الهندسة الفضائية

الثالث الثانوي - القسم العلمي.

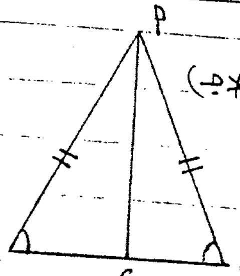
أ/ محمد عبد الجليل

أولاً: معلومات لابد منها في الهندسة المستوية:

١- مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة تساوي ١٨٠°.

٢- المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر.

٣- المستقيمات العموديات على مستقيم واحد متوازيات.



شكل (١)

٤- في المثلث المتساوي الساقين: (شكل (١))

- قياسا زاويتي القاعدة متساويات. أي: ق(∠ب) = ق(∠جـ)
- منصف زاوية الرأس عمودي على القاعدة وينصفها.

أي: إذا كان: ق(∠ب أ ء) = ق(∠جـ أ ء)

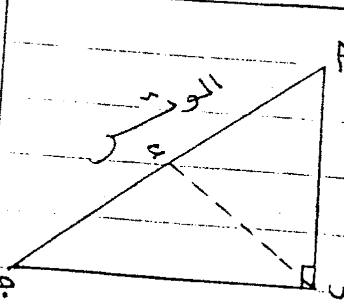
فإن: أء ⊥ ب جـ و ء منتصف ب جـ

- المتوسط عمودي على القاعدة وينصف زاوية الرأس.

أي: إذا كان: ء منتصف ب جـ (|ب ء| = |ء جـ|)

فإن: أء ⊥ ب جـ و ق(∠ب أ ء) = ق(∠جـ أ ء).

- الارتفاع ينصف القاعدة وينصف زاوية الرأس.



شكل (٢)

٥- في المثلث أ ب جـ القائم في ب: شكل (٢)

- القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر تساوي نصف الوتر.

أي: إذا كان ء منتصف الوتر أ جـ (|أ ء| = |ء جـ|)

فإن: |ب ء| = $\frac{1}{2}$ |أ جـ|

- الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوي نصف الوتر.

أي: إذا كان: ق(∠أ جـ ب) = ٣٠° فإن: |أ ب| = $\frac{1}{2}$ |أ جـ|

- مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين القائمين. ((فيثاغورث))

أي: |أ جـ|^2 = |أ ب|^2 + |ب جـ|^2.

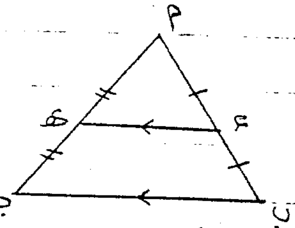
جاجـ = المقابل / الوتر = |أ ب| / |أ جـ| ، جتاجـ = المجاور / الوتر = |ب جـ| / |أ جـ|

- ظاجـ = المقابل / المجاور = |أ ب| / |ب جـ|

٦- مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع.

- مساحة المستطيل = الطول × العرض.
- مساحة المربع = مربع طول ضلعه = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب قطريه.
- مساحة المعين = القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب قطريه.
- مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين × الارتفاع = القاعدة المتوسطة × الارتفاع.

٧. القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه:



شكل ١٣

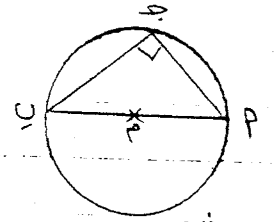
أي: في شكل ١٣ أ ب جـ مثلث

اذا كان: ء منتصف أب (|أء| = |ب ء|)

و هـ منتصف أجـ (|أهـ| = |هـ جـ|)

فإن: ءهـ // ب جـ و |ءهـ| = $\frac{1}{2}$ |ب جـ|

٨. الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة.

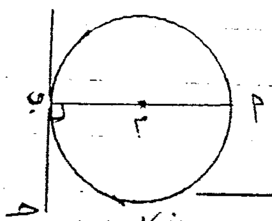


شكل ١٤

أي: في شكل ١٤ ق (∠ أ جـ ب) = ٩٠°.

وبالعكس: الزاوية المحيطية القائمة تقابل قوساً دائرياً يساوي نصف محيط الدائرة.

٩. مماس الدائرة عمودياً على القطر المار بنقطة التماس.



شكل ١٥

أي: في شكل ١٥ أب ⊥ جـ ن

١٠. حالات تطابق مثلثين:

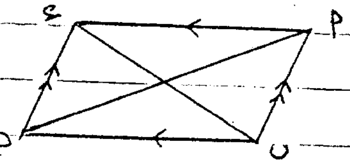
١. تطابق الأضلاع الثلاثة المتناظرة.

٢. تطابق ضلعين وزاوية محصورة بينهما.

٣. تطابق زاويتين وضلع.

٤. تطابق وتر وضلع اذا كان المثلثات قائمين.

١١. الأشكال الرباعية:



شكل ١٦

أ. متوازي الأضلاع: شكل رباعي يحقق (شكل ١٦):

- كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين.
- كل زاويتين متقابلتين متساويتين.
- القطران ينصف كلٌّ منهما الآخر.

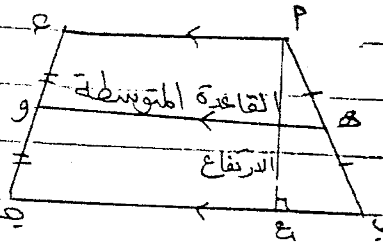
ب. المستطيل: هو متوازي أضلاع يحقق:

- زواياه قوائم. - قطراه متساويات.

جـ - المربع : هو مستطيل يحقق :
- أضلاعه متساوية .
- قطراه متعامدان . (متساويان ومتناصفان) .
- نقطة تقاطع القطرين تسمى مركز المربع .

ء . المعين : متوازي اضلاع يحقق :
- أضلاعه متساويه .
- قطراه متعامدان . (متناصفان وغير متساويين)

هـ . شبه المنحرف : شكل رباعي فيه :
- ضلعان متقابلان متوازيان وغير متساويات (قاعدتا شبه المنحرف)
- ضلعان غير متوازيان . (ساقا شبه المنحرف) .
- قطراه غير متساويان وغير متعامدان وغير متناصفان .

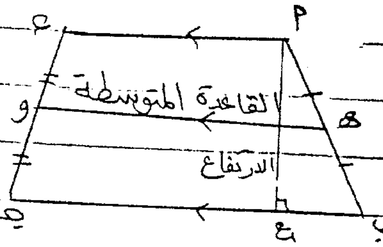


و . شبه المنحرف المتساوي الساقين :
- الضلعين الغير متوازيين (الساقين) متساويين .
- القطران متساويات .
- زاويتا القاعدة متساويتان .

ج- المربع: هو مستطيل يحقق:
- أضلاعه متساوية.
- قطراه متعامدان. (متساويان ومتناصفان).
- نقطة تقاطع القطرين تسمى مركز المربع.

د- المعين: متوازي أضلاع يحقق:
- أضلاعه متساوية.
- قطراه متعامدان. (متناصفان وغير متساويين)

هـ- شبه المنحرف: شكل رباعي فيه:
- ضلعان متقابلان متوازيان وغير متساويان (قاعدتا شبه المنحرف)
- ضلعان غير متوازيان. (ساقا شبه المنحرف).
- قطراه غير متساويان وغير متعامدان وغير متناصفان.



و- شبه المنحرف المتساوي الساقين:
- الضلعين الغير متوازيين (الساقين) متساويين.
- القطران متساويان.
- زاويتا القاعدة متساويتان.

ثانياً: مُراجعة لما سبق دراسته في الهندسة الفضائية:

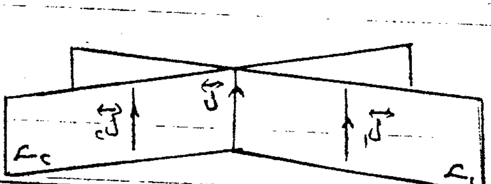
١ـ المستوي: مجموعة غير منتهية من النقاط مُمتد ليس له سُمك، بحيث ينطبق عليه أي مستقيم في جميع الاتجاهات.

ـ حالات تعيين مستوي:
① مستقيمان متقاطعات ② مستقيمان متوازيات. ③ مستقيم ونقطة لا تقع عليه.
④ ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

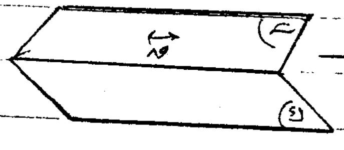
ـ الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء:
① متوازيان (يجمعهما مستوي واحد) ② متقاطعان (يجمعهما مستوي واحد)
③ منطبقان (حالة خاصة من التوازي). ④ متخالفان (لا يجمعهما مستوي واحد).

ـ الأوضاع النسبية لمستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ ومستوي ع في الفضاء:
① $\overleftrightarrow{ل} \parallel$ ع $\Leftrightarrow \overleftrightarrow{ل} \cap$ ع $= \phi$ ② $\overleftrightarrow{ل}$ يقطع ع $\Leftrightarrow \overleftrightarrow{ل} \cap$ ع $= \{ب\}$.
③ ل $\subset$ ع ($\overleftrightarrow{ل}$ يقع في ع) أي $\overleftrightarrow{ل} \cap$ ع $= \overleftrightarrow{ل}$ وأيضاً: $\overleftrightarrow{ل} \parallel$ ع.

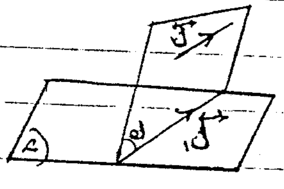
ـ الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء:
① متوازيان ($ع_١ \cap ع_٢ = \phi \Leftrightarrow ع_١ \parallel ع_٢$)
② متطابقان ($ع_١ \cong ع_٢$) وهي حالة خاصة من التوازي.
③ متقاطعان أي يشتركان في خط مستقيم يُسمى بالفصل المشترك.
($ع_١ \cap ع_٢ = \overleftrightarrow{ل}$ حيث $\overleftrightarrow{ل} \subset ع_١$، $\overleftrightarrow{ل} \subset ع_٢$).



٢ـ إذا مرّ في مستقيمين متوازيين $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ مستويان مختلفان وغير متوازيان $ع_١$ ، $ع_٢$ فإن فصلهما المشترك $\overleftrightarrow{ل}$ يوازي كُلاً من $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$.
$\overleftrightarrow{ل_١} \parallel \overleftrightarrow{ل_٢} \wedge \overleftrightarrow{ل_١} \subset ع_١ \wedge \overleftrightarrow{ل_٢} \subset ع_٢ \wedge ع_١ \cap ع_٢ = \overleftrightarrow{ل} \Leftarrow \overleftrightarrow{ل} \parallel \overleftrightarrow{ل_١} \parallel \overleftrightarrow{ل_٢}$



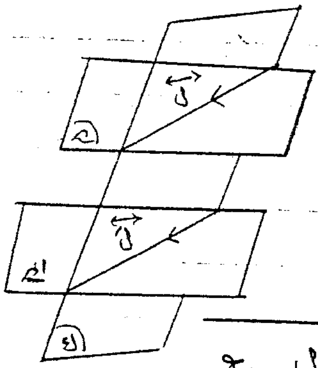
٣ـ المستقيم الموازي لمستويين مُتقاطعين يوازي فصلهما المشترك.
ع $\cap$ ك $= \overleftrightarrow{م} \wedge \overleftrightarrow{ل} \parallel$ ع $\wedge \overleftrightarrow{ل} \parallel$ ك $\Leftarrow \overleftrightarrow{ل} \parallel \overleftrightarrow{م}$



٤ـ إذا كان: $\overleftrightarrow{ل}$ مستقيماً يوازي مستوياً ع
وكان ك مستوياً يمر بالمستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ ويقطع ع وفق $\overleftrightarrow{ل_١}$
فإن: $\overleftrightarrow{ل} \parallel \overleftrightarrow{ل_١}$

المتفوق في الرياضيات | الهندسة الفضائية ثالث ثانوي علمي | أ/ محمد عبد الجليل

٥. إذا قطع مستوٍ ك مستويين متوازيين ح، ح' وفق المستقيمين المشتركين ل، ل' على الترتيب فإن: ل // ل'.



٦. يتوازى مستويان إذا توازى مستقيمان متقاطعان في الأول مع مستقيمين متقاطعين في الثاني.

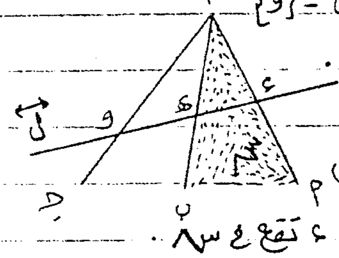
٧. إذا كان المستقيم ل يوازي مستقيماً ل١ من مستوي ح فإن: ل // ح.
«أي لإثبات أن مستقيماً يوازي مستوياً نثبت أن هذا المستقيم يوازي مستقيماً في المستوى».

٨. إذا اشترك مستويان بنقطة فإنهما يشتركان بمستقيم يمر بتلك النقطة. «يسمى المستقيم بالفصل المشترك أو مستقيم تقاطعهما».

المتفوق في الرياضيات   الهندسة الفضائية   أ/ محمد عبد الجليل
ثالث ثانوي - علمي

تمارين محلولة:

[١] م أ ، م ب ، م جـ ثلاثة مستقيمات في الفضاء ، ل مستقيم رابع يقطعها في ء ، هـ ، و على الترتيب.
برهن أن: المستقيمات الأربعة تقع في مستوٍ واحد.

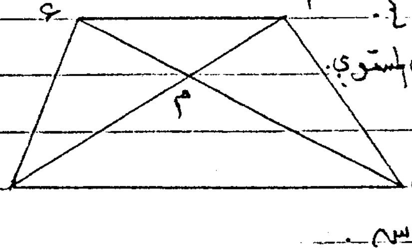


المعطيات: ① م أ ∩ ل = {ء} ② م ب ∩ ل = {هـ} ③ م جـ ∩ ل = {و}

المطلوب: إثبات أن المستقيمات الأربعة في مستوٍ واحد.

البرهان: ∵ م أ ، م ب مستقيمان متقاطعان
∴ فهما يعينان مستوٍ واحد وليكن س ← (١)
∵ م أ ∩ ل = {ء} ∴ ء تقع على م أ أي أن ء تقع في س.
بالمثل هـ تقع في س. ∴ ء هـ ممتد من كلتا جهتيه واقع في س.
أي أن ل ⊂ س ← (٢)
∵ و على امتداد ء هـ أي {و} ⊂ ل وبالتالي و تقع في س.
∵ م واقعة في س ∴ م و ممتداً من كلتا جهتيه واقع في س.
أي أن: م جـ ⊂ س ← (٣)
من ① ، ② ، ③ : ينتج أن المستقيمات الأربعة تقع في مستوٍ واحد س.

[٢] إذا كان قطرا الشكل الرباعي متقاطعان ، فاثبت أن: جميع أضلاعه تقع في مستوٍ واحد.



المعطيات: ① أ ب جـ ء شكل رباعي ② أ جـ ∩ ب ء = {م}.
المطلوب: إثبات أن: أ ب ، أ ء ، ب جـ ، جـ ء تقع في نفس المستوي.
البرهان: ∵ أ جـ ، ب ء متقاطعان في م
∴ فهما يعينان مستوي يحويهما يكن س.
∴ أ جـ ⊂ س ∴ أ ∈ س ، جـ ∈ س.
∵ ب ء ⊂ س ∴ ب ∈ س ، ء ∈ س.
∴ أ ب ⊂ س ، أ ء ⊂ س ، ب جـ ⊂ س ، جـ ء ⊂ س.

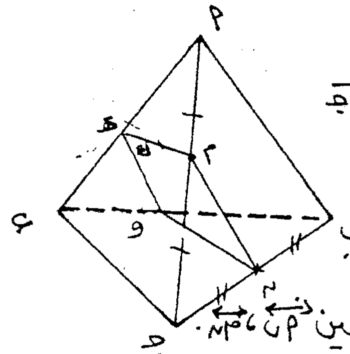
[٣] أ ب جـ ء رباعي غير مستوي (أي أضلاعه لا تقع في مستوي واحد)
فيه م ، ن منتصفي الحرفين أ جـ ، ب جـ على الترتيب. رسم مستوي ل يحوي
المستقيم م ن ويلاقي الحرفين ب ء ، أ ء في و ، هـ بالترتيب.

والمطلوب: ① اثبات أن $\overleftrightarrow{من}$ ، $\overleftrightarrow{هو}$ يوازيان $\overleftrightarrow{أب}$

② إذا كانت و منتصف $\overline{بد}$. اثبت أن الشكل م ن و هـ متوازي أضلاع.

المعطيات: ① م منتصف $\overline{أجـ}$ ② ن منتصف $\overline{بجـ}$ ③ $\overleftrightarrow{من} \not\subset$ ك

المطلوب: هـو ∥ ب د .



البرهان: ① في △ أ ب جـ : ∵ م منتصف $\overline{أجـ}$ ، ن منتصف $\overline{بجـ}$

∴ $\overline{من} \parallel \overline{أب}$ و $|من| = \frac{1}{2}|أب|$

، ∵ المستويان (أ ب د) ، (م ن و هـ) ∋ ك

يشتركان في هـ ، و أي فصلهما المشترك $\overleftrightarrow{هو}$

وحيث أن المستويين يمران بالمستقيمين المتوازيين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{من}$

∴ $\overleftrightarrow{وهـ} \parallel \overleftrightarrow{من} \parallel \overleftrightarrow{أب}$ ①

② في △ أ ب د : ∵ و منتصف $\overline{بد}$ ، $\overleftrightarrow{وهـ} \parallel \overleftrightarrow{أب}$ ∴ هـ منتصف $\overline{أد}$.

∴ $|هو| = \frac{1}{2}|أب|$ وحيث أن $|من| = \frac{1}{2}|أب|$ (اثباتاً)

∴ $|هو| = |من|$

أي أن $\overline{هو} \parallel \overline{من}$ ويساويه. فيكون الشكل م ن و هـ متوازي أضلاع ②

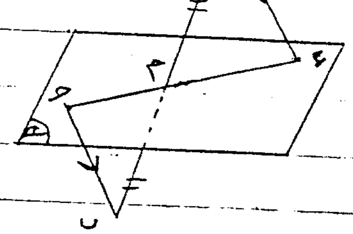
---

٤ $\overleftrightarrow{أب}$ مستقيم يقطع المستوي ـ في م . حيث $|أم| = |م ب|$ ، د ، جـ نقطتين من المستوي ـ . حيث: $\overleftrightarrow{أد} \parallel \overleftrightarrow{جـب}$. برهن أن:

① د ، م ، جـ على استقامة واحدة . ② $|دم| = |م جـ|$

الحل: المعطيات: ① $|أم| = |م ب|$ ② $\overleftrightarrow{أد} \parallel \overleftrightarrow{جـب}$ ③ $\overleftrightarrow{أب} \cap ـ = \{م\}$ ④ د ، جـ ∈ ـ

المطلوب: اثبات أن ① د ، م ، جـ على استقامة واحدة ② $|م د| = |م جـ|$



البرهان: ① ∵ $\overleftrightarrow{أد} \parallel \overleftrightarrow{جـب}$ ∴ فهما يعينان مستوى ولكن س

∵ أ ∈ س ، ب ∈ س ∴ $\overleftrightarrow{أب} \subset$ س

، ∵ م ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ∴ م ∈ س .

، ∵ م ∈ ـ ∴ م ∈ (س ∩ ـ)

، ∵ س ∩ ـ = $\overleftrightarrow{جـد}$ ∴ م ∈ $\overleftrightarrow{جـد}$

أي أن د ، جـ ، م على استقامة واحدة . ①

② في △△ أ م د ، ب م جـ
- $|أم| = |ب م|$ (معطى)
- ق(∠أ م د) = ق(∠ب م جـ) بالتقابل بالرأس
- ق(∠د أ م) = ق(∠جـ ب م) بالتبادل

∴ يتطابق المثلثان أي △ أ م د ≅ △ ب م جـ فيكون $|م د| = |م جـ|$ ②

المستقيمات والمستويات المتعامدة.

١- المستقيم العمودي على مستوي:

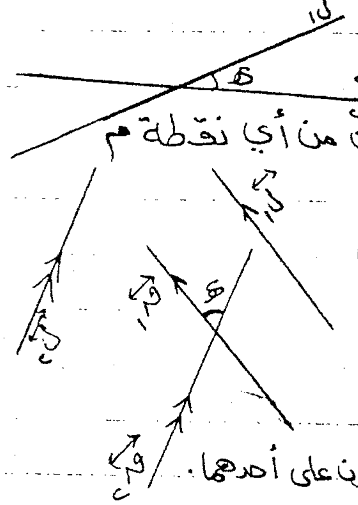
تعريف ١/١/ الزاوية بين مستقيمين ل١ ، ل٢ :

أ. اذا كان المستقيمان في مستوي واحد فإن:

المستقيمين يصنعان بينهما زاويتين متكاملتين زاوية المستقيمين هي الزاوية غير المنفرجة بينهما . (أي الحادة أو القائمة).

ب. اذا كان المستقيمان ل١ ، ل٢ في الفضاء:

فإن زاوية المستقيمين هي زاوية المستقيمين المرسومين من أي نقطة م من الفضاء والموازيين للمستقيمين ل١ ، ل٢ .



توضيح: لإيجاد زاوية المستقيمين ل١ و ل٢ في الفضاء: نرسم من نقطة م مستقيمين ق١ // ل١ ، ق٢ // ل٢

فتكون زاوية المستقيمين ل١ ، ل٢ هي الزاوية بين المستقيمين ق١ ، ق٢ حيث تنشأ لدينا الحالة (أ).

تنبيه: قياس زاوية المستقيمين لا يتأثر بموقع النقطة م . فقد تكون على أحدهما.

حقيقة: تعامد مستقيم ومستوي:

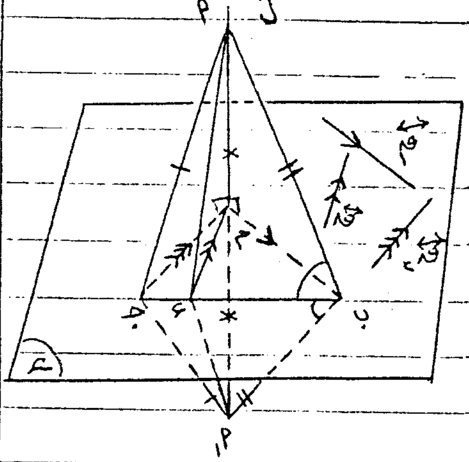
- اذا كان ل عمودياً على جميع مستقيمات المستوي ع فإنه عمودي على المستوي ع .

وبالعكس: اذا كان ل عمودياً على المستوي ع فإن ل عمودي على جميع مستقيمات المستوي ع .

مبرهنة [١]:

المستقيم العمودي على مستقيمين غير متوازيين (متقاطعين) من المستوي ع عمودي على ع

الاثبات:



المعطيات: ① ق١ ⊂ ع ، ق٢ ⊂ ع

② ق١ ∦ ق٢ ، (ق١ ، ق٢ متقاطعان)

③ ل ⊥ ق١ ، ل ⊥ ق٢

المطلوب: اثبات أن: ل ⊥ ع

فكرة البرهان:

اثبات أن ل عمودي على أي مستقيم في المستوى

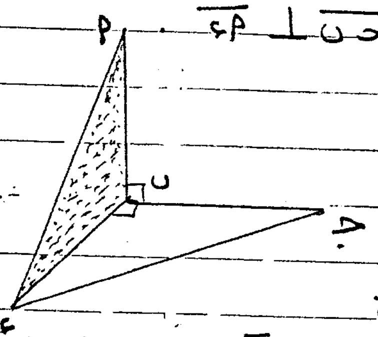
وليكن ق٣ ⊂ ع

العمل: (١) نرسم م ب // ق١ ، م جـ // ق٢ ، م ء // ق٣ .
(٢) نأخذ على ل النقطتين أ ، أ′ بحيث يكون |أ م| = |أ′ م|

البرهان: ∵ ل ⊥ ق١ ، ق١ // ب م
∴ ل ⊥ ب م ، ∵ م منتصف أ أ′ (عملاً)
∴ ب م ارتفاع ومتوسط في △ ب أ أ′ ∴ △ ب أ أ′ متساوي الساقين.
أي أن: |ب أ| = |ب أ′| .
بالمثل نجد |جـ أ| = |جـ أ′| في △ جـ أ أ′
∴ في △△ أ ب جـ ، أ′ ب جـ :
|ب أ| = |ب أ′| (اثباتاً)
|جـ أ| = |جـ أ′| (اثباتاً)
ب جـ ضلع مشترك
∴ △ أ ب جـ ≅ △ أ′ ب جـ (بثلاثة أضلاع) وينتج أن: ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ أ′ ب جـ)
∴ △ أ ء ب ≅ △ أ′ ء ب (بضلعين وزاوية محصورة بينهما).
∴ |أ ء| = |أ′ ء| أي أن △ ء أ أ′ متساوي الساقين وفيه
م منتصف القاعدة أ أ′ ، ∴ م ء ⊥ أ أ′ (م ء ارتفاع في △ ء أ أ′)
∴ ل ⊥ م ء ، ∵ م ء // ق٣ ∴ ل ⊥ ق٣ فيكون: ل ⊥ س
وهو المطلوب.

تذكر: ١- المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين في الفضاء عمودي على الآخر.
٢- لكي نثبت أن مستقيماً عمودياً على مستوٍ يكفي أن نبرهن أن هذا المستقيم عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي س .

أمثلة:
[١] ب جـ ء مثلث قائم في ب ، أ نقطة خارج المستوي (ب جـ ء) ، ب أ ⊥ ب جـ
اثبت أن: (١) جـ ب ⊥ المستوي (أ ب ء) (٢) جـ ب ⊥ أ ء .



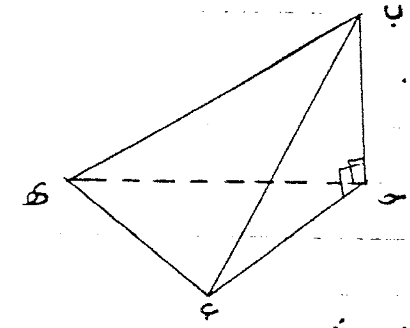
المعطيات: (١) △ ب جـ ء قائم في ب .
(٢) ب أ ⊥ ب جـ
المطلوب: اثبات أن:
(١) جـ ب ⊥ (أ ب ء) (٢) جـ ب ⊥ أ ء
البرهان: ∵ △ ب جـ ء قائم في ب ∴ جـ ب ⊥ ب ء
∴ جـ ب ⊥ أ ب (معطى) وحيث أن ب ء ، أ ب مستقيمين متقاطعين في

المستوي (أ ب ء) ∴ حـ ب ⊥ (أ ب ء) وهو المطلوب (١) .

∵ حـ ب ⊥ (أ ب ء) (إثباتاً) ، ∵ أء ⊂ (أ ب ء) ∴ حـ ب ⊥ أء ** (٢)

٢] ب ، جـ ، ء ، هـ أربع نقاط في الفضاء ، ب جـ ⊥ (جـ ء هـ) ، ب هـ² = ب جـ² + جـ ء² + ء هـ²

برهن أن ء هـ ⊥ (ب جـ ء) .



الحل: المعطيات: (١) ب جـ ⊥ (جـ ء هـ)

(٢) ب هـ² = ب جـ² + جـ ء² + ء هـ² .

المطلوب: إثبات أن: ء هـ ⊥ (ب جـ ء) .

البرهان: ∵ ب جـ ⊥ (جـ ء هـ) ∴ ب جـ ⊥ جـ ء

أي أن Δ ب جـ ء قائم في جـ

∴ ب ء² = ب جـ² + جـ ء² «مبرهنة فيثاغورث»

لكن ب هـ² = ب جـ² + جـ ء² + ء هـ² (معطى)

∴ ب هـ² = ب ء² + ء هـ² فيكون Δ ب ء هـ قائم في ء (عكس فيثاغورث)

∴ هـ ء ⊥ ء ب ← ①

∵ ب جـ ⊥ (جـ ء هـ) ∴ ب جـ ⊥ ء هـ أي هـ ء ⊥ ب جـ ← ②

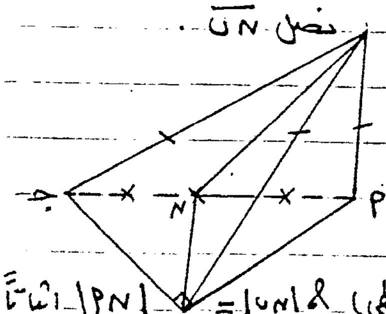
من ①، ② ∴ هـ ء ⊥ مستوي ب جـ ، ب ء

أي أن هـ ء ⊥ المستوي (ب جـ ء) . وهو المطلوب .

٣] م: أ ب جـ هرم ثلاثي فيه |م أ| = |م ب| = |م جـ| ، أ ب ⊥ ب جـ أخذت نقطة ن في منتصف أجـ . اثبت أن: م ن ⊥ (أ ب جـ) .

المعطيات: (١) |م أ| = |م ب| = |م جـ| (٢) أ ب ⊥ ب جـ (٣) ن منتصف أجـ

المطلوب: إثبات أن: م ن ⊥ (أ ب جـ) العمل: نصل ن ب .



البرهان: ∵ |م أ| = |م جـ| ∴ Δ م أ جـ متساوي الساقين

وفيه ن منتصف أجـ ∴ م ن ⊥ أ جـ ← ①

∵ أ ب ⊥ ب جـ ∴ Δ أ ب جـ قائم في ب

∴ |ن ب| = ½ |أ جـ| . أي |ن ب| = |ن أ|

في Δ م ن ب ، Δ م ن أ : م ن مشترك ، |م أ| = |م ب| (معطى) ، |ن ب| = |ن أ| إثباتاً

∴ Δ م ن ب ≅ Δ م ن أ ∴ ق(∡ م ن ب) = ق(∡ م ن أ) لكن ق(∡ م ن أ) = ٩٠°

∴ ق(∡ م ن ب) = ٩٠° أي أن م ن ⊥ ن ب ← ②

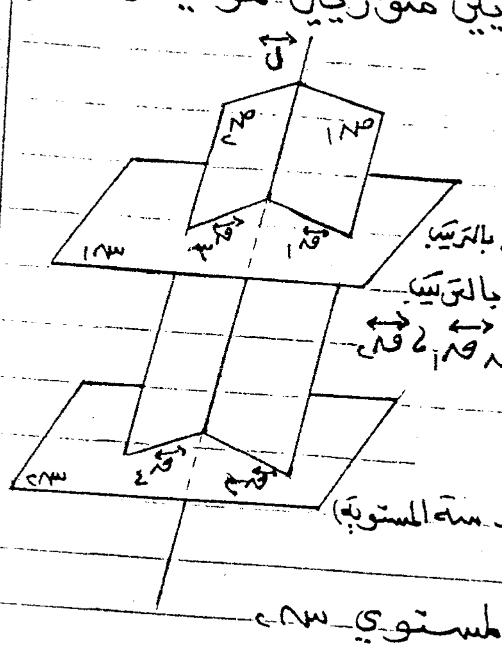
من ①، ② ∴ م ن ⊥ مستوى ن ب ، أجـ أي أن م ن ⊥ (أ ب جـ) ** .

[٤] أ ب جـ ء هرم ثلاثي . فإذا كان: ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ ب ء) = ٩٠° .
اثبت أن: جـ ء ⊥ أ ب .

[٥] أ: ب جـ ء هرم ثلاثي فيه |أ جـ| = |جـ ب| ، |أ ء| = |ء ب| ، ق (∠ أ هـ ء) = ٩٠°
فاثبت أن: جـ ء ⊥ المستوي (أ ب جـ)

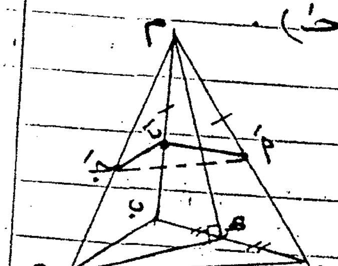
[٦] أ ب جـ ء هرم ثلاثي . فيه |أ جـ| = |أ ء| ، |ب جـ| = |ب ء| ، و منتصف
جـ ء ، رسم أ هـ ⊥ ب و قطعها في هـ . اثبت أن: أ هـ ⊥ المستوي (ب جـ ء)

مُبرهنة [٢] المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين عمودي على الآخر.



المعطيات: ① س١ // س٢ ، ② ل ⊥ س١
المطلوب: اثبات أن: ل ⊥ س٢
العمل: نرسم المستويين ص١ ، ص٢ متقاطعين في ل
بحيث ص١ يقطع س١ ، س٢ وفق ق١ ، ق٢ بالترتيب
و ص٢ يقطع س١ ، س٢ وفق ق٣ ، ق٤ بالترتيب
قاطع لهما وفق ق١ ، ق٢
البرهان: ∵ س١ // س٢ و ص١ قاطع لهما وفق ق١ ، ق٢
∴ ق١ // ق٢
∵ ل ⊥ س١ ∴ ل ⊥ ق١
وبالتالي ل ⊥ ق٢ ← ① (من الهندسة المستوية)
بالمثل نثبت أن: ل ⊥ ق٤ ← ②
∵ ق٢ ، ق٤ مستقيمين متقاطعين في المستوي س٢
∴ ل ⊥ س٢ وهو المطلوب .

مثال: م: أ ب جـ هرم ثلاثي فيه |م أ| = |م ب| وإذا كانت هـ منتصف أ ب
وكان: م هـ ⊥ هـ جـ .
① اثبت أن: م هـ ⊥ (أ ب جـ) ② إذا كانت أ′ ، ب′ ، جـ′ منتصفات الأحرف
م أ ، م ب ، م جـ بالترتيب فاثبت أن: م هـ ⊥ (أ′ ب′ جـ′) .



البرهان: ① ∵ |م أ| = |م ب| (معطى)
∴ ∆ م أ ب متساوي الساقين وفيه هـ منتصف أ ب
∴ م هـ ⊥ أ ب
، ∵ م هـ ⊥ هـ جـ (معطى)
⟸ م هـ ⊥ مستويهما (أ ب جـ)
وهو المطلوب أولاً .

② في △ م أ ب : ∵ أَ منتصف م أ ، بَ منتصف م ب ∴ أَبَ // أب ← (i)

وفي △ م ب ج : ∵ بَ منتصف م ب ، جَ منتصف م ج ∴ بَجَ // بج ← (ii)

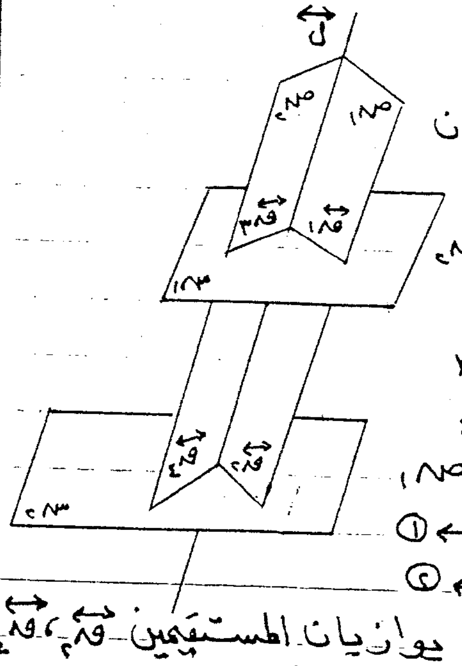
من (i) ، (ii) أَبَ ، بَجَ مستقيمين متقاطعين في المستوي (أَ بَ جَ) يوازيان المستقيمين أب ، بج بالترتيب والمتقاطعين في المستوي (أ ب ج)

∴ المستوي (أَ بَ جَ) // المستوي (أ ب ج)

وحيث أن م هـ ⊥ المستوي (أ ب ج) ∴ م هـ ⊥ المستوي (أَ بَ جَ).

وهو المطلوب.

مبرهنة ٣ المستويان العموديان على مستقيم واحد متوازيان.



المعطيات : ① ل ⊥ س١ ، ② ل ⊥ س٢ .

المطلوب : اثبات أن : س١ // س٢ .

العمل : نرسم المستويين ص١ ، ص٢ المتقاطعان في ل بحيث ص١ يقطع س١ ، س٢ وفق ق١ ، ق٢ على التوالي ، ص٢ يقطع س١ ، س٢ وفق ق٣ ، ق٤ على التوالي.

البرهان : ∵ ل ⊥ س١ ∴ ل ⊥ ق١ ، ل ⊥ ق٣

∵ ل ⊥ س٢ ∴ ل ⊥ ق٢ ، ل ⊥ ق٤

∴ ل ⊥ ق١ ، ق٢ الواقعة في مستوى واحد ص١

∴ ق١ // ق٢ (من الهندسة المستوية) ← ①

وبالمثل نجد أن : ق٣ // ق٤ ← ②

من ① ، ② ق١ ، ق٣ مستقيمين متقاطعين في س١ يوازيان المستقيمين ق٢ ، ق٤ المتقاطعين في س٢ ∴ س١ // س٢ . وهو المطلوب.

نتيجة : المستويات العمودية على مستقيم واحد متوازية.

تذكر : لاثبات توازي مستويان :

إما : أن نثبت أن مستقيمين متقاطعين في الأول يوازيان مستقيمين متقاطعين في المستوي الثاني.

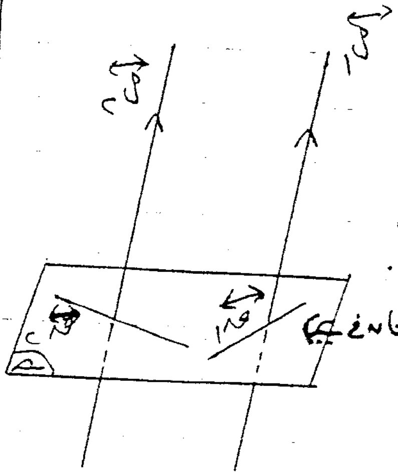
أو : نثبت أن المستويين عموديان على مستقيم واحد.

مبرهنة [٤]:
المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر.

المعطيات: ① ل١ // ل٢ ② ل١ ⊥ ي

المطلوب: اثبات أن: ل٢ ⊥ ي

العمل: نرسم في المستوي ي مستقيمين غير متوازيين ه١ ، ه٢



البرهان: ∵ ل١ ⊥ ي ∴ ل١ ⊥ ه١ ، ل١ ⊥ ه٢

و ∵ ل١ // ل٢ (معطى)

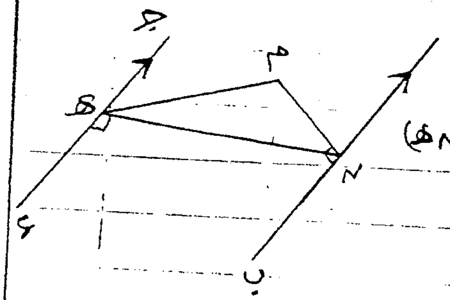
∴ ل٢ ⊥ ه١ ، ل٢ ⊥ ه٢ (ه١ ، ه٢ متقاطعان في ي)

∴ ل٢ ⊥ ي . وهو المطلوب

مثال١: أب ، جـ د مستقيمان متوازيان و م نقطة خارج مستويهما. أنزل م ن عمودًا على أب ويلاقيه في ن. ثم من ن أنزل عمودًا على جـ د لاقاه في هـ. اثبت أن: م هـ ⊥ جـ د

المعطيات: ① أب // جـ د ② م ن ⊥ أب ③ ن هـ ⊥ جـ د

المطلوب: اثبات أن: م هـ ⊥ جـ د



البرهان: ∵ أب // جـ د ∧ ن هـ ⊥ جـ د

∴ ن هـ ⊥ أب
و ∵ م ن ⊥ أب } ⇐ أب ⊥ المستوي (م ن هـ)

∵ أب // جـ د

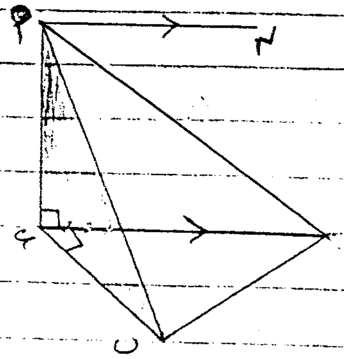
∴ جـ د ⊥ المستوي (م ن هـ)

∴ جـ د ⊥ كل مستقيم في المستوي (م ن هـ)

أي أن: جـ د ⊥ م هـ . وهو المطلوب.

مثال٢: أ.ب جـ د هرم ثلاثي فيه أد ⊥ (ب د جـ) و ق(∠ب د جـ) = ٩٠°
فإذا رسم أن يوازي د جـ. فاثبت أن أن ⊥ أب.

المعطيات: ① أ.ب جـ د هرم ثلاثي . ② أد ⊥ (ب د جـ) ③ ق(∠ب د جـ) = ٩٠°
④ أن // د جـ



المطلوب: إثبات أن: $\overline{أن} \perp \overline{أب}$

البرهان: ∵ $\overline{أء} \perp$ (ء ب جـ) ∴ $\overline{أء} \perp \overline{ءجـ}$

∵ ق(∠ ب ء جـ) = °٩٠ ∴ $\overline{جـء} \perp \overline{بء}$

∴ $\overline{جـء} \perp$ (أ ب ء)

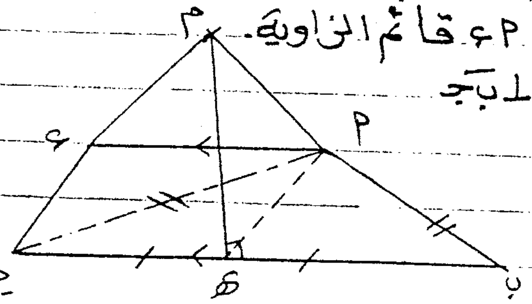
∵ $\overline{أن}$ // $\overline{ءجـ}$

∴ $\overline{أن} \perp$ (أ ب ء)

∴ $\overline{أن} \perp$ أي مستقيم في المستوي (ء أ ب)

∴ $\overline{أن} \perp \overline{أب}$ وهو المطلوب

مثال ٣: أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أء}$ // $\overline{بجـ}$ ، م نقطة خارج مستوي شبه المنحرف فإذا كان $\overline{مهـ} \perp$ بجـ حيث هـ منتصف بجـ وكان |أب| = |أجـ|. اثبت أن المثلث م أ ء قائم الزاوية.



المعطيات: ① $\overline{أء}$ // $\overline{بجـ}$ ② $\overline{مهـ} \perp$ بجـ

③ |ب هـ| = |هـ جـ|

④ |أب| = |أجـ|

المطلوب: إثبات أن △ م أ ء قائم.

العمل: نصل $\overline{أهـ}$.

البرهان: ∵ |أب| = |أجـ| أي أن △ أ ب جـ متساوي الساقين.

، ∵ هـ منتصف $\overline{بجـ}$ ∴ $\overline{أهـ} \perp$ بجـ

، ∵ $\overline{مهـ} \perp \overline{بجـ}$ (معطى)

∴ $\overline{بجـ} \perp$ (أ م هـ) ، ∵ $\overline{أء}$ // $\overline{بجـ}$

∴ $\overline{أء} \perp$ (أ م هـ) ∴ $\overline{أء} \perp \overline{أم}$ ∴ △ م أ ء قائم عند أ.

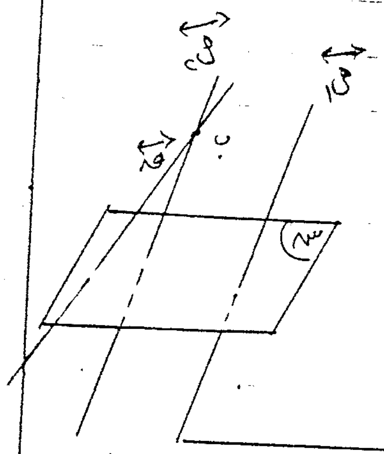
نتائج: ١- من نقطة ب على مستقيم لا يمكن رسم سوى مستوي واحد عمودي عليه.

٢. إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ مستقيماً عمودياً على سـ ، ب ∈ سـ فإن جميع المستقيمات المارة بالنقطة ب وعمودية على $\overleftrightarrow{ل}$ تقع في سـ.

٣. جميع المستقيمات المرسومة من نقطة واحدة وعمودية على مستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ تقع في مستوي واحد عمودي على المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$

٤. من نقطة ب لا يمكن رسم سوى مستقيم واحد عمودي على المستوي سـ (ب قد تنتمي إلى المستوي سـ وقد تقع خارجه).

مبرهنة ٥ المستقيمان العموديان على مستوي واحد متوازيان.



المعطيات: ① $\overleftrightarrow{ل_1} \perp س$ ② $\overleftrightarrow{ل_2} \perp س$.

المطلوب: اثبات أن: $\overleftrightarrow{ل_1} \parallel \overleftrightarrow{ل_2}$.

البرهان:

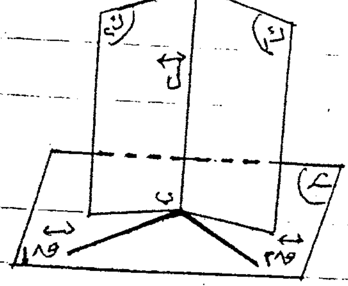
نفرض أن: $\overleftrightarrow{ل_1} \nparallel \overleftrightarrow{ل_2}$ ، ب نقطة $\in \overleftrightarrow{ل_2}$ ،
و $\overleftrightarrow{ق}$ يمر من ب بحيث $\overleftrightarrow{ق} \parallel \overleftrightarrow{ل_1}$
$\because \overleftrightarrow{ل_1} \perp س$ $\therefore \overleftrightarrow{ق} \perp س$ (مبرهنة ٤)
$\because \overleftrightarrow{ل_2} \perp س$ $\therefore \overleftrightarrow{ق}$ منطبق على $\overleftrightarrow{ل_2}$
$\therefore \overleftrightarrow{ق} \parallel \overleftrightarrow{ل_1}$ $\therefore \overleftrightarrow{ل_1} \parallel \overleftrightarrow{ل_2}$

نتيجة: المستقيمات العمودية على مستوى واحد متوازية.

أمثلة وتمارين محلولة:

١ إذا كان $\overleftrightarrow{ق_1}$ ، $\overleftrightarrow{ق_2}$ مستقيمين واقعين في ع ومتقاطعين في النقطة ب والمستويات ك١ ، ك٢ تمران بالنقطة ب ، بحيث $\overleftrightarrow{ق_1} \perp ك_1$ ، $\overleftrightarrow{ق_2} \perp ك_2$
اثبت أن الفاصل المشترك للمستويين ك١ ، ك٢ عمودي على ع.

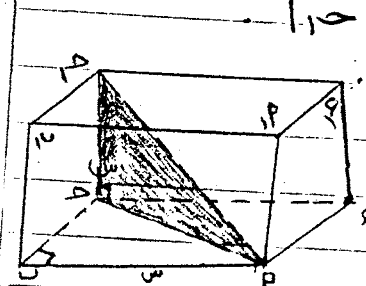
المعطيات: ① $\overleftrightarrow{ق_1} \cap \overleftrightarrow{ق_2} = \{ب\}$ ② $\overleftrightarrow{ق_1} \subset ع$ ، $\overleftrightarrow{ق_2} \subset ع$ ③ $\overleftrightarrow{ق_1} \perp ك_1$
④ $\overleftrightarrow{ق_2} \perp ك_2$ ⑤ $ك_1 \cap ك_2 = \overleftrightarrow{ل}$ ؛ $ب \in \overleftrightarrow{ل}$.



المطلوب: اثبات أن: $\overleftrightarrow{ل} \perp ع$.

البرهان: $\because \overleftrightarrow{ق_1} \perp ك_1$ $\therefore \overleftrightarrow{ق_1} \perp \overleftrightarrow{ل}$ ← ①
، $\because \overleftrightarrow{ق_2} \perp ك_2$ $\therefore \overleftrightarrow{ق_2} \perp \overleftrightarrow{ل}$ ← ②
من ① ، ② : $\therefore \overleftrightarrow{ل} \perp$ مستوي المستقيمين $\overleftrightarrow{ق_1}$ ، $\overleftrightarrow{ق_2}$ المتقاطعين في ع
أي أن $\overleftrightarrow{ل} \perp ع$ وهو المطلوب.

٢ أ ب جـ د أ١ ب١ جـ١ د١ مكعباً طول حرفه (س). أوجد أ١ جـ١



الحل: المعطيات: أ ب جـ د أ١ ب١ جـ١ د١ مكعباً. طول حرفه س.
المطلوب: ايجاد أ١ جـ١ العمل: نصل أ جـ
البرهان: $\because$ أوجه المكعب مربعات.
$\therefore \overline{جـ جـ_1} \perp \overline{جـ د}$ ، $\overline{جـ جـ_1} \perp \overline{جـ ب}$

فيكون ح ج ⊥ المستوي (أ ب ج ء) ∴ ح ج ⊥ أ ج ⊂ (أ ب ج ء)

من △ أ ج ح قائم في ج

فيكون: $|أ ح|^2 = |أ ج|^2 + |ج ح|^2$ (مبرهنة فيثاغورث) ← ①

بالمثل في △ أ ب ج القائم في ب:

$|أ ج|^2 = |أ ب|^2 + |ب ج|^2$ (مُبرهنة فيثاغورث) ← ②

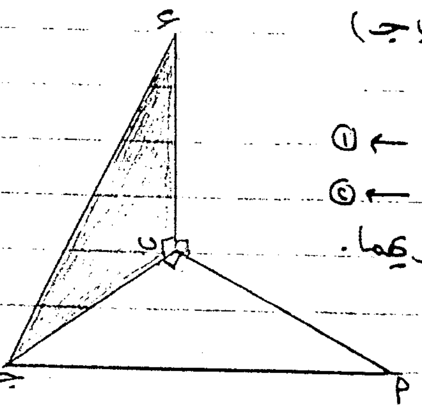
بالتعويض من ② في ① ∴ $|أ ح|^2 = |أ ب|^2 + |ب ج|^2 + |ج ح|^2$

∴ طول حرف المكعب = س.

∴ $|أ ح|^2 = س^2 + س^2 + س^2 \Leftarrow |أ ح|^2 = 3س^2 \Leftarrow |أ ح| = \sqrt{3}$ س وحدة طول.

③ أ ب ج مثلث قائم في ب، أُقيم العمود ء ب على مستواه.. اثبت أنّ:

أ ب ⊥ المستوي (ء ب ج).



المعطيات: ① △ أ ب ج قائم في ب ② ء ب ⊥ (أ ب ج)

المطلوب: إثبات أنّ: أ ب ⊥ (ء ب ج).

البرهان: ∵ △ أ ب ج قائم في ب ∴ أ ب ⊥ ب ج ← ①

∵ ء ب ⊥ (أ ب ج) ∴ ء ب ⊥ أ ب ← ②

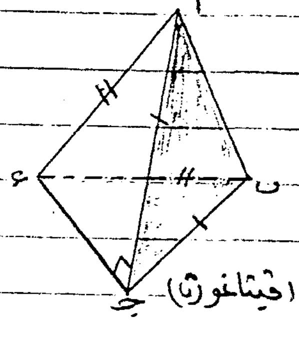
من ①، ② أ ب ⊥ ب ج، ء ب ∴ أ ب ⊥ مستويهما.

أي أن: أ ب ⊥ (ء ب ج)

وهو المطلوب

④ أ ب ج ء هرم ثلاثي فإذا كان: |أ ج| = |ج ب| و |أ ء| = |ء ب|

و ق(∢ أ ج ء) = °٩٠. فاثبت أنّ: ج ء ⊥ المستوي (أ ب ج)



المعطيات: ① أ ب ج ء هرم ثلاثي ② |أ ج| = |ج ب|

③ |أ ء| = |ء ب| ④ ق(∢ أ ج ء) = °٩٠.

المطلوب: اثبات أنّ: ج ء ⊥ (أ ب ج)

البرهان: ∵ ق(∢ أ ج ء) = °٩٠

∴ ء ج ⊥ ج أ. ← ①

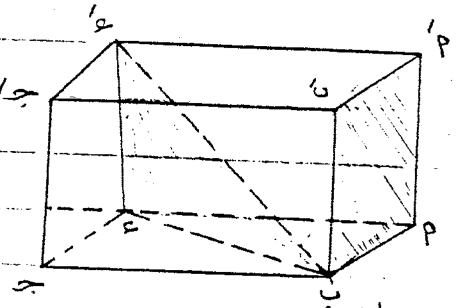
في △ أ ج ء القائم في ج: $|أ ء|^2 = |أ ج|^2 + |ج ء|^2$ (فيثاغورث)

لكن |أ ء| = |ء ب| و |أ ج| = |ج ب|

∴ $|ء ب|^2 = |ج ب|^2 + |ج ء|^2$ فيكون △ ب ج ء قائم في ج (عكس فيثاغورث)

∴ ء ج ⊥ ج ب ← ② من ①، ②: ء ج ⊥ (أ ب ج) وهو المطلوب

٥ اثبت أنه في متوازي مستطيلات: مربع أحد أقطاره يساوي مجموع مربعات أطوال ثلاثة أحرف متقاطعة في نقطة. (احدى رؤوسه).



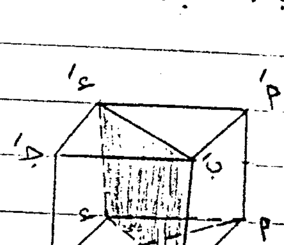
المعطيات: ① أ ب جـ ء أ' ب' جـ' ء' متوازي مستطيلات
② ء'ب أحد أقطاره.

المطلوب: اثبات أن:
|ء'ب|^2 = |ءأ|^2 + |ءجـ|^2 + |ءء'|^2

العمل: نصل ء ب.

البرهان: ∵ أوجه متوازي المستطيلات هي مستطيلات.
∴ ء'ء ⊥ ءأ و ء'ء ⊥ ءجـ فيكون ء'ء ⊥ المستوي (أ ب جـ ء).
∴ ء'ء ⊥ ءب أي أن △ ء'ءب قائم في ء.
∴ |ء'ب|^2 = |ء'ء|^2 + |ءب|^2 ← ① (مبرهنة فيثاغورث)
بالمثل في △ ء ب جـ القائم في جـ:
|ءب|^2 = |ءجـ|^2 + |بجـ|^2 (فيثاغورث)
∵ |بجـ| = |ءأ| ∴ |ءب|^2 = |ءجـ|^2 + |ءأ|^2 ← ②
بالتعويض من ② في ①: ∴ |ء'ب|^2 = |ء'ء|^2 + |ءجـ|^2 + |ءأ|^2.

٦ أ ب جـ ء أ' ب' جـ' ء' مكعب. اثبت أن: أجـ ⊥ المستوي (ب ء ء' ب')



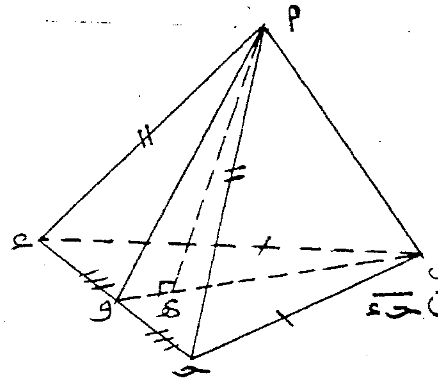
المعطيات: أ ب جـ ء أ' ب' جـ' ء' مكعب.

المطلوب: اثبات أن: أجـ ⊥ (ب ء ء' ب')

البرهان: ∵ أوجه المكعب مربعات.
∴ ب'ب ⊥ أب ∧ ب'ب ⊥ بجـ
∴ ب'ب ⊥ المستوي (أ ب جـ ء)
∴ ب'ب ⊥ أجـ ← ① (حيث أجـ ⊂ (أ ب جـ ء))
∵ أ ب جـ ء مربع ∴ القطران متعامدان.
أي أن: أجـ ⊥ ءب ← ②
من ①، ② ∴ أجـ ⊥ ب'ب ∧ ءب المتقاطعين في المستوى (ب ء ء' ب')
∴ أجـ ⊥ المستوي (ب ء ء' ب') وهو المطلوب

٧ أ ب جـ ء هرم ثلاثي فيه |أجـ| = |أء| و |بجـ| = |بء| و منتصف

جـ ء ، رسم أهـ ⊥ ب و وقطعها في هـ . اثبت أن: أهـ ⊥ المستوي (ب جـ ء)



المعطيات: ① أ ب جـ ء هرم ثلاثي .
② |أ ء| = |أ جـ| ، |ب جـ| = |ب ء|
③ و منتصف جـ ء　④ أهـ ⊥ ب و

المطلوب: اثبات أن: أهـ ⊥ (ب جـ ء)

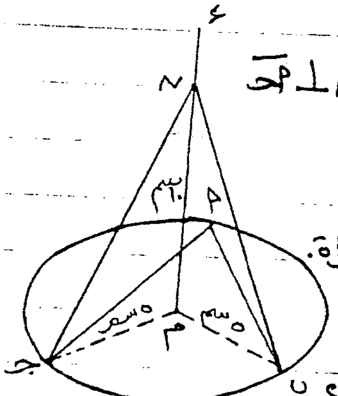
العمل: نصل أ و .

البرهان: في Δ أ جـ ء : ∵ |أ جـ| = |أ ء| ، و منتصف جـ ء
∴ أ و ⊥ جـ ء ⟵ ①

بالمثل في Δ ب جـ ء : ∵ |ب جـ| = |ب ء| ، و منتصف جـ ء
∴ ب و ⊥ جـ ء ⟵ ②

من ①، ② ∴ جـ ء ⊥ كلٍّ من ب و ، أ و المتقاطعين في المستوي (أ ب و) .
∴ جـ ء ⊥ المستوي (أ ب و)
∵ أهـ ⊂ المستوي (أ ب و)　∴ جـ ء ⊥ أهـ　وحيث أن: أهـ ⊥ ب و (معطى)
∴ أهـ ⊥ كلٍّ من ب و ، جـ ء المتقاطعين في المستوي (ب جـ ء) .
أي أن: أهـ ⊥ المستوي (ب جـ ء) .　وهو المطلوب .

١٨- أ ب ، أ جـ وتران في دائرة مركزها م وطول نصف قطرها (٥) سم ورسم م ء عمودياً على كل من أ ب ، أ جـ . ثم أخذت نقطة ن ∈ م ء بحيث |م ن| = ١٠ سم . أوجد طول كل من ن ب ، ن جـ .



المعطيات: ① أ ب ، أ جـ وتران في دائرة مركزها م .
② |م ب| = |م جـ| = ٥ سم .　③ م ن ⊥ أ ب ، م ن ⊥ أ جـ
④ |م ن| = ١٠ سم .

المطلوب: إيجاد: |ن ب| ، |ن جـ|

البرهان: ∵ م ن ⊥ أ ب ، م ن ⊥ أ جـ　∴ م ن ⊥ مستوي الدائرة .
∴ ن م ⊥ م ب

أي أن Δ ن م ب قائم في م :
∴ $|ن ب|^2 = |ن م|^2 + |م ب|^2$ (فيثاغورث) ∴ $|ن ب|^2 = ١٠٠ + ٢٥ = ١٢٥$
∴ $|ن ب| = \sqrt{١٢٥} = ٥\sqrt{٥}$ سم .

بالمثل ن م ⊥ م جـ أي أن Δ ن م جـ قائم في م : ∴ $|ن جـ|^2 = |ن م|^2 + |م جـ|^2$
أي أن: $|ن جـ|^2 = ١٠٠ + ٢٥ = ١٢٥ \Leftarrow |ن جـ| = ٥\sqrt{٥}$ سم .　وهو المطلوب .

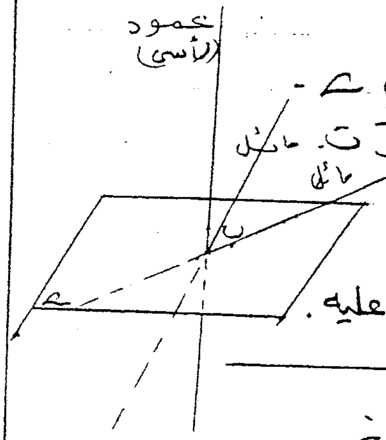
١٩) أ ب جـ سطح مثلث قائم الزاوية في ب. رسم أم ⊥ المستوي (أ ب جـ) ثم رسم أ ن ⊥ م ب حيث أ ن ∩ م ب = {ن}. اثبت أن: أ ن ⊥ المستوي (م ب جـ)

١٠) أ ب عمودي على المستوي س ويلاقيه في ب، ب حـ، حـ ء مرسومات في المستوي س بحيث ب حـ ⊥ حـ ء. برهن أن: أ حـ ⊥ جـ ء.
وإذا كان |أ ب| = ٢|ب جـ| = |حـ ء| فاثبت أن: |أ ء| = ٣|ب جـ|

١١) أ.ب جـ ء هرم ثلاثي رأسه أ وقاعدته سطح △ ب جـ ء. رسم من أ ارتفاع الهرم لاقى القاعدة ب جـ ء في هـ ورسم من ب ارتفاعاً آخر للهرم لاقى الوجه أ جـ ء في و فإذا كان: أ هـ ∩ ب و = {س} فاثبت أن:
جـ ء ⊥ المستوي (ب أ س)

١٢) أ.ب جـ ء هرم ثلاثي فيه |أ جـ| = |جـ ء| و |أ ب| = |ب ء| اثبت أن:
أ ء ⊥ ب جـ.

العمود والمائل



من نقطة ب واقعة في المستوي ع :

١. يمكن رسم مستقيم واحد فقط عمودياً على المستوي ع .

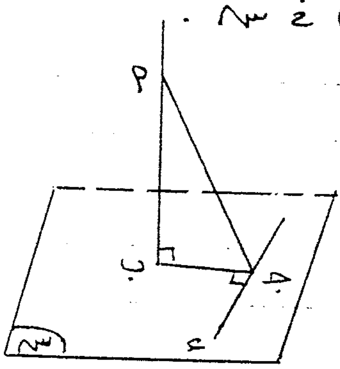
٢. أي مستقيم آخر يمر بالنقطة ب غير العمودي يطلق ت. مائل مائلاً على المستوى .

تعريف : المائل هو المستقيم القاطع لمستوي وغير عمودياً عليه .

مبرهنة [٦] (الأعمدة الثلاثة) :

اذا كان : $\overleftrightarrow{بجـ}$ ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$ مستقيمين متعامدين واقعين في المستوي س

وكان : $\overleftrightarrow{أب} \perp$ س فإن : $\overleftrightarrow{ءجـ} \perp \overleftrightarrow{جـ أ}$.



المعطيات : (١) $\overleftrightarrow{بجـ} \perp \overleftrightarrow{جـ ء}$ (٢) $\overleftrightarrow{بجـ}$ ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$ واقعين في س .

(٣) $\overleftrightarrow{أب} \perp$ س .

المطلوب : إثبات أن : $\overleftrightarrow{ءجـ} \perp \overleftrightarrow{جـ أ}$

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{أب} \perp$ س و $\overleftrightarrow{جـ ء} \subset$ س

∴ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـ ء}$ ← ①

∵ $\overleftrightarrow{بجـ} \perp \overleftrightarrow{جـ ء}$ (معطى) ← ②

من ① ، ② $\overleftrightarrow{جـ ء} \perp$ المستوي (أ ب جـ)

∵ $\overleftrightarrow{جـ أ} \subset$ المستوي (أ ب جـ) ∴ $\overleftrightarrow{جـ ء} \perp \overleftrightarrow{جـ أ}$

ملاحظات :

١. نسمي المستقيم $\overleftrightarrow{أجـ}$ بالمائل على المستوي س والمستقيم $\overleftrightarrow{بجـ}$ مسقط المائل .

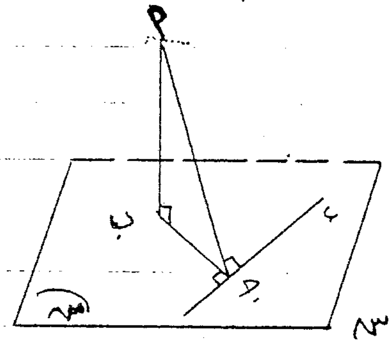
٢. يقال للمستقيمات : $\overleftrightarrow{بجـ}$ ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ بالأعمدة الثلاثة .

٣. يمكن اعادة صياغة المبرهنة بالشكل :
اذا رسم مستقيم مائل على مستوٍ وكان مسقطه على المستوي عمودياً على مستقيم فيه ، كان المستقيم المائل عمودياً على ذلك المستقيم .

مبرهنة 7 (عكس مبرهنة الأعمدة الثلاثة):

إذا كان: $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ج ء}}$ مستقيمين متعامدين واقعين في المستوي س ، و أ ∉ س ، $\overleftrightarrow{\text{أ ج}} \perp \overleftrightarrow{\text{ج ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ ، فإن: $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp$ س.

المعطيات: (١) $\overleftrightarrow{\text{ب ج}} \perp \overleftrightarrow{\text{ج ء}}$ (٢) $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ج ء}}$ واقعين في المستوي س.
(٣) $\overleftrightarrow{\text{أ ج}} \perp \overleftrightarrow{\text{ج ء}}$ (٤) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ ⑤ أ ∉ س.



المطلوب: إثبات أن: $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp$ س.

البرهان: ∵ $\overleftrightarrow{\text{ب ج}} \perp \overleftrightarrow{\text{ج ء}}$ و $\overleftrightarrow{\text{أ ج}} \perp \overleftrightarrow{\text{ج ء}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ج ء}} \perp$ المستوي (أ ب ج)

∴ $\overleftrightarrow{\text{ج ء}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⟵ ①

و ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ (معطى) ⟵ ②

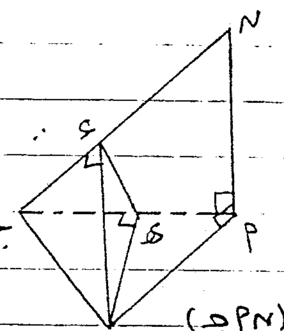
من ① ، ② : وحيث أن $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ج ء}}$ واقعين في س

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp$ س. وهو المطلوب.

أمثلة:

1] أ ب ج مثلث أقيم من أ العمود $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ على مستوي △(أ ب ج) ثم وصل $\overline{\text{ن ج}}$ ، أنزل من ب العمودان $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ على $\overline{\text{أ ج}}$ ، $\overline{\text{ن ج}}$ بالترتيب.
اثبت أن: ① $\overline{\text{ب هـ}} \perp$ المستوي (ن أ ج) ② $\overline{\text{هـ ء}} \perp \overline{\text{ن ج}}$.

المعطيات: ① $\overleftrightarrow{\text{أ ن}} \perp$ المستوي (أ ب ج).
② $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ ج}}$ ③ $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{ن ج}}$



المطلوب: إثبات أن: ① $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}} \perp$ المستوي (ن أ ج)
② $\overline{\text{هـ ء}} \perp \overline{\text{ن ج}}$.

البرهان: ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ن}} \perp$ المستوي (أ ب ج) ∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ن}} \perp \overline{\text{ب هـ}}$ ،

و ∵ $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ ج}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{ب هـ}} \perp$ كل من $\overline{\text{أ ج}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ المتقاطعان عند أ في المستوي (ن أ ج)

∴ $\overline{\text{ب هـ}} \perp$ المستوي (ن أ ج) وهو المطلوب ①

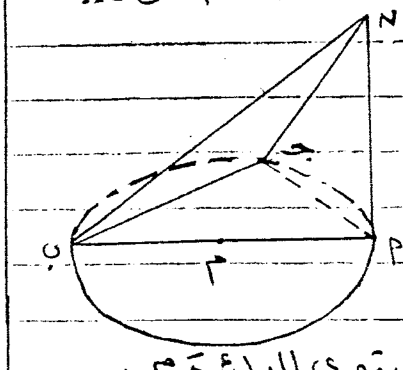
∵ $\overline{\text{ب هـ}} \perp$ المستوي (ن أ ج) و ∵ $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{ن ج}}$ حيث $\overline{\text{ن ج}}$ ⊂ المستوي (ن أ ج)

∴ $\overline{\text{هـ ء}} \perp \overline{\text{ن ج}}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة).

وهو المطلوب ثانياً.

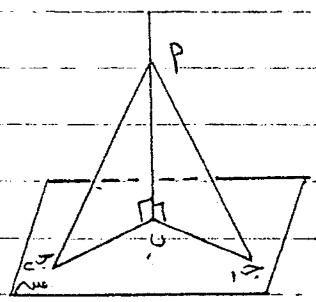
2] $\overline{\text{أ ب}}$ قطراً في دائرة م ، أقيم من أ العمود $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ على مستوي الدائرة.

فإذا كانت جـ نقطة على محيط الدائرة . اثبت أن: △ ن جـ ب قائم الزاوية.



المعطيات: ① م دائرة ② أ ب قطر في الدائرة م
③ أن ⊥ مستوي الدائرة.
المطلوب: اثبات أن △ ن جـ ب قائم الزاوية.
العمل: نصل أجـ.
البرهان: ∵ أب قطراً في الدائرة م
∴ ∠ أ جـ ب المحيطية قائمة.
أي أن أجـ ⊥ جـ ب وهما مستقيمين في مستوي الدائرة م ،
و ∵ $\overleftrightarrow{نأ}$ ⊥ مستوي الدائرة م.
∴ ن جـ ⊥ جـ ب (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)
فيكون △ ن جـ ب قائم الزاوية عند جـ.

مبرهنة $\boxed{8}$ ((مبرهنة العمود والمائل)).
إذا كان: $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ س ، جـ١ ، جـ٢ نقطتين في س فإن:
① |ب جـ١| < |ب جـ٢| ⟸ |أ جـ١| < |أ جـ٢|
② |ب جـ١| = |ب جـ٢| ⟺ |أ جـ١| = |أ جـ٢|



الحل ، أولاً:
المعطيات: ① $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ س ② {جـ١ ، جـ٢} ⊂ س
③ |ب جـ١| < |ب جـ٢|
المطلوب: اثبات أن: |أ جـ١| < |أ جـ٢|
البرهان: ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ س ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ ب جـ١ ، و $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ ب جـ٢
فيكون: △ أ ب جـ١ قائم في ب و △ أ ب جـ٢ قائم في ب
∵ |ب جـ١| < |ب جـ٢| $\xLeftarrow{\text{بالتربيع}}$ |ب جـ١|² < |ب جـ٢|²
$\xLeftarrow{+|أب|^2}$ |ب جـ١|² + |أب|² < |ب جـ٢|² + |أب|²
فيكون: |أ جـ١|² < |أ جـ٢|² (مبرهنة فيثاغورث).
∴ |أ جـ١| < |أ جـ٢|

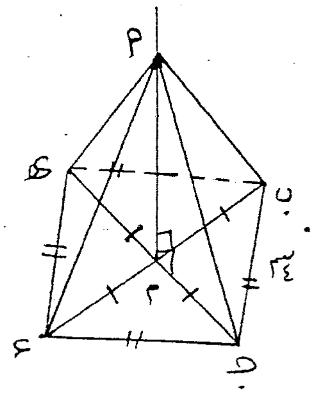
ثانياً: المعطيات: ① ، ② نفسه ③ |ب جـ١| = |ب جـ٢|
المطلوب: اثبات أن: |أ جـ١| = |أ جـ٢|
البرهان: كما سبق △△ أ ب جـ١ ، أ ب جـ٢ قائمين في ب
∵ |ب جـ١| = |ب جـ٢| $\xLeftarrow{\text{بالتربيع}}$ |ب جـ١|² = |ب جـ٢|²
$\xLeftarrow{+|أب|^2}$ |ب جـ١|² + |أب|² = |ب جـ٢|² + |أب|² ⟸ |أ جـ١|² = |أ جـ٢|² مبرهنة فيثاغورث
∴ |أ جـ١| = |أ جـ٢|

أمثلة :

١) ب جـ ء هـ مربع طول ضلعه (٤ سم) أقيم من مركزه م عموداً على مستويه ، أ نقطة على هذا العمود .

① اثبت أن : |أب| = |أجـ| = |أء| = |أهـ|

② إذا كان : |أم| = |ب م| ، اثبت أن : |أب| = ٤ سم



الحل: المعطيات: ① ب جـ ء هـ مربع ② |ب جـ| = ٤ سم

③ $\overleftrightarrow{مأ}$ ⊥ المستوي (ب جـ ء هـ)

المطلوب: ① اثبات أن: |أب| = |أجـ| = |أء| = |أهـ| .

② إذا كان |أم| = |ب م|

المطلوب اثبات أن: |أب| = ٤ سم

البرهان: ① ∵ $\overleftrightarrow{مأ}$ ⊥ المستوي (ب جـ ء هـ)

، ∵ |م ب| = |م جـ| = |م ء| = |م هـ| (خواص المربع)

∴ |أب| = |أجـ| = |أء| = |أهـ| (مبرهنة ٨) ⋇

② ∵ Δ ب جـ ء قائم في جـ : ∴ |ب ء|² = |ب جـ|² + |جـ ء|²

∴ |ب ء|² = (٤)² + (٤)² = ١٦ + ١٦ = ٣٢ ⇐ |ب ء| = ٤√٢ سم

∵ م منتصف ب ء ∴ |ب م| = ½ |ب ء| ⇐ |ب م| = ٢√٢ سم

، ∵ $\overleftrightarrow{مأ}$ ⊥ المستوي (ب جـ ء هـ) (معطى)

∴ $\overline{أم}$ ⊥ $\overline{م ب}$ أي أن Δ أ م ب قائم في م .

∴ |أب|² = |أم|² + |م ب|² مبرهنة فيثاغورث ← *

∵ |أم| = |ب م| وحيث أن |ب م| = ٢√٢ سم (اثباتاً)

∴ |أم| = ٢√٢ سم .

بالتعويض في * : |أب|² = (٢√٢)² + (٢√٢)² = ٨ + ٨ = ١٦

∴ |أب|² = ١٦ ⇐ |أب| = ٤ سم ⋇ وهو المطلوب

٢) ب، جـ، ء، هـ أربع نقاط ليست في مستوي واحد بحيث أن:

ق(∢ جـ ء هـ) = ق(∢ ب ء هـ) = ٩٠° ، س، ص منتصفي $\overline{ءجـ}$ ، $\overline{هـجـ}$

بالترتيب ، المستوي ل يحوي $\overline{س ص}$ موازياً $\overline{ب جـ}$ وقاطعاً $\overline{ب ء}$ ، $\overline{ب هـ}$

في س١، ص١ على الترتيب .

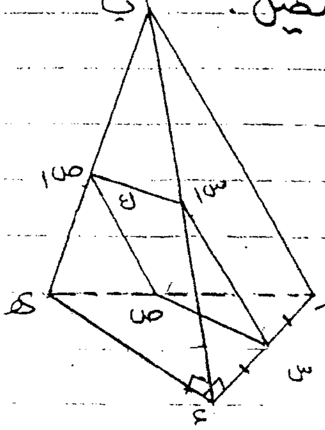
اثبت أولاً: أن $\overline{س ص}$ ⊥ المستوي (ب جـ ء)

ثانياً: أن الشكل س ص ص١ س١ مستطيل .

الحل: المعطيات: ① ب جـ ء هـ رباعي سطوح. ② ق(∠جـ ء هـ) = ق(∠ب ء هـ) = ٩٠°

المطلوب: اثبات أن: أولاً: س ص ⊥ المستوي (ب جـ ء)

ثانياً: الشكل س ص ص١ س١ مستطيل.



البرهان: ∵ ق(∠جـ ء هـ) = ق(∠ب ء هـ) = ٩٠°

∴ هـ ء ⊥ جـ ء و هـ ء ⊥ ب ء (معطى)

∴ هـ ء ⊥ المستوي (ب جـ ء)

∵ س، ص منتصفي ء جـ، ء هـ ∴ س ص // ء هـ

∴ س ص ⊥ المستوي (ب جـ ء) وهو المطلوب ①

∵ ب جـ // ك، ∵ ك يقطع المستويين (ب جـ ء)، (ب جـ هـ)

في س س١، ص ص١

∴ ب جـ // س س١ // ص ص١ ← ①

، ∵ ء هـ // س ص ، س ص ⊂ ك ∴ ء هـ // ك

∵ ك يقطع المستوي (ب ء هـ) في س١ ص١ ∴ س١ ص١ // ء هـ

∴ س١ ص١ // س ص ← ②

من ① ، ② ينتج أن الشكل: س ص ص١ س١ متوازي أضلاع.

ويبقى أن نبين أن احدى زواياه قائمة.

∵ س ص ⊥ المستوي (ب جـ ء) ∴ س ص ⊥ س س١

∴ ق(∠س١ س ص) = ٩٠° فيكون الشكل س ص ص١ س١ مستطيل

(وهو المطلوب ثانياً)

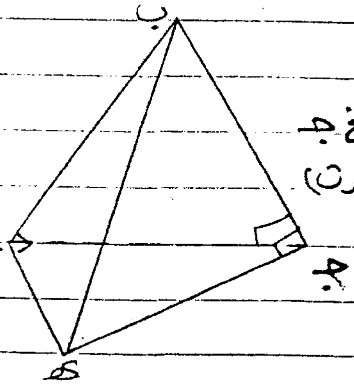
---

٣ ب جـ ء هـ رباعي سطوح، فيه ب جـ ⊥ المستوي (جـ ء هـ)

، |ب هـ|^2 = |ب جـ|^2 + |جـ ء|^2 + |ء هـ|^2. اثبت أن: ء هـ ⊥ المستوي (ب جـ ء)

الحل: المعطيات: ① ب جـ ء هـ رباعي سطوح ② ب جـ ⊥ المستوي (جـ ء هـ)

③ |ب هـ|^2 = |ب جـ|^2 + |جـ ء|^2 + |ء هـ|^2



المطلوب: اثبات أن: ء هـ ⊥ المستوي (ب جـ ء)

البرهان: ∵ ب جـ ⊥ المستوي (جـ ء هـ) (معطى)

∴ ب جـ ⊥ جـ هـ أي أن ∆ ب جـ هـ قائم في جـ

∴ |ب هـ|^2 = |ب جـ|^2 + |جـ هـ|^2 ← ① (فيثاغورث)

، ∵ |ب هـ|^2 = |ب جـ|^2 + |جـ ء|^2 + |ء هـ|^2 (معطى) ← ②

بالتعويض من ① في ② ينتج أن:

|ب جـ|^2 + |جـ هـ|^2 = |ب جـ|^2 + |جـ ء|^2 + |ء هـ|^2

$\therefore$ $|اجـ هـ|^2 = |اجـ ء|^2 + |ء هـ|^2$

$\therefore$ Δ جـ ء هـ قائم في ء (عكس مبرهنة فيثاغورث)

$\therefore$ هـء ⊥ جـء ← ③

، $\because$ بجـ ⊥ المستوى (جـ ء هـ) $\therefore$ بجـ ⊥ هـء ← ④

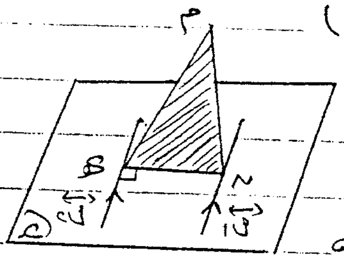
من ③ ، ④ ينتج أن: هـء ⊥ المستوى (ب جـ ء) ....وهو المطلوب

---

[٤] $\overleftrightarrow{ل_1}$ و $\overleftrightarrow{ل_2}$ مستقيمان متوازيان في مستوى س ، م ∉ س ، $\overleftrightarrow{م ن}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ل_1}$ ، ن هـ ⊥ $\overleftrightarrow{ل_2}$. اثبت أن: $\overleftrightarrow{ل_1}$ ⊥ المستوى (م ن هـ).

الحل: المعطيات: ① $\overleftrightarrow{ل_1}$ // $\overleftrightarrow{ل_2}$ ② $\overleftrightarrow{ل_1}$ ⊂ س ، $\overleftrightarrow{ل_2}$ ⊂ س ، م ∉ س

③ $\overleftrightarrow{م ن}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ل_1}$ ④ ن هـ ⊥ $\overleftrightarrow{ل_2}$



المطلوب: اثبات أن: $\overleftrightarrow{ل_1}$ ⊥ المستوى (م ن هـ)

البرهان: $\because$ ن هـ ⊥ $\overleftrightarrow{ل_2}$ ، $\overleftrightarrow{ل_1}$ // $\overleftrightarrow{ل_2}$

$\therefore$ ن هـ ⊥ $\overleftrightarrow{ل_1}$ ← ①

، $\because$ م ن ⊥ $\overleftrightarrow{ل_1}$ ← ②

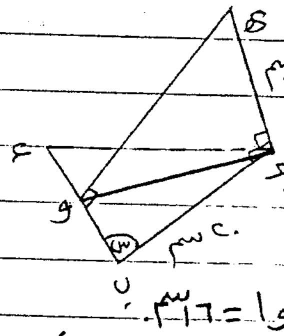
من ① ، ② ينتج أن: $\overleftrightarrow{ل_1}$ ⊥ المستوى (م ن هـ)

---

[٥] $\overleftrightarrow{بجـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب ء}$ مستقيمان متقاطعان في ب ، ق(∠ جـ ب ء) = س حيث جا س = $\frac{4}{5}$ ، |ب جـ| = ٢٠ سم . رسم من جـ العمود جـ هـ على المستوى ب جـ ء بحيث |جـ هـ| = ١٢ سم . ثم رسم من هـ العمود هـ و على $\overleftrightarrow{ب ء}$ قابله في و . أوجد طول هـ و .

الحل: المعطيات: ① ق(∠ جـ ب ء) = س ② جا س = $\frac{4}{5}$ ③ |ب جـ| = ٢٠ سم

④ جـ هـ ⊥ المستوى (ب جـ ء) ⑤ |جـ هـ| = ١٢ سم ⑥ هـ و ⊥ $\overleftrightarrow{ب ء}$



المطلوب: إيجاد |هـ و|

العمل: نرسم جـ و

البرهان: $\because$ هـ جـ ⊥ المستوى (جـ ب ء) ، هـ و ⊥ $\overleftrightarrow{ب ء}$

$\therefore$ جـ و ⊥ $\overleftrightarrow{ب ء}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

$\therefore$ Δ ب جـ و قائم في و وفيه: جا س = $\frac{|جـ و|}{|جـ ب|}$

$\therefore$ $\frac{4}{5} = \frac{|جـ و|}{20}$ ⟸ |جـ و| = ٢٠ × $\frac{4}{5}$ ⟸ |جـ و| = ١٦ سم

$\because$ جـ هـ ⊥ المستوى (ب جـ ء) $\therefore$ جـ هـ ⊥ جـ و أي أن Δ هـ جـ و قائم في جـ

$\therefore$ $|هـ و|^2 = |هـ جـ|^2 + |جـ و|^2 = (12)^2 + (16)^2 = 144 + 256 = 400$

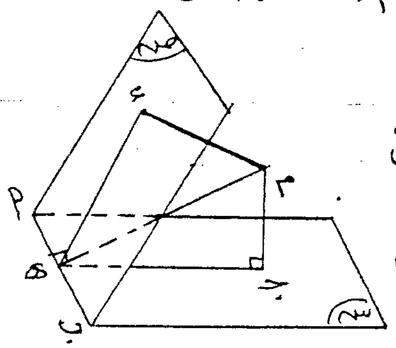
$\therefore$ |هـ و| = $\sqrt{400}$ ⟸ |هـ و| = ٢٠ سم .

⑥ س ، ص مستويان متقاطعان في أن ، م نقطة لا تنتمي إلى أي من المستويين . رسم م ج ⊥ المستوي س قطعه في ج ، م د ⊥ المستوى ص قطعه في د . ثم رسم جـ هـ ⊥ أن قطعه في هـ . برهن أن : د هـ ⊥ أن .

المعطيات : ① س ∩ ص = أن ② م ج ⊥ س ③ م د ⊥ ص ④ جـ هـ ⊥ أن

المطلوب : إثبات أن د هـ ⊥ أن

العمل : نصل م هـ .



البرهان : ∵ م ج ⊥ المستوي س ، جـ هـ ⊥ أن

∴ م هـ ⊥ أن (الأعمدة الثلاثة)

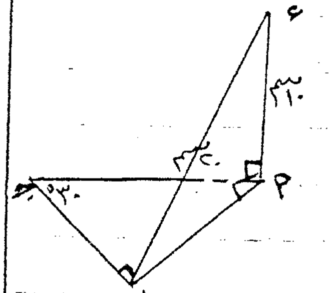
∵ م د ⊥ ص و م هـ ⊥ أن ⊂ ص (إثباتاً)

∴ د هـ ⊥ أن (الأعمدة الثلاثة) ※

---

⑦ أ ب ج مثلث فيه ق(∡ أ ج ب) = ٣٠° و |أ ج| = ٢٠ سم و د نقطة غير واقعة في المستوي (أ ب ج) حيث أ د ⊥ المستوي (أ ب ج) وكان : |أ د| = ١٠ سم و د ب ⊥ ب ج . أوجد :

أولاً : |د ب| ثانياً : ق(∡ أ ب د) .



الحل : المعطيات : ① ق(∡ أ ج ب) = ٣٠° ② |أ ج| = ٢٠ سم ③ أ د ⊥ المستوي (أ ب ج) ④ |أ د| = ١٠ سم ⑤ د ب ⊥ ب ج

المطلوب : إيجاد : أولاً : |د ب| ثانياً : ق(∡ أ ب د)

البرهان : ∵ أ د ⊥ المستوي (أ ب ج) ، د ب ⊥ ب ج

∴ أ ب ⊥ ب ج (الأعمدة الثلاثة)

∴ △ أ ب ج قائم في ب وحيث أن ق(∡ أ ج ب) = ٣٠°

∴ |أ ب| = $\frac{1}{2}$ الوتر |أ ج| ⟸ |أ ب| = ١٠ سم .

∵ أ د ⊥ المستوي (أ ب ج) ∴ أ د ⊥ أ ب أي أن △ د أ ب قائم في أ

∴ |د ب|² = |د أ|² + |أ ب|² = (١٠)² + (١٠)² = ٢٠٠ ⟸ |د ب| = ١٠√٢ سم

∵ △ د أ ب قائم عند أ ومتساوي الساقين لأن |أ د| = |أ ب| = ١٠ سم أولاً

∴ ق(∡ أ د ب) = ق(∡ أ ب د) = ٤٥° . وهو المطلوب ثانياً .

---

⑧ أ ب ج مثلث ، أ د ينصف ∡ ب أ ج ويقطع ب ج في د ، رسم د هـ ⊥ المستوي (أ ب ج) ثم رسم من هـ العمودان هـ و ، هـ ر على أ ب ، أ ج بالترتيب و

يتقابلا عمانى و ، ر . اثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{أء}} \perp \overleftrightarrow{\text{ور}}$.

٩) أ ب جـ ء رباعي سطوح فيه ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ ب ء) = ٩٠° و |ب جـ| = |جـ ء| ، |أ ء|² = |أ ب|² + ٢|جـ ء|² . اثبت أن: ق(∠ب جـ ء) = ٩٠°

١٠) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، $\overline{\text{أء}} \perp$ المستوي (أ ب جـ) فإذا كانت هـ منتصف $\overline{\text{ءجـ}}$. اثبت أن: ① $\overline{\text{ءب}} \perp \overline{\text{بجـ}}$ ② △ هـ أ ب متساوي الساقين

١١) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، $\overline{\text{أء}} \perp$ المستوي (أ ب جـ) فإذا كانت س ، ص ، ع منتصفات $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{جـء}}$ بالترتيب . اثبت أن:
أولاً: $\overline{\text{صع}} \perp$ المستوي (أ ب جـ) ثانياً $\overline{\text{عس}} \perp \overline{\text{أب}}$

١٢) أ ب جـ ء مستطيل فيه: |أ ب| = ٥سم ، |ب جـ| = ١٠سم ، رسمت $\overline{\text{أم}}$ عمودية على مستوي المستطيل بحيث كان |أ م| = ٥سم
أوجد مساحة سطح كل من المثلثين م ب جـ ، م جـ ء

١٣) أ ب جـ ء مستطيل فيه |أ ب| = ٨سم ، |ب جـ| = ٢٤سم رسم من أ العمود $\overline{\text{أهـ}}$ على المستوي (أ ب جـ ء) بحيث |أ هـ| = ٦سم .
احسب: (١) مساحة سطح △ جـ هـ ب (٢) |هـ جـ|

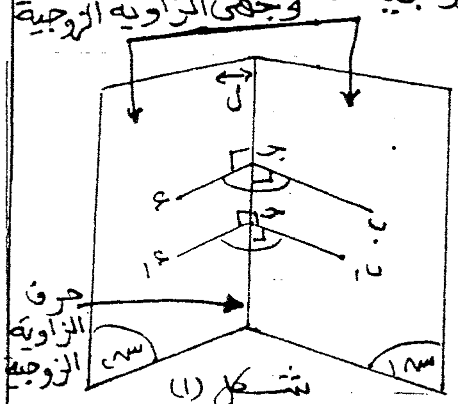
١٤) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ ب جـ) = ٩٠° . رسم $\overline{\text{جـء}} \perp$ المستوي (أ ب جـ) ثم وصل $\overline{\text{أء}}$ ونصف $\overline{\text{بجـ}}$ في هـ وكذلك نصف $\overline{\text{أء}}$ في و .
اثبت أن: $\overline{\text{وهـ}} \perp \overline{\text{بجـ}}$.

الزاوية الزوجية (الثنائية)

تعريف (١) الزاوية الزوجية: هي الزاوية الناتجة عن اتحاد نصفي مستويين س١، س٢ بحافة مشتركة $\overleftrightarrow{ل}$

تسمى الحافة المشتركة $\overleftrightarrow{ل}$: حرف الزاوية الزوجية.

وتسمى كل من نصفي المستويين س١، س٢ وجهي الزاوية الزوجية. شكل (١)

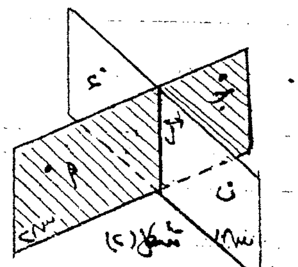


شكل (١)

ملاحظات:

١. نرمز للزاوية الزوجية بين المستويين س١، س٢ بالرمز ∡ (س١، $\overleftrightarrow{ل}$، س٢) أو ∡ $\overleftrightarrow{ل}$.

٢. إذا تقاطع مستويان فإنه ينشأ عن تقاطعهما أربع زوايا زوجية منها زوايا زوجية متجاورة حيث: كل زاويتين متجاورتين متكاملتين.
وزوايا متقابلة بالحرف حيث:
كل زاويتين متقابلتين بالحرف متساويتين بالقياس.



شكل (٢)

٣. الزاوية الزوجية بين مستويين متقاطعين (غير منطبقين) هي الزاوية الأصغر بينهما.
بعبارة أخرى هي الزاوية الزوجية الحادة أو القائمة بينهما.

تعريف (٢): الزاوية الخطية: هي زاوية مستوية مرسومة في وجهي الزاوية الزوجية بحيث يكون ضلعاها عمودين على حرف الزاوية الزوجية.

أي أن:
الزاوية الخطية: هي الزاوية المحصورة بين العمودين المقامين في كلٍّ من: س١ وس٢ من نقطة ج على حرف الزاوية $\overleftrightarrow{ل}$.

في شكل (١) ∡ (ب ج ء) المستوية هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية س١، $\overleftrightarrow{ل}$، س٢ حيث:

$\overleftrightarrow{ب ج}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ل}$ و $\overleftrightarrow{ب ج}$ ⊂ س١

و $\overleftrightarrow{ء ج}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ل}$ و $\overleftrightarrow{ء ج}$ ⊂ س٢

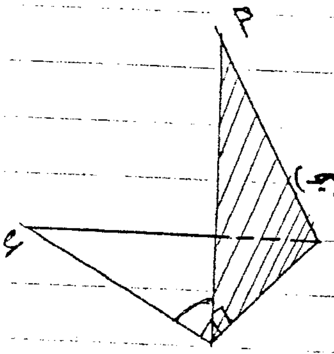
تعريف [٣] قياس الزاوية الزوجية هو قياس زاويتها الخطية.

تعريف [٤] الزاويتان الزوجيتان المتطابقتان هما زاويتان قياسا زاويتيهما الخطيتين متساويان.

ملاحظة: جميع الزوايا المستوية (الخطية) لزاوية زوجية تكون متساوية في القياس.

الأمثلة:

[١] ب ج ء مثلث قائم في ج ، أ نقطة خارجة عن مستواه ، بحيث: $\overline{أج} \perp \overline{بج}$. اثبت أن: ∡ (أ ج ء) هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية بين المستويين (ب ج ء) ، (أ ب ج).



المعطيات: ① ب ج ء مثلث قائم في ج ② $\overline{أج} \perp \overline{بج}$

المطلوب: اثبات أن: ∡ (أ ج ء) هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية بين المستويين (ب ج ء) ، (أ ب ج)

البرهان: ∵ المستوي (ب ج ء) ∩ المستوي (أ ب ج) = $\overline{بج}$

أي $\overline{بج}$ هو الفصل المشترك للمستويين.

∵ $\overline{ءج} \perp \overline{بج}$ (لأن ق(∡ج) = قائمة) حيث $\overline{ءج}$ ⊂ (ب ج ء)

∵ $\overline{أج} \perp \overline{بج}$ (معطى) حيث $\overline{أج}$ ⊂ (أ ب ج)

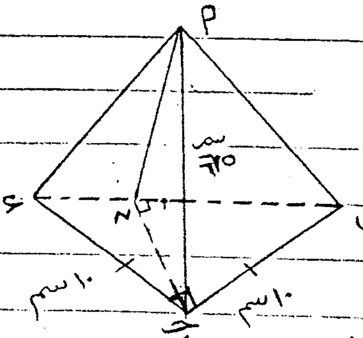
∴ ∡ (أ ج ء) هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية بين المستويين (ب ج ء) ، (أ ب ج) *.

[٢] ب ج ء مثلث قائم في ج ، |بج| = |ءج| = ١٠ سم ، $\overline{أج}$ ⊥ المستوى (ب ج ء)
احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين (أ ب ء) ، (ج ب ء)
اذا علمت أن: |أج| = $٥\sqrt{٢}$ سم.

المعطيات: ① Δ ب ج ء قائم في ج ② |بج| = |ءج| = ١٠ سم ③ $\overline{أج}$ ⊥ المستوى (ب ج ء) ④ |أج| = $٥\sqrt{٢}$ سم

المطلوب: حساب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين: (أ ب ء) ، (ج ب ء)

العمل: ننصف $\overline{بء}$ في النقطة ن ، ونصل $\overline{أن}$ ، $\overline{جن}$



البرهان: ∵ أب ج = أ ج ء (معطى)

أي أن △ ب ج ء متساوي الساقين

، ن منتصف $\overline{ب ء}$ (عملاً)

∴ $\overline{ج ن} \perp \overline{ب ء}$.

، ∵ $\overline{أ ج} \perp$ المستوي (ب ج ء) معطى

، $\overline{ج ن} \perp \overline{ء ب}$ (إثباتاً)

∴ $\overline{أ ن} \perp \overline{ء ب}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

وحيث أن: المستوي (أ ب ء) ∩ المستوي (ب ج ء) = $\overline{ب ء}$

أي $\overline{ب ء}$ هو الفصل المشترك للمستويين.

∴ ∡(أ ن ج) هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية بين المستويين (أ ب ء) ، (ب ج ء) وليكن قياسها هـ .

∵ △ ب ج ء متساوي الساقين وقائم في ج ∴ ق(∡ب) = ق(∡ء) = ٤٥°

∴ في △ ب ج ن القائم في ن : جا ب = $\frac{|ن ج|}{|ب ج|}$ ⇐ $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|ن ج|}{10}$

∴ |ن ج| = $\frac{10}{\sqrt{2}}$ ⇐ |ن ج| = ٥√٢ سم.

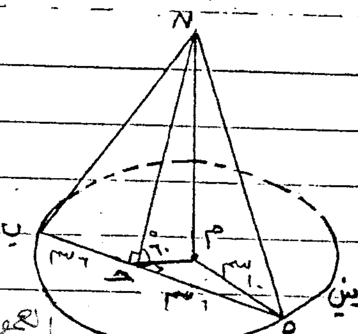
، في △ أ ن ج القائم في ج : ظا(∡ أ ن ج) = $\frac{|أ ج|}{|ن ج|}$ ⇐ ظا هـ = $\frac{5\sqrt{6}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

∴ ظا هـ = $\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ⇐ ظا هـ = √٣ فتكون هـ = ٦٠°

١٣ دائرة مركزها م و طول نصف قطرها (١٠ سم) و أب وتر فيها طوله (١٢) سم. رُسم من م عموداً على مستوي الدائرة وأخذت نقطة ن عليه بحيث كان قياس الزاوية بين مستوي الدائرة والمستوي (ن أ ب) يساوي (٦٠°) وإذا علمت أن $\overline{ن ج} \perp \overline{أ ب}$ عند ج . احسب طول $\overline{ن م}$.

الحل: ∵ $\overline{ن م} \perp$ مستوي الدائرة ، $\overline{ن ج} \perp \overline{أ ب}$

∴ $\overline{م ج} \perp \overline{أ ب}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)



∵ مستوي الدائرة ∩ المستوي (ن أ ب) = $\overline{أ ب}$

، $\overline{م ج} \perp \overline{أ ب}$ (م ج واقع في مستوى الدائرة)

، $\overline{ن ج} \perp \overline{أ ب}$ ($\overline{ن ج}$ واقع في المستوي (ن أ ب))

∴ ∡(م ج ن) هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية بين المستويين

∴ ق(∡ م ج ن) = ٦٠° ، ∵ $\overline{م ج} \perp \overline{أ ب}$ ∴ ج منتصف أب

∴ في △ م أ ج القائم في ج : |م ج|² = (١٠)² − (٦)² = ٦٤ ⇐ |م ج| = ٨ سم (فيثاغورث)

∵ △ ن م ج قائم في م (لماذا) ∴ ظا ٦٠° = $\frac{|ن م|}{8}$ ⇐ |ن م| = ٨√٣ سم

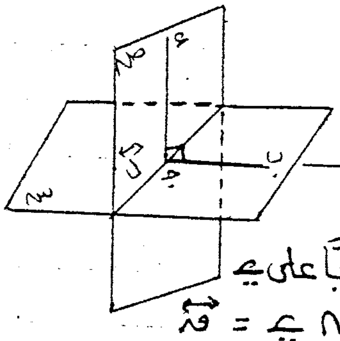
العمود النازل من مركز الدائرة على الوتر ينصفه

المستويات المتعامدة

تعريف (١) يتعامد مستويان اذا كانت زاويتهما الخطية قائمة.

في الشكل المقابل: ق(∡ ب جـ ء) = ٩٠° وهي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية (س $\overleftrightarrow{ل}$ ص)

∴ س $\perp$ ص.

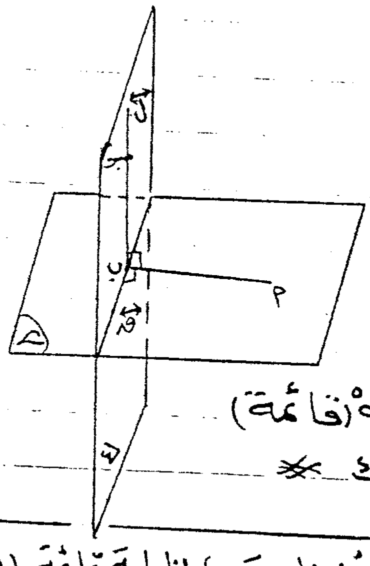


مبرهنة [٩] اذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ مستقيماً عمودياً على مستوي ي فإن كل مستوى ك مار بالمستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ يكون عمودياً على ي

المعطيات: ① ل $\perp$ ي عند ب ② $\overleftrightarrow{ل}$ $\subset$ ك ③ ك $\cap$ ي = $\overleftrightarrow{قه}$

المطلوب: اثبات أن: ي $\perp$ ك

العمل: نرسم من ب القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ في ي بحيث $\overline{أب}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{قه}$



البرهان: ∵ $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ ي (معطى) ، ∵ $\overleftrightarrow{قه}$ $\subset$ ي

∴ $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{قه}$.

، ∵ $\overline{أب}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{قه}$ (عملاً)

∴ الزاوية بين $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية بين ك ، ي أي أن:

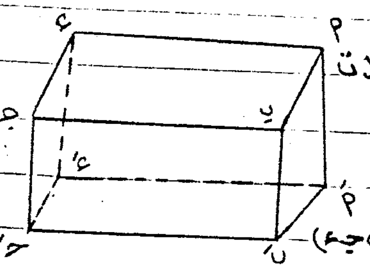
∡ (أ ب جـ) هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية (ي $\overleftrightarrow{قه}$ ك)

، ∵ $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ ي ∴ $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ $\overline{أب}$ ∴ ق(∡ أ ب جـ) = ٩٠° (قائمة)

∴ ق [∡ (ي $\overleftrightarrow{قه}$ ك)] = ٩٠° (قائمة) ∴ ي $\perp$ ك

تنبيه: لاثبات تعامد مستويين اما أن نثبت أن زاويتهما الخطية قائمة (التعريف) أو نثبت أن مستقيماً في أحدهما عمودي على الآخر (المبرهنة ٩)

نتيجة: اذا كان: ك ، ي مستويين متعامدين ، فإن كل مستقيم عمودي على ي من نقطة ب $\in$ ك يقع في ك.



مثال: في الشكل المجاور أ ب جـ ء أَ بَ جَ ءَ متوازي مستطيلات

اثبت أن المستوي (أ ب جـ ء) $\perp$ المستوي (أ أَ بَ ب)

الحل: ∵ أ ب جـ ء أَ بَ جَ ءَ متوازي مستطيلات

∴ $\overline{أأَ}$ $\perp$ $\overline{أب}$ ، $\overline{أء}$ المتقاطعان في أ في المستوي (أ ب جـ)

∵ $\overline{أأ'}$ ⊥ مستويهما (أ ب جـ ء)

∴ المستوي (أأ' ب' ب) يمر بالمستقيم أأ'

∴ المستوي (أأ' ب' ب) ⊥ المستوي (أ ب جـ ء) (مبرهنة ٩)

(ط٢) (باستخدام التعريف):

∵ أ ب جـ ء أ' ب' جـ' ء' متوازي مستطيلات ∴ $\overline{أأ'}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، $\overline{أء}$ ⊥ $\overline{أب}$

وحيث أن: $\overline{أب}$ هو الفصل المشترك للمستويين (أ ب جـ ء)، (أأ' ب' ب)

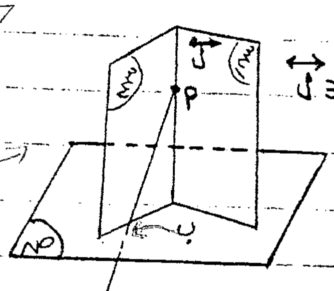
∴ الزاوية الخطية لزاوية المستويين هي ∠ أ' أ ء

∴ ق(∠ أ' أ ء) = ٩٠° (قائمة) لأن $\overline{أأ'}$ ⊥ $\overline{أء}$

فيكون المستوي (أ ب جـ ء) ⊥ المستوي (أأ' ب' ب) (تعريف)

مبرهنة ١٠: اذا تعامد كل من المستويين س١، س٢ مع مستوي ثالث ص فإن الفاصل المشترك للمستويين س١، س٢ عمودي على المستوي ص

المعطيات: ① س١ ⊥ ص ② س٢ ⊥ ص ③ س١ ∩ س٢ = $\overleftrightarrow{ل}$



المطلوب: اثبات أن: $\overleftrightarrow{ل}$ ⊥ ص

البرهان: نفرض أن: $\overleftrightarrow{ل}$ ⊥̸ ص ولنأخذ نقطة أ ∈ $\overleftrightarrow{ل}$

نرسم منها $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ ص

∵ أ ∈ $\overleftrightarrow{ل}$ ∴ أ ∈ س١ ، ∵ س١ ⊥ ص

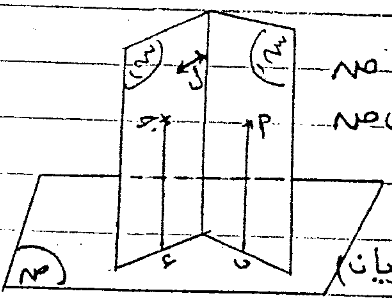
∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊂ س١ (نتيجة)

بالمثل نثبت أن $\overleftrightarrow{أب}$ ⊂ س٢

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ هو الفصل المشترك للمستويين س١، س٢ وحيث أن الفصل المشترك لمستويين وحيد ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ينطبق على $\overleftrightarrow{ل}$

وحيث أن $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ ص ∴ $\overleftrightarrow{ل}$ ⊥ ص (وهو المطلوب)

طريقة ثانية للبرهان:



العمل: من نقطة أ في المستوي س١ نرسم عموداً $\overline{أب}$ على ص

ومن نقطة جـ في المستوي س٢ نرسم عموداً $\overline{جـء}$ على ص

البرهان: ∵ $\overline{أب}$ ⊥ ص (عملاً) ، ∵ $\overline{جـء}$ ⊥ ص (عملاً)

∴ $\overline{أب}$ // $\overline{جـء}$ (مبرهنة ٥) (المستقيمان العموديان على مستوي واحد متوازيان)

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊂ س١ و $\overleftrightarrow{جـء}$ ⊂ س٢

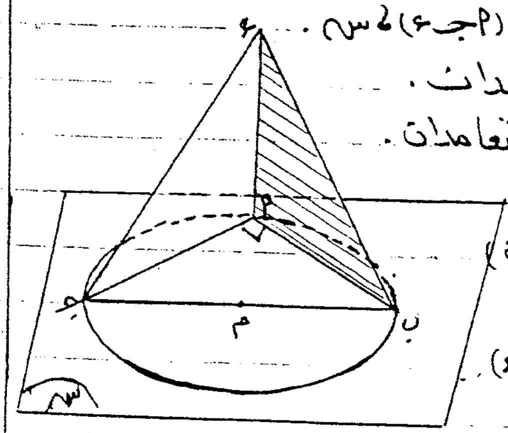
و س١ ∩ س٢ = $\overleftrightarrow{ل}$ ∴ $\overleftrightarrow{ل}$ // $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـء}$ (مبرهنة في التوازي)

∴ $\overleftrightarrow{ل}$ ⊥ ص (مبرهنة) (المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر)

ملاحظة: يمكن اعادة صياغة المبرهنة: اذا تعامد مستويان متقاطعان مع مستوي ثالث فإن فصلهما المشترك عمودي على ذلك المستوي (الثالث).

أمثلة وتمارين محلولة:

[1] م دائرة في المستوي س ، قطرها ب جـ ، أ نقطة على محيطها ، ء ∉ س رسم ءأ ⊥ أجـ



المطلوب: أولاً: حدد الزاوية الخطية للمستويين (أجـء) ، س .

ثانياً: اثبت أن: المستويين (أبء) ، س متعامدان .

ثالثاً: اثبت أن: المستويين (أبء) ، (أجـء) متعامدان .

الحل: ∵ ب جـ قطر في الدائرة م .

∴ ق(∠ب أ جـ) = ٩٠° (محيطية على نصف دائرة)

∴ ب أ ⊥ أجـ و ∵ ءأ ⊥ أجـ

و أجـ هو الفصل المشترك للمستويين (أجـء) ، س .

∴ الزاوية بين المستقيمين ب أ ، ءأ وهي ∠ءأب هي الزاوية الخطية للمستويين (أجـء) ، س (وهو المطلوب أولاً)

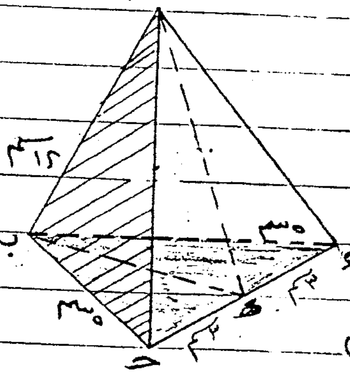
∵ ءأ ⊥ أجـ ، ب أ ⊥ أجـ ∴ أجـ ⊥ المستوي (أبء)

وحيث أن أجـ ⊂ س ∴ س ⊥ (أبء) (مبرهنة ٩) وهو المطلوب ثانياً .

∵ جـأ ⊂ (أجـء) ، ∵ أجـ ⊥ (أبء) (اثباتاً)

∴ (أجـء) ⊥ (أبء) (مبرهنة ٩) .. وهو المطلوب ثالثاً .

[2] المستويان (أبجـ) ، (أبء) عموديان على المستوي (ءجـب) فإذا كان |أب| = ١٢سم ، |بجـ| = |بء| = ٥سم وطول جـء = ٦سم أوجد ظل وجيب زاوية المستويين (أءجـ) ، (بءجـ) .



الحل: العمل: ننصف جـء في هـ ثم نصل ب هـ و أهـ

البرهان: ∵ أب هو الفصل المشترك للمستويين (أبجـ) ، (أبء) العموديان على المستوي (ءجـب)

∴ أب ⊥ المستوي (ءجـب) ← (1)

∵ △ بجـء متساوي الساقين ، هـ منتصف جـء

∴ ب هـ ⊥ جـء حيث جـء واقع في المستوي (ب جـء)

∴ أهـ ⊥ جـء (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

∵ جـء هو الفصل المشترك للمستويين (أجـء) ، (بجـء)

∴ ∠أهـب هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية للمستويين (أجـء) ، (بجـء)

∴ |ءهـ| = |جـهـ| = ٣سم لأن هـ منتصف |ءجـ|

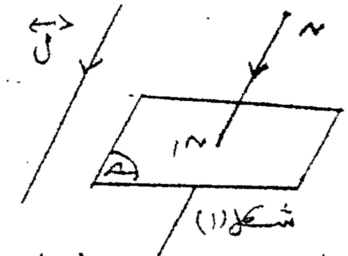
المساقط.

أولاً: الإسقاط المتوازي:

١. مسقط نقطة ن على مستوى ح (ن ∉ ح) توازياً مع المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ($\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ∦ ح) هو النقطة ن١، حيث $\overleftrightarrow{\text{ن ن١}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

أي: اذا كانت ن ∉ ح فإن مسقط النقطة ن على ح توازياً مع $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ هو النقطة ن١

نسمي المستوى ح بمستوى الإسقاط (شكل(١))

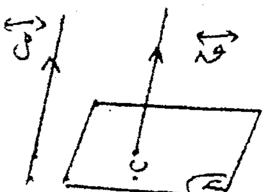


شكل(١)

٢. اذا كانت النقطة ن واقعة في مستوى الإسقاط فإن مسقطها نفسها.

٣. اذا كان: $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ فإن مسقط $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ على ح توازياً مع $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ هو نقطة.

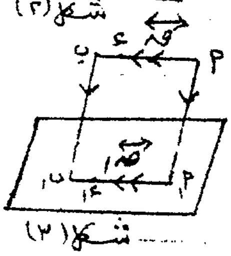
أي: اذا كان $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ فإن مسقط $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ على ح توازياً مع $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ هو النقطة ب. (شكل (٢))



شكل(٢)

٤. اذا كان: $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ // ح ولا يوازي $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ فإن مسقط $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ على ح توازياً مع $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ هو مستقيم $\overleftrightarrow{\text{ق١}}$ يوازي $\overleftrightarrow{\text{ق}}$

انظر شكل (٣)



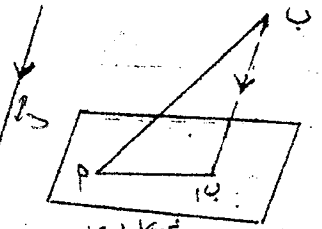
شكل(٣)

ونلاحظ ① كل نقطة ء١ من المسقط $\overleftrightarrow{\text{ق١}}$ هي مسقط لنقطة ء من $\overleftrightarrow{\text{ق}}$.

② المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ و مسقطه $\overleftrightarrow{\text{ق١}}$ يقعان في مستوى واحد يقطع مستوى الإسقاط ح في الفصل المشترك $\overleftrightarrow{\text{ق١}}$.

٥. اذا كان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع ح في أ فإن:
مسقط $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ على ح توازياً مع $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ هو $\overleftrightarrow{\text{أب١}}$

شكل (٤)

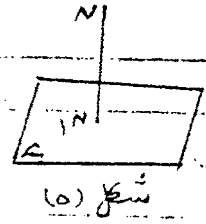


شكل(٤)

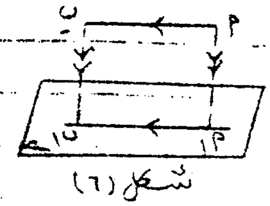
ثانياً: الإسقاط القائم (الإسقاط العمودي)

يُقال عن الإسقاط أنه قائم اذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ عمودياً على ح

المسقط القائم لنقطة ن على مستوى ح هو نقطة ن١ حيث يكون $\overleftrightarrow{\text{ن ن١}}$ ⊥ ح . (شكل (٥))



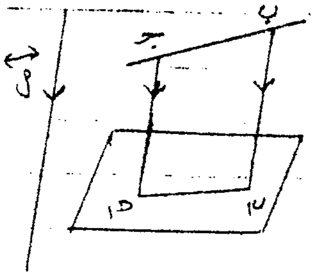
شكل (٥)



شكل (٦)

- المسقط القائم للمستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ على ي
هو $\overleftrightarrow{أ_1ب_1}$ حيث $\overleftrightarrow{أ_1ب_1}$ // ي
و $\overline{أأ_1}$ ⊥ ي ، $\overline{بب_1}$ ⊥ ي (شكل ٦) .

مثال في الشكل : ب١ ، جـ١ مسقطا ب ، جـ على المستوي س
بإسقاط متواز مع $\overleftrightarrow{ل}$.



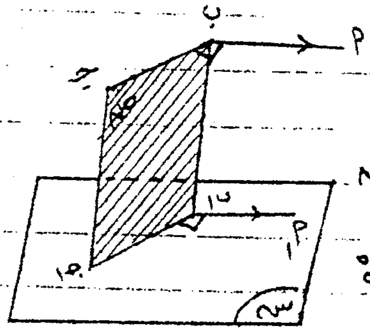
اثبت أن : الشكل ب ب١ جـ١ جـ شبه منحرف .

المعطيات : ① $\overleftrightarrow{ب_1جـ_1}$ مسقط $\overleftrightarrow{بجـ}$ على س .
② $\overleftrightarrow{بب_1}$ // $\overleftrightarrow{ل}$ ③ $\overleftrightarrow{جـجـ_1}$ // $\overleftrightarrow{ل}$

المطلوب : اثبات أن الشكل ب ب١ جـ١ جـ شبه منحرف .

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{بب_1}$ // $\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{جـجـ_1}$ // $\overleftrightarrow{ل}$ (معطى)
∴ $\overleftrightarrow{بب_1}$ // $\overleftrightarrow{جـجـ_1}$ وبالتالي الشكل ب ب١ جـ١ جـ شبه منحرف

مبرهنة (١١) : المسقط القائم لزاوية قائمة على مستوٍ يوازي أحد ضلعيها
هو زاوية قائمة .

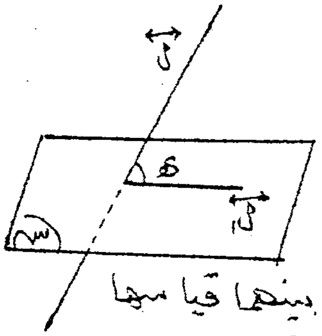


المعطيات : ① ق ∡ (أ ب جـ) = ٩٠° ② $\overline{أب}$ // س
③ ∡ (أ١ ب١ جـ١) المسقط القائم لـ ∡ (أ ب جـ)

المطلوب : اثبات أن : ق ∡ (أ١ ب١ جـ١) = ٩٠° .

البرهان : ∵ $\overline{أب}$ // س معطى ، $\overline{أ_1ب_1}$ مسقطه على س
∴ $\overline{أب}$ // $\overline{أ_1ب_1}$
، ∵ $\overline{أب}$ ⊥ $\overline{بجـ}$ لأن ق ∡ (أ ب جـ) = ٩٠°
∴ $\overline{أ_1ب_1}$ ⊥ $\overline{بجـ}$ ⟵ ①
∵ ب١ مسقط قائم لـ ب على س ∴ $\overline{بب_1}$ ⊥ س
فيكون : $\overline{بب_1}$ ⊥ $\overline{أ_1ب_1}$ ⟵ ②
من ① ، ② ينتج أن : $\overline{أ_1ب_1}$ ⊥ المستوي ص المعين بالمستقيمين المتقاطعين
$\overline{بب_1}$ ، $\overline{بجـ}$ وحيث أن : $\overline{ب_1جـ_1}$ ⊂ ص
∴ $\overline{أ_1ب_1}$ ⊥ $\overline{ب_1جـ_1}$ ∴ ق ∡ (أ١ ب١ جـ١) = ٩٠° .
وهو المطلوب

ملاحظة : يعتبر الإسقاط قائماً ما لم يذكر خلاف ذلك .



الزاوية بين مستقيم و مستوي :

تعريف : الزاوية بين المستقيم ل↔ و المستوي س هي الزاوية غير المنفرجة (الحادة أو القائمة) المحصورة بين المستقيم ل↔ ومسقطه القائم ل١↔ على المستوي س .

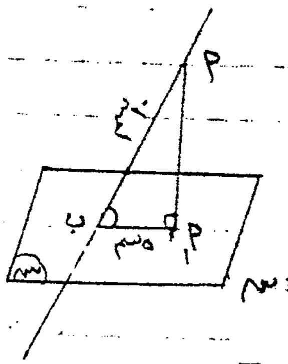
* في الشكل ل١↔ المسقط القائم للمستقيم ل↔ على س الزاوية بينهما قياسها هـ (غير منفرجة) هي زاوية المستقيم ل↔ مع المستوي س .
و تسمى أيضاً زاوية ميل المستقيم على المستوي س .

حالتان خاصتان :

(١) اذا كان المستقيم محتوى في المستوي أو يوازيه فإن الزاوية بين المستقيم والمستوي قياسها صفر.

(٢) اذا كان المستقيم ل↔ ⊥ س فمسقطه القائم نقطة هي نقطة تقاطعه مع المستوي لكنه (ل↔) ⊥ على جميع المستقيمات في س فتكون زاوية ميل المستقيم على المستوي تساوي (٩٠°).

مثال: أ نقطة لا تنتمي إلى المستوي س . رسم أب↔ قطع المستوي س في ب فإذا كانت أ١ هي مسقط أ على المستوي س ، أب = ١٠سم ، أ١ب = ٥سم أوجد (١) قياس زاوية أب↔ والمستوي س.
(٢) بُعد النقطة أ عن المستوي س .



الحل: المعطيات: أأ١ مسقط قائم لـ أ على س
② أ١ب = ٥سم ③ أب = ١٠سم

المطلوب: إيجاد (١) قياس زاوية ميل أب↔ على س.
(٢) بُعد أ عن المستوي س.

البرهان: ∵ أ١ هي مسقط أ على المستوي س ، ب ∈ س
∴ أ١ب هو مسقط أب على المستوي س
∴ ∠(أ ب أ١) هي الزاوية بين المستقيم أب↔ و المستوي س.
∵ أأ١ ⊥ س ∴ أأ١ ⊥ أ١ب حيث أ١ب ⊂ س
فيكون Δ أأ١ب قائم في أ١ و فيه:
جتا(∠أ ب أ١) = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$ فيكون ق∠(أ ب أ١) = ٦٠°
وهو المطلوب (١).

بُعد النقطة أ عن المستوى س = |أأ١| ∵ في △ أأ١ب القائم في أ١

∴ جا(∠ أ ب أ١) = $\frac{|أأ١|}{|أب|}$ ⇒ جا ٦٠° = $\frac{|أأ١|}{١٠}$

∴ |أأ١| = ١٠ جا ٦٠° = ١٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٥ $\sqrt{٣}$ سم . وهو المطلوب (٢)

مبرهنة (١٢)

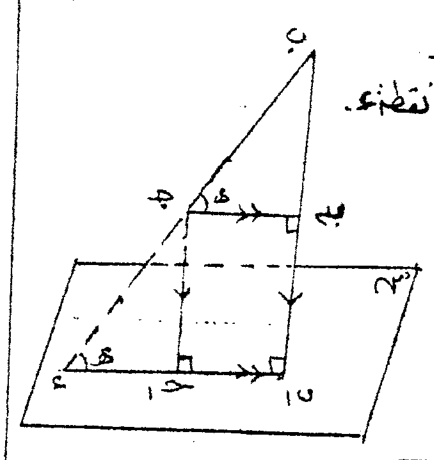
ليكن $\overline{ب١ج١}$ هو المسقط القائم للقطعة المستقيمة $\overline{بج}$ على المستوى س

فإن: |ب١ج١| = |بج| جتا هـ حيث هـ قياس الزاوية المحصورة

بين $\overleftrightarrow{بج}$ والمستوى س .

المعطيات: ① $\overline{ب١ج١}$ المسقط القائم للقطعة $\overline{بج}$ على المستوى س .

② هـ قياس الزاوية بين $\overleftrightarrow{بج}$ ، س .



المطلوب: إثبات أن: |ب١ج١| = |بج| جتا هـ

العمل: نمد $\overline{بج}$ على استقامته حتى يلاقي س في نقطة ء .

نرسم $\overline{جب٢}$ // $\overline{ج١ب١}$.

البرهان: ∵ $\overline{بب٢}$ ⊥ $\overline{ب١ج١}$ (لأن الإسقاط قائم)

، ∵ $\overline{جج١}$ ⊥ $\overline{ب١ج١}$ (لأن الإسقاط قائم)

∴ $\overline{جج١}$ // $\overline{بب٢}$ ← ①

، ∵ $\overline{جب٢}$ // $\overline{ج١ب١}$ عملاً ← ②

∴ الشكل ب١ ج١ ج ب٢ متوازي أضلاع

وحيث أن ∠ ب٢ ب١ ج١ قائمة لأن $\overline{بب٢}$ ⊥ $\overline{ب١ج١}$

∴ الشكل ب١ ج١ ج ب٢ مستطيل

∴ |ب٢ج| = |ب١ج١|

في △ ب ب٢ ج القائم في ب٢ ∵ جتا هـ = $\frac{|ب٢ج|}{|بج|}$ ⇒ |ب٢ج| = |بج| جتا هـ

وحيث أن |ب٢ج| = |ب١ج١|

∴ |ب١ج١| = |بج| جتا هـ . (وهو المطلوب)

ملاحظة: يمكن إعادة صياغة المبرهنة بالشكل:

" طول المسقط القائم لقطعة مستقيمة $\overline{بج}$ على مستوى س

يساوي حاصل ضرب طول القطعة المستقيمة في جيب تمام زاوية

المستقيم $\overleftrightarrow{بج}$ مع س .

مثال: $\overline{ب_1 جـ_1}$ هو المسقط القائم للقطعة المستقيمة $\overline{بجـ}$ على المستوى س. أوجد |ب١جـ١| في الحالات الآتية:

|بجـ| = ١٢ سم.

(١) $\overline{بجـ}$ يميل على المستوى س بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$

(٢) زاوية الاسقاط تعطى بالعلاقة ظا هـ $= \frac{1}{2}$

(٣) $\overline{بجـ}$ // س

(٤) $\overline{بجـ} \perp$ س

∵ |ب١جـ١| = |بجـ| جتا هـ

الحل: (١) ∵ هـ $= \frac{\pi}{3}$

∴ |ب١جـ١| = ١٢ جتا $\frac{\pi}{3}$ = ١٢ × $\frac{1}{2}$ = ٦ سم.

(٢) ∵ ظا هـ $= \frac{1}{2}$ ⟸ قا² هـ = ١ + ظا² هـ = ١ + $\frac{1}{4}$ = $\frac{5}{4}$

∴ قا هـ = $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ⟸ جتا هـ = $\frac{2}{\sqrt{5}}$

∴ |ب١جـ١| = |بجـ| جتا هـ = ١٢ × $\frac{2}{\sqrt{5}}$ = $\frac{24}{\sqrt{5}}$ سم

(٣) $\overline{بجـ}$ // س ∴ هـ = ٠

∴ |ب١جـ١| = |بجـ| جتا هـ = ١٢ × جتا ٠ = ١٢ سم

(٤) $\overline{بجـ} \perp$ س ∴ هـ = ٩٠°

∴ |ب١جـ١| = |بجـ| جتا هـ = ١٢ جتا ٩٠° = صفر

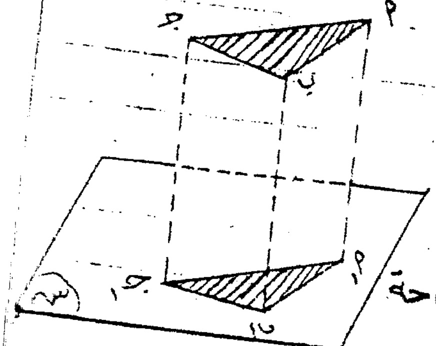
لاحظ أن $\overline{بجـ} \perp$ س لذا فإن مسقط $\overline{بجـ}$ على س هو نقطة.

نتيجة: ليكن المثلث أ١ب١جـ١ هو المسقط القائم للمثلث أبجـ على المستوى س فإن: سط١ = سط × جتا هـ

حيث سط١: مساحة △أ١ب١جـ١ (المسقط)

& سط: مساحة △أبجـ

& هـ: قياس الزاوية المحصورة بين المستويين (أبجـ)، س.



مثال: أوجد مساحة △أ١ب١جـ١ إذا كانت مساحة △أبجـ تساوي ٢٨ سم² إذا علمت أن △أ١ب١جـ١ هو المسقط القائم للمثلث أبجـ على س وذلك في الحالات الآتية:

① الزاوية بين المستويين (أ ب جـ) ، س هـ = ٣٠°

② الزاوية بين المستويين (أ ب جـ) ، س هـ = صفر

③ المستوي (أ ب جـ) ⊥ س .

الحل: ① عند هـ = ٣٠° ∴ سط١ = سط × جتا هـ = ٢٨ جتا ٣٠ = ٢٨ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ سط١ = ١٤$\sqrt{3}$ سم²

② عند هـ = صفر أي أن (أ ب جـ) // س

∴ سط١ = ٢٨ جتا ٠ = ٢٨ × ١ = ٢٨ سم²

نستنتج أنه إذا كان Δ أ ب جـ // س فإن المثلث ومسقطه لهما نفس المساحة .

③ عندما يكون (أ ب جـ) ⊥ س ∴ هـ = ٩٠°

وتكون سط١ = سط × جتا هـ = ٢٨ جتا ٩٠ = صفر (أي أن المثلث مسقطه مستقيم)

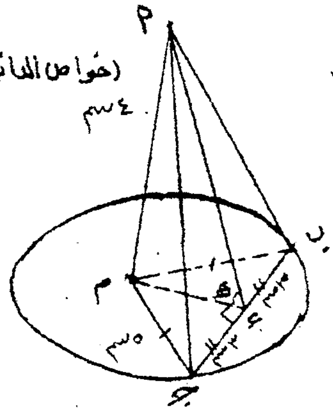
تمارين محلولة :

١- م دائرة قطرها ١٠ سم ، أقيم $\overline{أم}$ عمودياً على مستويها . ب ، جـ نقطتان على الدائرة بحيث |ب جـ| = ٦ سم ، |أ م| = ٤ سم .

① أوجد قياس الزاوية الخطية بين المستويين (أ ب جـ) ، (م ب جـ)

② أوجد مساحة المسقط القائم للمثلث أ ب جـ على مستوي الدائرة .

الحل: العمل: ننصف الوتر $\overline{ب جـ}$ عند ء ونصل $\overline{م ء}$ ، $\overline{أ ء}$



البرهان: ∵ ء منتصف الوتر $\overline{ب جـ}$ ∴ $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ (خواص الدائرة)

، ∵ $\overline{أ م}$ ⊥ مستوي الدائرة م

∴ $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

∵ مستوي الدائرة م ∩ المستوي (أ ب جـ) = $\overleftrightarrow{ب جـ}$

∴ ∡ أ ء م هي الزاوية الخطية للمستويين وليكن قياسها هـ .

∵ Δ م ء جـ قائم في ء : ∴ |م جـ|² = |ء جـ|² + |م ء|² ⇐ ٢٥ = ٩ + |م ء|²

∴ |م ء|² = ٢٥ − ٩ = ١٦ ⇐ |م ء| = ٤ سم

∵ |أ م| = ٤ سم ، Δ أ م ء القائم في م (لأن $\overline{أ م}$ ⊥ مستوي الدائرة م)

أي أن Δ أ م ء القائم متساوي الساقين ∴ زاويتا القاعدة متساويتان

فيكون ق(∡ أ ء م) = ٤٥° أي أن هـ = ٤٥° وهو المطلوب (١)

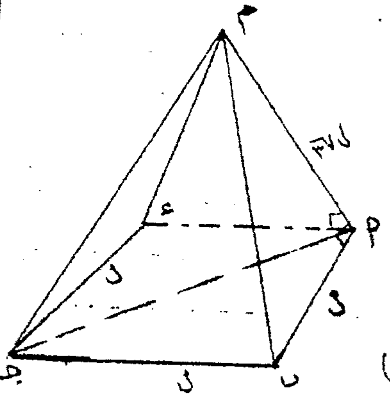
∵ م أ ⊥ مستوي الدائرة م ∴ م هي المسقط القائم لـ أ على مستوى الدائرة م

∴ المسقط القائم للمثلث أ ب جـ على مستوي الدائرة م هو المثلث م ب جـ

وتكون مساحة Δ م ب جـ = $\frac{1}{2}$ |ب جـ| × |م ء| = $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٤ = ١٢ سم².

---

(٢) م أ ب جـ ء هرم رباعي قاعدته أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ل وحدة طول
م أ عمودي على كل من أ ب ، أ ء ، م أ = ل$\sqrt{3}$ وحدة طول. اثبت أن قياس
الزاوية بين المستويين (أ ب جـ ء) ، (م ب جـ) تساوي ٦٠°.
ثم أوجد ظل زاوية ميل م جـ على مستوي القاعدة (أ ب جـ ء)



الحل:

البرهان: ∵ م أ ⊥ أ ء و م أ ⊥ أ ب

∴ م أ ⊥ المستوي (أ ب جـ ء)

∵ (أ ب جـ ء) ∩ (م ب جـ) = ب جـ (المفصل)

، ∵ أ ب ⊥ ب جـ (خواص المربع)
وحيث أ ب واقع في (أ ب جـ ء) ← ①

، ∵ م أ ⊥ (أ ب جـ) ∴ م ب ⊥ ب جـ (مبرهنة الأعمدة)
وحيث أن م ب واقع في (م ب جـ) ← ②

من ①، ② ∴ ∠ أ ب م هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية (م - ب جـ - أ)

∵ Δ م أ ب قائم عند أ لأن م أ ⊥ أ ب

∴ ظا(∠ أ ب م) = $\frac{\text{ل}\sqrt{3}}{\text{ل}}$ = $\sqrt{3}$ ⇐ ق(∠ أ ب م) = ٦٠° . ①

لإيجاد المطلوب الثاني: نرسم أ جـ

∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب (خواص المربع)

∴ |أ جـ|² = |أ ب|² + |ب جـ|² = ل² + ل² = ٢ل² ⇐ |أ جـ| = $\sqrt{2}$ ل وحدة

، ∵ م أ ⊥ المستوى (أ ب جـ ء) ∴ م أ ⊥ أ جـ

فيكون أ جـ هو المسقط القائم لـ م جـ على المستوى (أ ب جـ ء)

فتكون ∠ ميل م جـ على المستوي القاعدة هي ∠ م جـ أ.

ويكون Δ م أ جـ قائم عند أ.

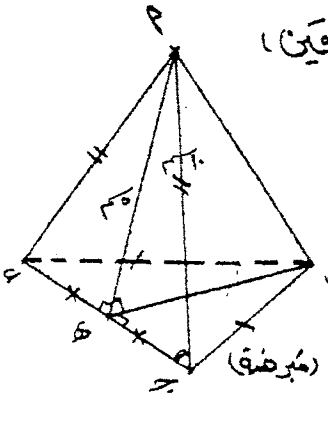
∴ ظا(∠ م جـ أ) = $\frac{|\text{م أ}|}{|\text{أ جـ}|}$ = $\frac{\text{ل}\sqrt{3}}{\text{ل}\sqrt{2}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ وهو المطلوب الثاني.

٢٠٠٠/٢٠٠١ د٢

(٣) أ ب جـ ء هرم ثلاثي فيه |ب جـ| = |ء ب| ، |أ جـ| = |أ ء| ، هـ منتصف جـ ء

أولاً: اثبت أن المستوي (أ ب هـ) ⊥ المستوي (ب جـ ء).

ثانياً: إذا كان |م ج| = ١٠سم ، |م هـ| = ٥سم فأوجد طول مسقط م ج على المستوي (ب ج ء).



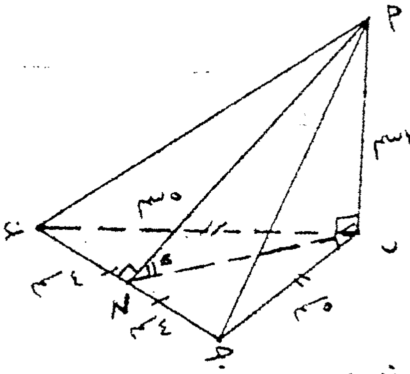
الحل: ∵ △ ب ج ء فيه |ب ج| = |ب ء| (△ متساوي الساقين)
، هـ منتصف ج ء ∴ ب هـ ⊥ ج ء ← ①
بالمثل △ م ج ء متساوي الساقين (لأن |م ج| = |م ء|)
، هـ منتصف ج ء ∴ م هـ ⊥ ج ء ← ②
من ① ، ② ∴ ج ء ⊥ المستوي (م هـ ب)
، ∵ ج ء ⊂ المستوي (ب ج ء)
∴ المستوي (ب ج ء) ⊥ المستوى (م هـ ب) (مبرهنة)
وهو المطلوب أولاً.

∵ المستوي (ب ج ء) ⊥ المستوي (م هـ ب) ثانياً.
∴ زاويتهما ∡ م هـ ب = ٩٠° فيكون م هـ ⊥ هـ ب
وحيث أن: م هـ ⊥ ج ء فإن م هـ ⊥ المستوي (ب ج ء)
فيكون هـ ج هو المسقط القائم لـ م ج على المستوي (ب ج ء)
، ∵ △ م ج هـ قائم الزاوية في هـ ، ق(∡ م ج هـ) = ٣٠
وحيث أن ∡ م ج هـ هي زاوية المستقيم مع المستوي (ب ج ء)
∴ |ج هـ| = |م ج| جتا(∡ م ج هـ) = ١٠ × جتا ٣٠ = ١٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٥$\sqrt{3}$ سم
وهو المطلوب ثانياً.

ط٢: |ج هـ|^2 = |م ج|^2 − |م هـ|^2 (مبرهنة فيثاغورث)
|ج هـ|^2 = ١٠٠ − ٢٥ = ٧٥ ⟸ |ج هـ| = $\sqrt{75}$ = ٥$\sqrt{3}$ سم.

---

٤٤) ب ج ء مثلث متساوي الساقين فيه |ب ج| = |ب ء| = ٥سم ، |ج ء| = ٨سم ٨٩
أقمنا من رأسه ب عموداً على مستويه وأخذنا نقطة م عليه
بحيث |م ب| = ٣سم والمطلوب: ① حدّد نوع △ م ج ء مع التعليل
② المستويان (م ب ج) ، (ب ج ء) متعامدان لماذا؟
③ بفرض ن منتصف ج ء اثبت أن: ج ء ⊥ (م ب ن)
④ احسب طول ب ن ثم حدد على الشكل الزاوية الخطية للثنائية التي حرفها ج ء واحسب قياسها.
⑤ احسب مساحة △ م ج ء.



الحل: ① ∵ $\overline{أب} \perp$ (ب جـ ء)

∴ $\overline{أب} \perp \overline{ب جـ}$ ، $\overline{أب} \perp \overline{ب ء}$

∴ △ أ ب جـ قائم في ب : ∴ $|أجـ|^2 = |أب|^2 + |ب جـ|^2$

∴ $|أجـ|^2 = (٣)^2 + (٥)^2 = ٣٤$ (فيثاغورث)

∴ $|أجـ| = \sqrt{٣٤}$.

والمثلث أ ب ء قائم في ب :

∴ $|أء|^2 = |أب|^2 + |ب ء|^2$ (فيثاغورث)

∴ $|أء|^2 = (٣)^2 + (٥)^2 = ٣٤ \Leftarrow |أء| = \sqrt{٣٤}$.

∴ $|أجـ| = |أء|$ في △ أ جـ ء ∴ △ أ جـ ء متساوي الساقين .

② ∵ $\overline{أب} \perp$ المستوي (ب جـ ء) (معطى)

وحيث أن $\overline{أب} \subset$ المستوي (أ ب جـ) ∴ (أ ب جـ) $\perp$ (ب جـ ء) ⋇

③

∵ $|أجـ| = |أء|$ (إثباتاً في ①)

، ن منتصف $\overline{جـ ء}$ (معطى) ∴ $\overline{أن} \perp \overline{جـ ء}$ ← *

، ∵ $|ب جـ| = |ب ء|$ ، ن منتصف $\overline{جـ ء}$ ∴ $\overline{ب ن} \perp \overline{جـ ء}$ ← **

من * ، ** نجد: $\overline{جـ ء} \perp$ (أ ب ن) .

④ في △ ب ن جـ القائم في ن : ∵ $|ب جـ|^2 = |ب ن|^2 + |جـ ن|^2$ (فيثاغورث)

∴ $|ب ن|^2 = |ب جـ|^2 - |جـ ن|^2 = (٥)^2 - (٤)^2 = ٢٥ - ١٦ = ٩$

∴ $|ب ن| = ٣$ سم

∵ $\overline{أن} \perp \overline{جـ ء}$ ، $\overline{أن}$ يقع في (أ جـ ء) ، ∵ $\overline{ن ب} \perp \overline{جـ ء}$ ، $\overline{ن ب}$ يقع في (ب جـ ء)

، (أ جـ ء) ∩ (ب جـ ء) = $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ∴ الزاوية التي حرفها $\overleftrightarrow{جـ ء}$ هي زاوية المستويين (أ جـ ء) ، (ب جـ ء) وزاويتها الخطية ∠ أ ن ب

∵ $\overline{أب} \perp \overline{ب ن}$ ∴ في △ أ ب ن القائم في ب والمتساوي الساقين لأن $|أب| = |ب ن| = ٣$ سم ∴ ق(∠ أ ن ب) = ٤٥° .

⑤ ∵ △ أ ب ن قائم في ب ∴ $|أن|^2 = |أب|^2 + |ب ن|^2 = (٣)^2 + (٣)^2 = ١٨$ (فيثاغورث)

∴ $|أن| = ٣\sqrt{٢}$ سم ، ∵ $\overline{أن} \perp \overline{جـ ء}$ أي أن $\overline{أن}$ ارتفاع في △ أ جـ ء

∴ مساحة △ أ جـ ء $= \frac{1}{2} |جـ ء| \times |أن| = \frac{1}{2} \times ٨ \times ٣\sqrt{٢} = ١٢\sqrt{٢}$ سم

وهو المطلوب.

(أسئلة عامة للمراجعة)

أ- اكمل ما يأتي :

١- اذا اشترك مستويان بنقطة فإنهما يشتركان ....
٢- اذا وقع مستقيمان في مستوي واحد ولم يشتركا بأي نقطة كانا ....
٣- المسقط القائم للزاوية القائمة على مستوي يوازي أحد ضلعيها هو ....
٤- نقول عن زاويتين زوجيتين أنهما متساويتان في القياس اذا كان قياسا ...
٥- الزاوية الزوجية هي اتحاد نصفي مستويين ....
٦- اذا كان: ب ∩ ك = ∅ فإن: ب ..... ك .
٧- اذا كان: ل ⊥ ب ، م ⊂ ب فإن ل .... م
٨- اذا كان: ل ∥ ب فإن ل ∩ ب = ... أو ل ∩ ب = ...
٩- يكون: ل ⊥ ب اذا كان عمودي على ....
١٠- اذا كان: ب ∩ ب' = م فإن م يسمى ......
١١- اذا كان: ل عمودياً على .... الواقعة في المستوي ب فإن: ل ⊥ ب
١٢- اذا قطع مستوي ب مستويين متوازيين ك ، ك' وفق المستقيمين المشتركين ل ، ل' على الترتيب فإن: ....
١٣- المستقيم الموازي لمستويين متقاطعين يوازي ....
١٤- اذا كان ل عمودي على مستوي ب فإن كل مستوي يمر بـ ... يكون ....
١٥- ل ⊥ ب ، ب ∥ ب' فإن ل .... ب'
١٦- اذا كان المستقيم ل' موازياً للمستقيم ل من مستوي ب فإن ل' ....
١٧- المستويان العموديان على مستقيم واحد ....
١٨- المستقيمات العموديان على مستوي واحد ....
١٩- المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين في مستوٍ يكون ....
٢٠- المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين ......
٢١- المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين ....
٢٢- المستويات العموديان على مستقيم واحد ....
٢٣- المستقيمات العمودية على مستوٍ واحد ....
٢٤- إذا توازى مستقيمان، وكان أحدهما عمودياً على مستوٍ ك فإن المستقيم الآخر ....
٢٥- جميع المستقيمات المرسومة من نقطة واحدة وعمودية على مستقيم

مفروض تقع في ......

(٢٦) يتعامد المستقيم ل↔ والمستوي ب اذا كان ...

(٢٧) نقول عن مستويين أنهما متعامدان اذا كانت زاوية بينهما الخطية ....

(٢٨) اذا تعامد مستويين متقاطعين مع مستوى ثالث فإن فصلهما المشترك .....

(٢٩) اذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على الفاصل المشترك للمستويين كان هذا المستقيم .....

(٣٠) يتعامد مستويان إذا كان في أحدهما مستقيم عمودي على ....

(٣١) إذا كان: ل↔ ⊥ ب فإن ل↔ عمودي على ....

(٣٢) إذا كان: ل↔ ⊥ هـ↔ ، ل↔ ⊥ ء فإن: هـ↔ ، ب ....

(٣٣) إذا كان: ل↔ والمستوي ك عموديين على المستوي ب فإن:
ل↔ ... ك أو ل↔ ...

(٣٤) اذا كان: ل↔ ⊥ ب ، ل↔ ⊂ ك فإن: ......

(٣٥) مسقط مثلث على مستوٍ يوازي مستوي المثلث هو....

(٣٦) اذا رسم مستقيم مائل على مستوٍ وكان عمودياً على مستقيم في المستوى فإن ....

(٣٧) اذا كان ع ⊥ س ، ع ⊥ ص ، س ∩ ص = ل↔ فإن ....

٢ عين الخطأ والصواب في كل مما يأتي مع التعليل:

١) اذا رسم مستقيم عمودي على مستقيم في مستوي فإنه يكون عمودياً على المستوي

٢) المستويان العموديان على مستوى ثالث متوازيان.

٣) المستقيم العمودي على مستقيم في المستوي يكون عمودياً على ذلك المستوي.

٤) المستقيمان العموديان على نفس المستوي متوازيان.

٥) اذا كان كل من المستويين س ، ص عموديان على مستوي ثالث ع فإن خطي تقاطعهما مع المستوي ع يكونا متوازيين.

٦) كل أربع نقاط تقع دائماً في مستوى واحد.

٧) المستقيمان المتخالفان يمكن أن يقعا في مستويين متعامدين.

٨) نقول عن مستقيم انه عمودي على مستوي ب اذا كان عمودياً على مستقيمين متوازيين في ب

٩) المستوي العمودي على أحد مستويين متوازيين عمودي على الآخر.

١٠) المسقط النائم لزاوية قائمة على مستوٍ هو زاوية قائمة.

١١) المستقيمان العموديان على مستقيم ثالث متوازيان.

١٢) الزاوية الخطية هي كل زاوية مرسومة في وجهي الثنائية.

(١٣) مسقط نقطة على مستوي دائماً نقطة
(١٤) مسقط قطعة مستقيمة على مستوى دائماً قطعة مستقيمة .
(١٥) المستقيمان المتوازيان مسقطاهما على مستوي مستقيمين متوازيين
(١٦) المستقيمان المتقاطعان مسقطاهما دائماً متقاطعان

[٣] ماذا نعنى بزاوية مستقيمين $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ في الحالتين
أ) اذا كان المستقيمان في مستوى واحد	ب) اذا كان المستقيمان في الفضاء

[٤] عرف ما يأتي	أ) الزاوية الزوجية (الثنائية)
ب) الزاوية الخطية للزاوية الزوجية .
جـ) زاوية مستويين	د) زاوية مستقيم مع مستوى

[٥] اذكر حالات :
١. تعامد مستقيم مع مستوي	٢. تعامد مستويان .

[٦] (بدون برهان ومع التوضيح بالرسم) اكتب نص مبرهنة الأعمدة الثلاثة

∵ Δ ب ح هـ قائم في هـ : ∴ $|ب ح|^2 = |ب هـ|^2 + |ح هـ|^2$ (فيثاغورث)

∴ $|ب هـ|^2 = |ب ح|^2 - |ح هـ|^2 = ٢٥ - ٩ = ١٦ \Leftarrow |ب هـ| = ٤$ سم

∵ Δ أ ب هـ قائم في ب : ∴ $|أ هـ|^2 = |أ ب|^2 + |ب هـ|^2 = ١٤٤ + ١٦ = ١٦٠$

∴ $|أ هـ| = \sqrt{١٦٠} = ٤\sqrt{١٠}$ سم .

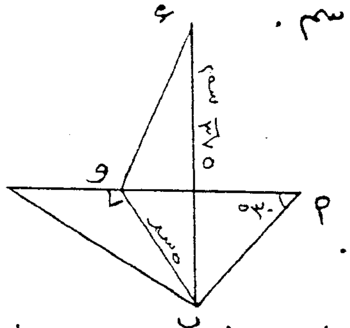
فيكون ظا(∠أ هـ ب) $= \frac{١٢}{٤} = ٣$ ، حا(∠أ هـ ب) $= \frac{١٢}{٤\sqrt{١٠}} = \frac{٣}{\sqrt{١٠}}$

---

[٣] أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٣٠° ، $\overleftrightarrow{ءب}$ ⊥ المستوي (أ ب جـ) ، رسم $\overline{بو} \perp \overline{أجـ}$ بحيث كان : |ب و| = ٥ سم :

(أ) أوجد |أ ب| ب) برهن أن : $\overline{أجـ} \perp \overline{ءو}$

(جـ) أوجد ق(∠ء و ب) اذا علمت أن : |ء ب| = $٥\sqrt{٣}$ سم .



الحل : البرهان : ∵ $\overline{بو} \perp \overline{أجـ}$

∴ Δ أ ب و قائم في و . ، ∵ ق(∠أ) = ٣٠°

∴ $|ب و| = \frac{١}{٢}|أ ب| \Leftarrow |أ ب| = ٢|ب و|$

∴ |أ ب| = ٢ × ٥ سم = ١٠ سم . وهو المطلوب في (أ) .

∵ $\overleftrightarrow{ءب}$ ⊥ المستوي (أ ب جـ) (معطى)

، ∵ $\overline{بو} \perp \overline{أجـ}$ ∴ $\overline{ءو} \perp \overline{أجـ}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة) وهو المطلوب في (ب)

∵ $\overleftrightarrow{ءب}$ ⊥ (أ ب جـ) ∴ $\overleftrightarrow{ءب} \perp \overline{بو}$ أي أن Δ ء ب و قائم في ب

∴ ظا(∠ء و ب) $= \frac{|ء ب|}{|ب و|} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٥} = \sqrt{٣}$ ∴ ق(∠ء و ب) = ٦٠°
وهو المطلوب في (جـ)

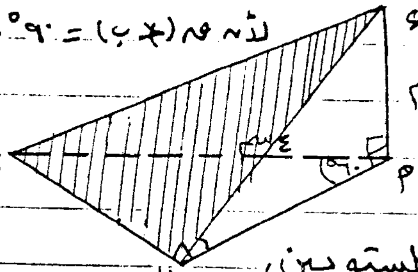
---

[٤] $\overline{أء}$ ⊥ مستوي المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب ، |أ جـ| = ٤ سم ، |أ ء| = ٢ سم ، ق(∠ب أ جـ) = ٦٠° :

(أ) برهن أن الزاوية الخطية للمستويين (أ ب جـ) ، (ء ب جـ) هي زاوية أ ب ء ثم أوجد قياسها .

(ب) برهن أن المستوي (أ ب ء) ⊥ المستوي (أ ب جـ)

(جـ) حدد الزاوية الخطية بين المستويين (ء أ ب) ، (ء أ جـ) وأوجد قياسها



الحل : ∵ $\overline{أء}$ ⊥ المستوي (أ ب جـ) ، $\overline{أب} \perp \overline{بجـ}$ ① لأن ق(∠ب) = ٩٠°

∴ $\overline{ءب} \perp \overline{بجـ}$ ② (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

وحيث أن $\overleftrightarrow{بجـ}$ هو الفصل المشترك للمستويين (أ ب جـ) ، (ء ب جـ)

∴ ∠(أ ب ء) هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية للمستويين (أ ب جـ) ، (جـ ب ء)

في Δ م ب جـ القائم في ب ∵ ق(∠م) = ٦٠° ∴ جتا ٦٠° = $\frac{|م ب|}{|م جـ|}$ ⟸ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{|م ب|}{٤}$

∴ ٢ |م ب| = ٤ ⟸ |م ب| = ٢ سم

∴ Δ ء م ب متساوي الساقين لأن: |م ب| = |م ء| = ٢ سم

وحيث أن ء م ⊥ (م ب جـ) ∴ ء م ⊥ م ب أي أن Δ ء م ب في م ⟸ ∠م = ٩٠°

∴ ق(∠ء) = ق(∠ب) = ٤٥°

فيكون: ق(∠م ب ء) = ٤٥° وهو المطلوب أولاً.

من ①، ②: ∵ ب جـ ⊥ المستوى (م ب ء) وحيث أن ب جـ ⊂ المستوى (م ب جـ)

∴ المستوى (م ب جـ) ⊥ المستوى (م ب ء) وهو المطلوب ثانياً.

∵ ء م ⊥ المستوى (م ب جـ)

∴ ء م ⊥ م ب، ء م ⊥ م جـ وحيث أن م ء هو الفصل المشترك

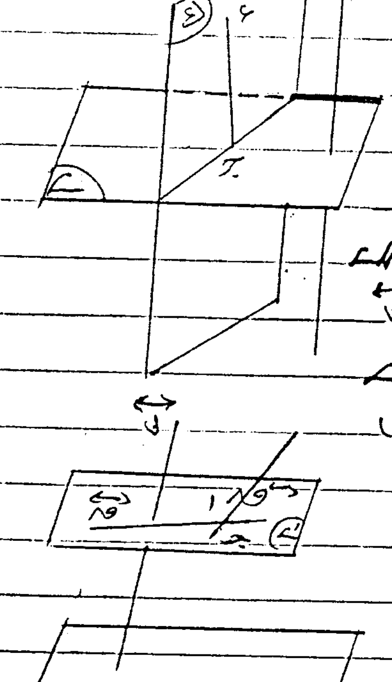
للمستويين (ء م ب)، (ء م جـ) ∴ الزاوية بين المستقيمين م ب، م جـ

هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية بين المستويين (ء م ب)، (ء م جـ)

وهي ∠(ب م جـ) وقياسها ق(∠ب م جـ) = ٦٠° معطى.

وهو المطلوب ثالثاً.

٥ اثبت أنه إذا كان ل ⊥ ع، ك ⊥ ع فإن ل // ك.



الحل: نرسم من نقطة ء ∈ ك عموداً ء جـ على ع

∵ ء ∈ ك، ء جـ ⊥ ع عملاً ∴ ء جـ ⊂ ك

∵ ل ⊥ ع (معطى)، ∵ ء جـ ⊥ ع (عملاً)

∴ ل // ء جـ (العموديان على مستو واحد متوازيان)

∵ ء جـ ⊂ ك ∴ ل // ك (وهو المطلوب)

٦ اثبت أنه إذا كان ل ⊥ ه، ل ⊥ ع فإن ه // ع

الحل: العمل نأخذ نقطة جـ ∈ ه ونرسم منها ه١ // ل

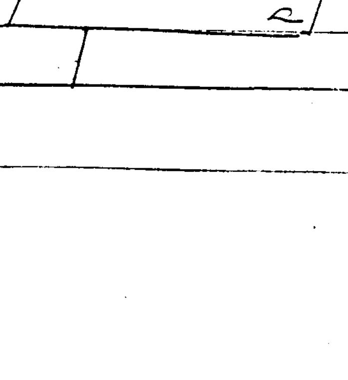
∴ ه، ه١ متقاطعان فهما يعينان مستوياً ليكن ع'

∵ ل ⊥ ه، ل ⊥ ه١ ∴ ل ⊥ ع' (مبرهنة)

∴ ع // ع' (مبرهنة) ∴ أي مستقيم

∴ أي مستقيم في أحدهما يوازي الآخر

∴ ه // ع



٩٣/٩٤

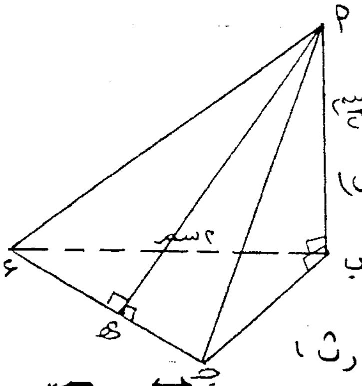
تمرين: أ، ب، جـ، ء أربع نقاط في الفضاء. $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊥ المستوى (ب جـ ء)

و المطلوب: ١) اذا كان $|\text{أء}|^2 = |\text{أب}|^2 + |\text{ب جـ}|^2 + |\text{ء جـ}|^2$

برهن أن: جـ ء ⊥ المستوى (أ ب جـ)

٢) اذا كان △ ب جـ ء قائم الزاوية في ب ومتساوي الساقين

فيه: ب ء = ب جـ = ٢ سم، |أب| = √٢ فاحسب قياس زاوية المستويين (أ جـ ء)، (ب جـ ء) الزوجية.



الحل: (١) ∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊥ المستوي (ب جـ ء) ∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊥ ب جـ

أي أن △ أ ب جـ قائم في ب

∴ $|\text{أجـ}|^2 = |\text{أب}|^2 + |\text{ب جـ}|^2$ (مبرهنة فيثاغورث)

، ∵ $|\text{أء}|^2 = |\text{أب}|^2 + |\text{ب جـ}|^2 + |\text{ء جـ}|^2$

∴ $|\text{أء}|^2 = |\text{أجـ}|^2 + |\text{ء جـ}|^2$ في △ أ جـ ء

∴ △ أ جـ ء قائم في جـ (عكس مبرهنة فيثاغورث)

∴ جـ ء ⊥ أ جـ ← ① ، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊥ المستوي (ب جـ ء) ∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊥ جـ ء ← ②

من ①، ② ∴ جـ ء ⊥ كل من أب ، أجـ المتقاطعين في المستوي (أ ب جـ)

∴ جـ ء ⊥ المستوي (أ ب جـ) وهو المطلوب (١)

(٢) العمل: نسقط ب هـ ⊥ جـ ء ونصل أ هـ

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊥ المستوي (ب جـ ء) ، ب هـ ⊥ جـ ء ∴ أ هـ ⊥ جـ ء (الأعمدة الثلاثة)

∵ △ ب جـ ء قائم في ب ∴ $|\text{جـ ء}|^2 = |\text{ب جـ}|^2 + |\text{ب ء}|^2$ فيثاغورث

∴ $|\text{جـ ء}|^2 = 4 + 4 = 8 \Leftarrow |\text{جـ ء}| = 2\sqrt{2}$ سم.

∵ ب هـ يصل إلى منتصف الوتر ∴ |ب هـ| = ½ الوتر |ء جـ|

∴ |ب هـ| = √٢ سم فيكون △ أ ب هـ متساوي الساقين وقائم في ب

لأن أب ⊥ (ب جـ ء) أي أن أب ⊥ ب هـ

فيكون ق(∠ ب هـ أ) = ٤٥° وهي الزاوية المستوية لزاوية المستويين (أ جـ ء)، (ب جـ ء) الزوجية.

تمارين:

١. △ أ ب جـ ، أ ء عمودي على مستويه، رسم أ هـ ⊥ ب جـ ويلاقيه في هـ اثبت أن:
(١) ء هـ ⊥ ب جـ (٢) المستوي (أ ء هـ) ⊥ المستوي (ء ب جـ)

٢. أ ب جـ △ فيه ق(∠أ) = ٣٠°، |أب| = ١٠ سم فإذا كان ب ء ⊥ (أ ب جـ)
وكان |ب ء| = ٥ سم ، ب هـ ⊥ أجـ فاثبت أن: (١) ء هـ ⊥ أجـ
(٢) قياس الزاوية المستوية لزاوية المستويين (ء أ جـ)، (ب أ جـ) يساوي ٤٥°.