جدًّا و متوازنة (p=q=1/2) لأعداد n بحيث يمكن أن نقبل أن قانون الأعداد الكبيرة متحقق تقريبًا.

إذا كان n=1000000 فإن$\sqrt{8np\log\log n} = 2291,63$

إذا كانn=1000.000.000 فإن $\sqrt{8npq\log\log n} = 77862,15$

هذا يعني أنّه خلال تحقيق المسار العشوائي، S_n سوف تتذبذب حول٠ مع إمكانيّة أخذ قيم مهمّة مثل ٢٠٠٠ (او2000-)على ١٠٠٠٠٠٠ لعبة أو٧٠٠٠٠ (او٧٠٠٠٠-) على ١٠٠٠٠٠٠٠٠٠ لعبة. لنوضح أكثر مساحة هذه التذبذبات.

في حال لعبة متوازنة، نحصل بسهولة على قانون نهاية $M_n/\sqrt{n}$ حيث $M_n = Max\{0,S_1 \dots \dots S_n\}$

لنلاحظ بصفة عابرة أنّ M_n تتبع قانون الاحتمال نفسه m_n حيث$m_n = max\{0,-S_1 \dots \dots \dots -S_n\}$

دائمًا في حال لعبة متوازنة مع p=q=1/2 نحصل على قانون M_n باستعمال مبدأ الانعكاس(انظر ـ Desiré André(1887)

W.feller(1957) An Introduction to Probability Theory and its Applications New York Wiley t1 p70

M.Loeve (1977) Probability Theory, New–York, Springer)

هذا المبدأ السهل الفهم يتمثل في قول إنّه إذا كان عندنا المتتالية $S_0 = 0,S_1,..,S_n$ و أكبرها M_n مع افتراض$M_n \geq a$ و تحققها عند $S_k = M_n$يمكن بعد $S_K = M_n$ تعويض كلّ المتغيّرات

$X_n,........,X_{k+1}$

بأضدادها$-X_{k+1}.......-X_n,$ و الحصول على متتالية لها السلوك نفسه بالنسبة للاحتمالات. نستنتج المساواة $P(M_n \geq a, S_n < a) = P(M_n \geq a, S_n > a)$

و نستنتج المعادلة $P(M_n \geq a) = 2P(S_n < a) + P(S_n = a)$

بما أنّ قانون نهاية $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ هو العادي من نظريّة النهاية المركزيّة نستنتج أن :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \lim_{n\to\infty} P\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} maxS_i \leq x \\ 0 \leq i \leq n \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

لكلّ $x ^3 0$

هذه النتيجة تنص أن $\frac{\mathrm{M_n}}{\sqrt{\mathrm{n}}}$ لها قانون النهاية مماثل لقانون |X| حيثX تتبع قانون عادي (Laplace)(N(o,1) (Gauss–ممركزة و مختصرة (توقّع ٠ و تباين ١). هذا يتمثل في تحديد مستويين a_n , b_n بحيث

$$P\begin{pmatrix} maxS_i \geq a_n \\ 0 \leq i \leq n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} maxS_i \leq b_n \\ 0 \leq i \leq n \end{pmatrix} = 10\%$$

بأخذ المستويين المقابلين كما في القيمة المطلقة لقانون عادي N(0,1) نختار إذن :

$$\frac{a_n}{\sqrt{n}} \sim 0{,}12566 \; et \; \frac{b_n}{\sqrt{n}} \sim 1{,}64485$$

دائمًا في لعبة القفا و الوجه لنحدّد الأرقام أكبر أو أقل من 10% لتوزيع M_n مع المقاربة المحصول عليها بالقانون النهاية السابق. يعطي هذا المنطقة الآتية لـM_n

$$P(M_n \geq a_n) \sim P(M_n \leq b_n) \sim 10\%$$

N	a_n	b_n
100	1	**16**
1000	4	**52**
10.000	13	**164**
100.000	40	**520**
1.000.000	126	**1645**
1.000.000.000	3973	**52015**

كما نرى، تذبذبات S_nحول المصدر تميل إلى أن تكبر أكثر فأكثر. مع ذلك صغر a_n بالنسبة لـb_n لافت للانتباه. لنأخذ مثالًا لتوضيح الظاهرة. نأخذ هنا لعبة قفا و وجه (أو أيّ لعبة أخرى متوازنة) طولها ١٠٠ مرّة. هل من العادي أن يتجاوز أحد الخصمين خصمه بخمس عشرة نقطة؟ احتمال أن يحدث هذا هو 13,36% ما يجعله حدثًا غير معهود و لكن مع ذلك ممكن (تقريبًا مساوٍ لاحتمال ظهور ٦ في لعبة الزهر $16,66\% = \frac{1}{6}$) هل من الطبيعي في الاتجاه المعاكس أن لا تتجاوز أسبقيّة أيّ من الخصمين نقطتين ؟

احتمال حدوث ذلك يساوي 15,85%, ما يجعله حدثًا نادر الحصول و مع ذلك ممكن .هذه الأرقام تنتج شيئًا فشيئًا مبدأ قديمًا قدم العالم نفسه الذي لا حاجة إلى أن نكون رياضيين لمعرفته. قانون السلاسل أو ترسّب الحظ (جيّدًا كان أم سيّئًا).

الفصل الرابع عشر

إصرار الحظ أو سوء الحظ

فرضنا دائمًا- إلى حدّ الآن- أنّنا نحقق متتالية $X_1, \dots, X_n$ ألعاب متوازنة مستقلّة من صنف قفا و وجه (مرقّمة ٠ و ١ بالترتيب) مع احتمال ربح و خسارة متساويين مع ½. في هذه الحالة إذا كان $S_0 = 0$ و $S_n = X_1 + \cdots . + \cdots + X_n$ تمثل المبلغ الاجمالي للأرباح بعد n لعبة، في شوط غير منتهٍ، باحتمال ١ المتتالية S_nيمر عدد غير منتهٍ من المرّات بالمستوى ٠. نستطيع إذا أن نعرف المتتالية

$T_1, T_2, \dots\dots, T_k$ للأوقات التي تفصل عبورين متتاليين لـ S_n بالصفر بالمعادلات

$$S_0 = S_{T_0} = 0, S_j \neq 0, T_0 < j < T_1, S_{T_1} = 0$$

$$S_j \neq 0, T_1 < j < T_2\ , S_{T_2} = 0$$

لأسباب بديهية $T=T_1, T_2 \dots T_k$متتالية عشوائيّة مستقلّة لها القانون نفسه، من ناحية أخرى لا يمكن العودة إلى الصفر إلّا بعد أن تتساوى المكاسب و الخسائر، و لذلك قيم متتالية $T_1, \dots, T_k$ لا يمكن أن تكون إلّا أعدادًا زوجيّة (تقسم على ٢) التوزيع الاحتمالي لهذه المتغيّرات هو: معطي بالمعادلات (W FELLER OP .cit p76 أنظر)

$$P(T = 2n) = \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} \binom{n}{2n-1} = \frac{(2n-1)!n}{(n!)^2 2^{2n}}$$

حيث نستعمل الرموز المعهودة

$$n! = n(n-1) \dots \dots 2.1$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

نحصل على القيم العدديّة لهذه الاحتمالات (في شكل نسب) انظر الجدول :

	P(T=2n)	P(T≥2n)	P(T=2n/T≥2n−2)
n=1	50	50 ,00	**50,00**
2	12,50	62,50	**٢٥**
3	6,25	68,75	**16,67**
4	3,91	72,66	**12,50**
5	2,73	75,39	**10,00**
6	2,05	77,44	**8,33**
7	1,61	79,05	**7,14**
8	1,31	80,36	**6,25**
9	1,09	81,45	**5,56**
10	0,93	82,38	**5,00**

العمود الأخير يعطي الاحتمال أن تكون $T=2n$ إذا علمنا أنّ $T\geq 2n-2$. يمكن الميل إلى الاعتقاد أنّ هذا العدد يكبر مع n و لكنه ينقص مع n. بالفعل هذا منطقي لأنّه لو تزايد الرقم فهذا يعني إمكانيّة- إذا كان n كبيرا بما فيه الكفاية- التنبؤ باللعبة الآتية. لكنّنا نعلم أنّ ذلك مستحيل، و هذا يبيّن إلى أيّ مدى أنّه غير معقول، كما نراه للأسف باستمرار عند لاعبي الكازينوهات، المخاطرة، بطريقة منتظمة، على الأرقام التي ظهرت

الأقل في الماضي. حين تؤول n إلى∞ نجد المكافئ الآتي:
(مع الرمز $\frac{U_n}{V_n} \to 1 \leftrightarrow U_n \sim V_n$)

$$P(T = 2n) \square \frac{1}{(2n-1)\sqrt{pn}} \square \frac{1}{2n\sqrt{pn}}$$

و هذا يبيّن أنّ توقّع T لا متناهٍ، بما أنّه معرف بالقاعدة $E(T) = \sum_{n=1}^{0} 2n\,P(T = 2n) = \infty$ هذه الخاصيّة الأخيرة ينتج عنها أنّه باحتمال ١ حين يؤول n إلى ∞ , $\frac{1}{n}(T_1 + \cdots . T_n) \to \infty$

هذه النتيجة تبدو متناقضة، حيث إنّنا نميل إلى الاعتقاد أن توقّع الوقت الذي يفصل عبوريين لـ S_{2n} بالصفر يمكن أن يكون محدودًا، و لكن العكس هو ما يحدث. هذا يعني أنّ أوقات إقامة S_n في المنطقة $\{S_n > 0\}$او $\{S_n < 0\}$ التي احتمال قصرها ليس صغيرًا، يمكن خاصّة أن تكون طويلة جدًّا مع احتمالات مرتفعة. هكذا إذن في لعبة متوازنة و طويلة الأمد الحظ يميل إلى التفضيل و بصفة مستمرة و لفترات طويلة لأحد اللاعبين. هذا يوضح مبدأ إصرار الحظ.

هذه النتيجة الغريبة، يمكن أن نقدّم لها وصفًا أفضل بقانون Arcsin (معكوس الجيب) الذي نتحدّث عنه في الباب الخامس عشر. في مصطلحات اللّعب، إذا سمّينا تعويضًا كلّ مرة تمرّ فيها S_n بالصفر، عدد التعويضات المشاهدة في المدة 1,2,......,n يتزايد بسرعة أقلّ بكثير من n بمعنى آخر التعويض يصبح أكثر ندرة حين تزيد مدّة المشاهدة !

هل في هذا تناقض؟ ما نميل إلى اعتقاده هو الآتي: إذا شاهدنا الفترة 1,2,...,..,..,n ثم الفترة n+1,.....2n عدد التعويضات التي نشاهدها لها القانون نفسه، و لذلك سوف يكون هناك- في المتوسّط- في 1,.2,....2n ضعف ما هناك في 1,....n هذا يعني أنّنا نسينا أنّ التعويض معرّف من نقطة الانطلاق $S_0 = 0$ و بسبب ذلك عدد التعويضات في n+1,... 2n (حيث نقطة الانطلاق ليست صفرًا بالضرورة) ليس له التوزيع نفسه في 1,..n مطلقا (أين فرض أن $S_0 = 0$). يكفي أن نأخذ n=2 لنلاحظ أن $p(S_n = 0)$ تتغير مع n نجد القيم العدديّة.

$$P(S_2 = 0) = 50\%, P(S_4 = 0) = 37,5\%$$

الفصل الخامس عشر

قانون معكوس الجيب أو الغياب الأساسي للعدل في الطبيعة

اسم هذا القانون يعود الى معكوس الجيب $x \to \sin x$ المستمر Arcsinus المرموز له بالرمز

Arcsin (أو أحيانا $sin^{-1}X$ أو أيضًا Arcsinx) . هذه الدالة تعرف بالتكامل :

$$Arc\sin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

سوف نستعمل هذه الدالة بعد تغييرات بسيطة. لنذكر أنها تحقّق:

$$\sin(Arc\sin x) = x, -1 \le x \le 1$$

$$Arc\sin(\sin x) = x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

نأخذ كما في الباب الثاني عشر، متتالية ألعاب قفا ووجه مستقلّة و متوازنة S_n ترمز لربح اللّاعب بعد n لعبة . نرمز بـ ε_{2n} لعدد العناصر S_j من بين $S_1, \ldots. S_{2n}$ بحيث إما $S_j < 0$ أو $S_j = 0$ و $S_{j-1} < 0$ من ناحية أخرى نرمز بـK_{2n} لـ $K_{2n} = \max\{k, 0 \le k \le n, S_{2k} = 0\}$ موقع اخر مؤشر $k \le n$ بحيث $S_{2k} = 0$. نجد

$$P(\varepsilon_{2n} = 2k) = P(K_{2n} = 2k) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$$

k=0,1,…,n

حين تؤول n إلى ∞ القسمة $\frac{K_{2n}}{2^n}$ للوقت المنقضي لـ $S_1 \ldots, \ldots S_{2n}$ في المنطقة الموجبة بالنسبة لـ 2n لعبة تؤول نحو النهاية

$$\lim_{n \to \infty} P(\frac{\varepsilon_{2n}}{2n} \le x) = \lim_{n \to \infty} (\frac{K_{2n}}{2n} \le x) = \frac{2}{\pi} Arc\sin\sqrt{x}, 0 < x < 1$$

كثافة هذا القانون، أي $0<x<1$, $f(x)=\frac{d}{dx}(\frac{2}{p}Arc\sin\sqrt{x})=\frac{1}{p\sqrt{x(1-x)}}$ غير محدودة عند ١ و ٠ ما يثبت عكس المعقول الذي يريد أنّه في حالة لعبة طويلة فإنّ فترات الربح لكلا اللاعبين "تكون متقاربة ما يحدث هو أنّ أحد اللاعبين يكون في غالب الوقت في حالة ربح و الأخر يمكث في حالة خسارة".

لنسمّي Aمتغيّرًا عشوائيًا يتبع قانون نهاية $\frac{K_{2n}}{2n}$ لنعط بعض القيم العدديّة لتوزيع A بالاكتفاء بحالة $0 \leq A \leq \frac{1}{2}$ التي تقابل بقاء S_n في أغلب الوقت موجبة. في هذه الحالة نجد الاحتمالات الآتية:

$\alpha = 0{,}001$	$P\left(A \leq \alpha / A \leq \frac{1}{2}\right) = 4{,}03\%$
0,005	**9,01%**
0,01	**12,75%**
0,05	**28,71%**
0,1	**40,97%**
0,2	**59,03%**
0,25	**66,66%**
0,30	**73,80%**
0,40	**87,18%**
0,50	**100,00%**

هذا يفسر قليلًا بعض الوضعيات، في ألعاب متوازنة، حيث نلاحظ أنّه تقريبًا في كلّ الحالات يستحوذ أحد اللاعبين على كلّ فرص النجاح بعيدًا عن كلّ منطق مساواة.

نترك للفلاسفة و علماء الاجتماع استخلاص النتائج التي يريدونها من هذا القانون المدهش و غير المتوقّع.
قانون Arcsinus اكتشف من طرف

Paul levy (1939) Sparre– Andersen (1949), Kac et Erdos (1947) et Chung Feller (1950)

من النتائج لهذا- يمكن أن تكون في لعبة بين خصمين، و بفرص للكسب متساوية- من المحتمل أنّ واحدًا من الاثنين يكسب " كلّ الوقت" و (ليس بالضرورة الأفضل بما أنهما نظريًّا متساويان)

الفصل السادس عشر

نظريّة التوقّف الأمثل والبرهان الرياضي
إنّه من الأفضل عدم اللّعب في الكازينو

من بين الأسباب التي من أجلها تلقى ألعاب المصادفة نجاحًا كبيرًا هو أنّها تعرض ألعابًا لصالح دور اللّعب و لكن اللّاعب يحتفظ بالحريّة الدائمة لاستراتيجيته و قبول أو رفض المخاطرة، هنا تحدٍّ بين نسبة الاحتمال و ذكاء اللّاعب و كثيرون يميلون إلى رفع التحدي.

مشكلات أخرى لا علاقة لها باللّعب تنطبق على هذا النموذج. من بين هذه المسائل يمكن أن نذكر مسائل صناعيّة مرتبطة بالقرارات الإحصائيّة في إطار مراقبة الجودة. هذه المسائل أهم من مجرّد أسئلة بسيطة عن استراتيجية اللّعب في الكازينو.

كمثال لنأخذ حالة وسيط يعرض عليه بيع حمولة غلال. يكون أمامه خيار من الصنف الآتي: إذا كانت نسبة الغلال غير الصالحة أقل من 10% يكسب10000€. إذا كانت النسبة أكبر من 10% هناك احتمال أن لا يبيع الحمولة و تكون خسارته 20000€ قراره يجب أن يؤخذ بالاعتماد على عيّنات مأخوذة من الحمولة التي تكلّفة التحليل الكامل لها تساوي 1000€ لكلّ عيّنة و تقدّم له النتيجة في الشكل " هناك X_n حبة غير صالحة من بين Y_n حبة في العينة n "

أيّ استراتيجية يتبنّاها الوسيط في مثل هذا الإطار؟ يمكن أن يقرّر عدم الشراء أو الشراء أو يطلب عيّنة إضافيّة على حسابه. من الطبيعي أن نبحث عن طريقة القرار التي يجب تبنّيها للحصول على الكسب الأكبر. نجد في شكل مختلف مسألة لعب (المخاطرة أو عدم المخاطرة و بأيّ طريقة) مثل هذه المسائل حلّت على المستوى الرياضي في عدد كبير من الحالات.

سوف نكتفي هنا بذكر حالة معروفة أكثر من غيرها حالة التوقف الأفضل المنتهى.

نأخذ في هذه الحالة، متتالية متغيّرات $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_N$ نعرف تركيبتها الاحتماليّة، و نأوّلها بأنّها تمثل الأرباح المتتالية للاعب في متتالية ألعاب متكررة . في كلّ مرحلة من اللّعب، للاعب الخيار أن يواصل اللّعب أو أن يتوقف. شكليًّا، بعد لعب k لعبة و معرفة $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k$ للألعاب السابقة يأخذ اللّاعب قراره إمّا بمواصلة اللّعب أو التوقّف و الحصول على S_k. استراتيجية توقّف مثل هذه مكافئة لأن نعطي وقت توقف τ، يأخذ قيمة بين ٠ وn و حيث المعطى $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k$ يحدّد إذا كان الحدث $\{\tau = k\}$ سيتحقّق أم لا. بالتّأكيد يتأثر وقت التوقّف بالأعداد العشوائيّة $S_N \ldots S_0$ وهو أيضًا متغيّر عشوائي. المسألة الأساسيّة تكمن في تحديد- من بين كلّ الخيارات الممكنة- وقت التوقف τالذي يحقّق شرط الأمثليّة مرتبطًا بمجموع المشاهدات قبل τ. مثال قياسي لشرط الأمثليّة معطى بتوقّع الكسب$E(S_\tau)$ عند وقت التوقف. سوف نسعى إلى أن نحصل على توقّع الكسب الأكبر. المسألة مطروحة بهذا الشكل حلّت كليًّا في ١٩٦٣ من طرف

Chow and Robbins (K. L.Chow H.Robbins 1963 On optimal stopping rules .z. Wahrscheinlichkeits – theorie 2, 33-49

(D.Siegmund (1967)

Some problems in the theory of optimal stopping rules Ann .Math. Statistics ,38,1627-1640)

K.L.Chow, H.Robbins and D.Siegmund

Great expectations: the theory of optimal stopping Houghton – Mifflin

لا نستطيع هنا أن نصف بناء وقت التوقف الأمثل الذي نادرًا ما يكون تعبيره بسيطًا و مرتبطًا بـ

$S_0, \dots, S_1 \dots .., S_N$. سوف نكتفي بإعطاء تطبيق لنتائجه نحصل عليها في حالة خاصّة. نتحدّث هنا عن لعبة كلاسيكيّة ذات المخاطر المتكرّرة و المتساوية. في هذه الحالة المكسب عند اللعبة n هو المبلغ المتراكم لمسار عشوائي $S_n = S_0 + \cdots .. S_n$ حيث $X = X_1, \dots, X_i$ مستقلّة و ذات القانون نفسه بحيث $P(X = 1) = p$ (احتمال الربح)و $P(X = 0) = 1 - p$ (احتمال الخسارة)ما هو إذن وقت التوقف الذي يجعل توقّع الكسب الأكبر ممكنًا ؟ الجواب هو- مطابق للمعقول- أنّه من بين كلّ الاستراتيجيّات الممكنة للعب الأفضل على الإطلاق هي أن لا نلعب بالمرّة هذه النتيجة يمكن استنتاجها من تمهيدية Wald التي تبرهن أنّه (تحت بعض شروط الانتظام)

$$E(S_\tau) = E(X)E(\tau) = (p - q)E(\tau)$$

كتطبيق لهذه القاعدة إذا كانت اللعبة خاسرة $(p < q)$ أو متوازنة $(p = q = 1/2)$ نلاحظ أن $E(S_\tau) \leq 0$ و هذه القيمة سالبة إذا كان $E(\tau) > 0$ و $p < q$. لكي نجعل $E(S_\tau)$ الأكبر حلّ واحد يفرض نفسه، و هو أن نختار τ=0 و هذا يعني عدم اللّعب أصلًا. علينا أن نذكر أنّ هذه النتيجة تبقى صحيحة (مع بعض التغيرات) إذا كانت المتغيّرات $X_1, X_2 .. X_n$ مستقلّة و لكن ليس لها القانون نفسه انظر (1947) Wald « Sequential Analysis » ,New-York Wiley

هكذا إذن الدليل- أنّه ليس عقلانيًّا أن نلعب- موجود. مع ذلك لا نعتقد أنّ مثل هذه الحجّة يمكن أن تغيّر موقف محبّي البساط الأخضر. البحث عن الربح الأفضل ليس دون شك الشرط المتحكم في استراتيجية تؤدّي للأسف، غالبًا إلى الإفلاس. ليس من غير المهم أن نسوق الملحوظة هنا أنّ أغلب التطورات التي ذكرناها هي حديثة جدًّا، بل و معاصرة إلى حدٍّ ما. لذلك ليس من المفاجئ أن تبقى- غالبًا- بعيدة عن اهتمام الناس. نأمل أن نكون قد ساهمنا في نشر هذه التطوّرات.

المحتويات

عن الكتاب:

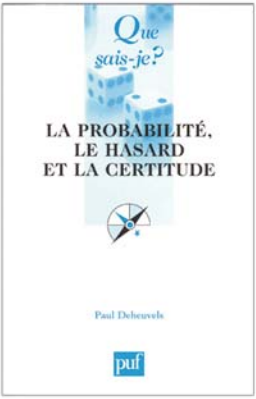
يتناول الكتاب مسألة المصادفة واليقين ويربطهما بالنظرية الرياضية للاحتمالات التي شهدت تطورا كبيرا في أواخر القرن التاسع عشر و النصف الأول من القرن العشرين. ينطلق الكاتب من ألعاب الحظ المختلفة كلعبة الزهر ولعبة المتدحرج ليقدم المفاهيم الأساسية في نظرية الاحتمالات مثل: الاحتمال والتوقع والمتغيرات العشوائية وتوزيعاتها. يبين الكاتب أنه في صورة تكرار لعبة ما عدد غير منته من المرات يصبح التأسيس الرياضي ضروري للحديث عن التوقع والاحتمال، ولاحتواء ما يمكن أن يبدو منسجما أو متناقضا مع الحدس. يتطرق الجزء الأكبر من الكتاب إلى نظريات تقارب معدلات المتغيرات العشوائية وعلاقتها بالتوقع وتوزيع نهاية المعدلات في حالة التقارب ومختلف التطورات التي حصلت لهذه النظريات عبر التاريخ. يتطرق الكتاب أيضا للتطبيقات المختلفة لهذه النظريات في مجالات مثل: الفيزياء ونظرية الأعداد. يتضمن الكتاب مراوحة بين التناول للإطار التاريخي -الذي تدرجت فيه أسس نظرية الاحتمالات ومختلف المساهمين في تطويرها- وبين الذكر الدقيق للنظريات وربطها بالألعاب لتبسيطها وتقديمها لعامة القراء غير المتخصصين وهو الهدف المنشود من الكتاب.

المؤلف:

بول دوهوفيلز: أستاذ من الدرجة الاستثنائية بجامعة بيار وماري كوري بباريس، مدير مركزبحث الإحصاء النظري والتطبيقي منذ سنة ١٩٨٢م، إضافة إلى عضوية عدد من الجمعيات والمؤسسات الأكاديمية.

المترجم:

د.حسين صدراوي: أستاذ مساعد بقسم الرياضيات جامعة الملك سعود، حاصل على الدكتوراه في الرياضيات من جامعة بوردو Purdue بالولايات المتحدة الأمريكية سنة ١٩٩٢م.



مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

تعمل مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية على توفير المعرفة للقارئ العربي. فقامت في هذا الإطار بنشر سلسلة من الكتب والمجلات العلمية وأتاحتها للقراء دون مقابل بصيغتيها الرقمية والورقية. فجميع إصدارات المدينة متاحة على موقعها الإلكتروني ليتمكن المتصفح من تحميلها أو قراءتها على الإنترنت.

هاتف: ٠١١ ٤٨٨٣٤٤٤ - ٠١١ ٤٨٨٣٥٥٥
فاكس: ٠١١ ٤٨٨٣٧٥٦
ص.ب. ٦٠٨٦ الرياض ١١٤٤٢
المملكة العربية السعودية
مدينة الملك عبدالعزيز للعلوم والتقنية

الموقع الالكتروني: www.kacst.edu.sa
إصدارات المدينة: publications.kacst.edu.sa
البريد الالكتروني: awareness@kacst.edu.sa

مطابع مدينة الملك عبدالعزيز للعلوم والتقنية
رقم: ٣٤٠٢٠٩
ردمك: ٩٧٨-٦٠٣-٤٠٤٩-٧٨-٥