الجمهورية اليمنية

جامعـــة الحديدة

كلية التربية – زبيد

حلول تمارين [طرق حل المعادلات التفاضلية (1)]

اعـــــــداد :

وليد مسعد طاهر الأشعري

مراجعـــــة :

أ / أحمد السلمونـــي

بسم الله الرحمن الرحيم

أولاً :- تمارين [١ - ١]

١) صنف المعادلات التفاضلية الأتية من حيث كونها اعتيادية أو جزئية وعين رتبة ودرجة كل منها .

1) $x\, {y^{//}}^2 = 2y\, y^{/}$

2) $y^{//} + 2y^{/} = 8x^2 + \cos^2 x$

3) $y^{///} + \omega^2 x\, y^{/} = 2x$ حيث (ω بارامتر)

4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

5) $(x+y)dx + (2x+1)dy = 0$

6) ${x^{//}}^2 + t^2 x^{/} = 2$

7) $x\frac{d^2 y}{d x^2} + y\frac{d^3 y}{d x^3} = 5$

8) $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ حيث (ω بارامتر)

9) $\sqrt{1 + \frac{d^2 x}{d t^2}} = t^2 x$

10) $\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)^2 - 2\left(\frac{du}{dx}\right)^4 + xu = 0$

الحـــــــــــــل :-

١) $x\, {y^{//}}^2 = 2y\, y^{/}$

معادلة تفاضلية اعتيادية من الرتبة الثانية ومن الدرجة الثانية

****

٢) $y^{//} + 2y^{/} = 8x^2 + \cos^2 x$

معادلة تفاضلية اعتيادية من الرتبة الثانية ومن الدرجة الأولى

****

٣) $y^{///} + \omega^2 x\, y^{/} = 2x$ حيث (ω بارامتر)

معادلة تفاضلية اعتيادية من الرتبة الثالثة ومن الدرجة الأولى

****

٤) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية ومن الدرجة الأولى

****

٥) $(x+y)dx + (2x+1)dy = 0$

$\frac{dy}{dx} + \frac{x+y}{2x+1} = 0$

معادلة تفاضلية اعتيادية من الرتبة الأولى ومن الدرجة الأولى

٦) ${x^{//}}^2 + t^2 x^{/} = 2$

معادلة تفاضلية اعتيادية من الرتبة الثانية ومن الدرجة الثانية

****

٧) $x\frac{d^2 y}{d x^2} + y\frac{d^3 y}{d x^3} = 5$

معادلة تفاضلية اعتيادية من الرتبة الثالثة ومن الدرجة الأولى

****

٨) $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ حيث (ω بارامتر)

معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية ومن الدرجة الأولى

****

٩) $\sqrt{1 + \frac{d^2 x}{d t^2}} = t^2 x$

نبسط هذه المعادلة التفاضلية لتصبح بالصورة

$1 + \frac{d^2 x}{dt^2} = t^4 x^2$

وهذه المعادلة التفاضلية اعتيادية من الرتبة الثانية ومن الدرجة الثانية

****

١٠) $\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)^2 - 2\left(\frac{du}{dx}\right)^4 + xu = 0$

معادلة تفاضلية اعتيادية من الرتبة الثانية ومن الدرجة الثانية

٢) أوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام معطى في كل مما يأتي :-

1) $y = \frac{c}{2}x + c^2 + c^3 + 1$: (c ثابت اختياري)

2) $y = \propto e^x + \beta\, e^{2x}$: ($\propto, \beta$ ثابت اختياري)

3) $x \sin y + x^2\, y = c$: (c ثابت اختياري)

4) $x\, y^2 - 1 = cy$: (c ثابت اختياري)

5) $y = c_1\, e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x$: (c_1, c_2 ثابت اختياري)

6) $x = c_1 \sin(\omega t + c_2)$: (c_1, c_2 ثابت اختياري)

7) $y = c_1 x + c_2 e^x$: (c_1, c_2 ثابت اختياري)

8) $y = x^2 + ax + b\, e^{-x}$: (a, b ثابت اختياري)

الحــــــــــل :-

1) $y = \frac{c}{2}x + c^2 + c^3 + 1$: (c ثابت اختياري)

لوجود C ثابت اختياري وحيد في الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة تكون اعتيادية من الرتبة الأولى ولإيجادها نتبع الأتي :-

المنظومة $\begin{cases} y = \frac{c}{2}x + c^2 + c^3 + 1 \\ y' = \frac{c}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{c}{2}x + c^2 + c^3 + 1 \\ c = 2y' \end{cases}$$

$$\therefore y = y'x + 4y'^2 + 8y'^3 + 1$$

$$\Rightarrow 8y'^3 + 4y'^2 + xy' - y + 1 = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثالثة من الرتبة الاولى .

****

2) $y = \propto e^x + \beta e^{2x}$: ($\propto, \beta$ ثابت اختياري)

لوجود $\propto, \beta$ ثابتان اختياريان في الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة تكون اعتيادية من الرتبة الثانية ولإيجادها نتبع الأتي :-

المنظومة $\begin{cases} y = \propto e^x + \beta e^{2x} & \longrightarrow (1) \\ y' = \propto e^x + 2\beta e^{2x} & \longrightarrow (2) \\ y'' = \propto e^x + 4\beta e^{2x} & \longrightarrow (3) \end{cases}$

بطرح المعادلة (1) من (2) نحصل على

$$y' - y = \beta e^{2x} \longrightarrow (*)$$

بضرب المعادلة (2) في العدد (2 -) وجمع المعادلة الناتجة مع المعادلة (3) نحصل على

$$y'' - 2y' = -\propto e^x \Rightarrow \propto e^x = 2y' - y'' \rightarrow (**)$$

بالتعويض عن $(*)$ و $(**)$ في المعادلة (3) نحصل على :-

$$y'' = 2y' - y'' + 4(y' - y)$$

$$y'' = 2y' - y'' + 4y' - 4y$$

$$2y'' = 6y' - 4y$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى

3) $x \sin y + x^2 y = c$: (c ثابت اختياري)

لوجود C ثابت اختياري وحيد في الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة تكون اعتيادية من الرتبة الأولى ولإيجادها نتبع الأتي :-

$$\begin{cases} x \sin y + x^2 y = c \\ \sin y + xy' \cos y + 2xy + x^2 y' = 0 \end{cases}$$

وعليه فان المعادلة التفاضلية المطلوبة هي :-

$$x \cos y \,(y') + x^2 y' + \sin y + 2xy = 0$$

$$y' + \frac{2xy + \sin y}{x^2 + x \cos y} = 0$$

****

4) $x y^2 - 1 = cy$: (c ثابت اختياري)

لوجود C ثابت اختياري وحيد في الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة تكون اعتيادية من الرتبة الأولى ولإيجادها نتبع الأتي :-

المنظومة $\begin{cases} xy^2 - 1 = cy & \longrightarrow (1) \\ 2xyy' + y^2 = 2y' & \longrightarrow (2) \end{cases}$

$$\begin{cases} xy^2 - 1 = cy \\ c = \frac{2xyy' + y^2}{y'} \end{cases}$$

نعوض بقيمة $c = \frac{2xyy' + y^2}{y'}$ في المعادلة (1) نحصل على:-

$$xy^2 - 1 = \left(\frac{2xyy' + y^2}{y'}\right) y$$

$$(xy^2 - 1)\, y' = 2xy^2 y' + y^3$$

$$y' \,(xy^2 - 1 - 2xy^2) = y^3$$

$$\frac{dy}{dx}(-xy^2 - 1) = y^3$$

$$(-xy^2 - 1)dy = y^3 dx$$

$$y^3 dx + (xy^2 + 1)dy = 0$$

$$y' = -\frac{y^3}{x y^2 + 1}$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الأولى

****

5) $y = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x$:
(c_1, c_2 ثابت اختياري)

لوجود c_1, c_2 ثابتان اختياريان في الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة تكون اعتيادية من الرتبة الثانية ولإيجادها نتبع الأتي :-

$$\begin{cases} y = c_1\, e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x \\ y' = -c_1\, e^{-x} \cos x - c_1 e^{-x} \sin x \\ \qquad -c_2 e^{-x} \sin x + c_2 e^{-x} \cos x \\ y'' = c_1\, e^{-x} \cos x + c_1 e^{-x} \sin x + \\ \qquad c_1 e^{-x} \sin x - c_1\, e^{-x} \cos x + \\ \qquad c_2 e^{-x} \sin x - c_2 e^{-x} \cos x - \\ \qquad c_2 e^{-x} \cos x - c_2 e^{-x} \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = c_1\, e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x \rightarrow (1) \\ y' = -(c_1 + c_2) e^{-x} \sin x + \\ \qquad (c_2 - c_1) e^{-x} \cos x \rightarrow (2) \\ y'' = 2c_1 e^{-x} \sin x - 2c_2 e^{-x} \cos x \rightarrow (3) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (2) في العدد (2) وجمع المعادلة الناتجة مع المعادلة (3) نحصل على :-

$$2y' + y'' = -2c_1 e^{-x} \cos x - 2c_2 e^{-x} \sin x \rightarrow (4)$$

بضرب المعادلة (1) في العدد (2) وجمع المعادلة الناتجة مع المعادلة (4) نحصل على :-

$$2y + 2y' + y'' = 0$$

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى

****

6) $x = c_1 \sin(\omega t + c_2)$: ($c_1, c_2$ ثابت اختياري)

لوجود c_1, c_2 ثابتان اختياريان في الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة تكون اعتيادية من الرتبة الثانية ولإيجادها نتبع الأتي :-

$$\begin{cases} x = c_1 \sin(\omega t + c_2) \longrightarrow (1) \\ x' = \omega c_1 \cos(\omega t + c_2) \longrightarrow (2) \\ x'' = -\omega^2 c_1 \sin(\omega t + c_2) \longrightarrow (3) \end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة (١) في ω^2 ونجمع المعادلة الناتجة مع (3) نحصل على :-

$$\omega^2 x + x'' = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

7) $y = c_1 x + c_2 e^x$: (c_1, c_2 ثابت اختياري)

لوجود c_1, c_2 ثابتان اختياريان في الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة تكون اعتيادية من الرتبة الثانية ولإيجادها نتبع الأتي :-

$$\begin{cases} y = c_1 x + c_2 e^x \longrightarrow (1) \\ y' = c_1 + c_2 e^x \longrightarrow (2) \\ y'' = c_2 e^x \longrightarrow (3) \end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة (2) في x - ونجمع المعادلة الناتجة مع المعادلة (1) نحصل على :

$$y - x\,y' = c_2 e^x (1 - x)$$

ومن ذلك والمعادلة (3) نحصل على :-

$$y - xy' = y''(1 - x)$$

$$y - xy' = y'' - xy''$$

$$xy'' - y'' - xy' + y = 0$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى

****

8) $y = x^2 + ax + b\, e^{-x}$

: (a, b ثابت اختياري)

لوجود a, b ثابتان اختياريان في الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة تكون اعتيادية من الرتبة الثانية ولإيجادها نتبع الأتي :-

$$\begin{cases} y = x^2 + ax + b\, e^{-x} \longrightarrow (1) \\ y' = 2x + a - be^{-x} \longrightarrow (2) \\ y'' = 2 + be^{-x} \longrightarrow (3) \end{cases}$$

بجمع (2) و (3) نحصل على:-

$$y' + y'' = 2x + a + 2$$

$$\Rightarrow a = y'' + y' - 2x - 2 \longrightarrow (4)$$

نعوض عن المعادلتين (4) و (3) في المعادلة (1) نجد

$$y = x^2 + (y'' + y' - 2x - 2)x + y'' - 2$$

$$y = -x^2 + y''(x + 1) + xy' - 2x - 2$$

$$(x + 1)y'' + xy' - y = x^2 + 2x + 2$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى

٣) اثبت أن الدالة $y = x + \frac{1}{3}(x+c)^3$ تعتبر حلاً للمعادلة التفاضلية $y^{//2} = 4(y^{/} - 1)$ وبين لماذا لا تعتبر حلاً عاماً للمعادلة التفاضلية ؟

الحـــــــــل :-

لكي يكون الحل $y = x + \frac{1}{3}(x+c)^3$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y^{//2} = 4(y^{/} - 1)$ يجب ان يحقق المعادلة التفاضلية عند التعويض عن $y^{//}, y^{/}$

$$\begin{cases} y = x + \frac{1}{3}(x+c)^3 \\ y^{/} = 1 + (x+c)^2 \\ y^{//} = 2(x+c) \end{cases}$$

نعوض عن $y^{/}$, $y^{//}$ في المعادلة التفاضلية:-

$$[2(x+c)]^2 = 4[1 + (x+c)^2 - 1]$$

$$4(x+c)^2 \equiv 4(x+c)^2$$

وعلية فإن الدالة $y = x + \frac{1}{3}(x+c)^3$ تعتبر حلاً للمعادلة التفاضلية $y^{//2} = 4(y^{/} - 1)$

ولا يعتبر هذا الحل حلاً عاما للمعادلة التفاضلية $y^{//2} = 4(y^{/} - 1)$ وذلك لأنه يحتوي على ثابت اختياري وحيد c بينما المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية .

أي انها (الدالة) تعتبر حلاً عاماً لمعادلة من الرتبة الأولى

****

٤) جد قيمة الثابت الحقيقي A الذي يجعل الدالة $y = Ax^3$ حلا المعادلة التفاضلية

$$x^2y^{//} - 4xy^{/} + 6y = 0$$

الحـــــــــل :-

$\because y = Ax^3$

$\therefore y^{/} = 3A\,x^2$

$y^{//} = 6A\,x$

بالتعويض عن $y^{/}, y^{//}$ في المعادلة التفاضلية $x^2y^{//} - 4xy^{/} + 6y = 0$ نحصل على :-

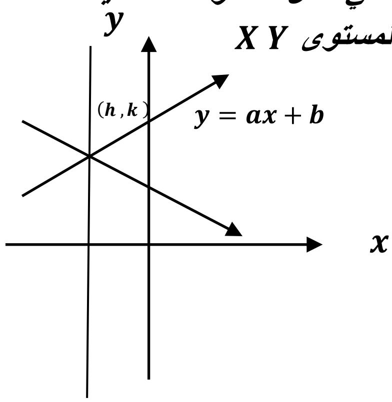
$$x^2(6A\,x) - 4x(3A\,x^2) + 6(Ax^3) = 0$$

$$6A(x^3 - 2x^3 + x^3) = 0$$

$$6A(0) = 0$$

$\therefore A \in \mathbb{R}$

٥) أوجد المعادلة التفاضلية التي تمثل الخطوط المستقيمة المارة بالنقطة $(h\,,k)$ في المستوى $X\,Y$



الحـــــــــل :-

نعلم ان معادلة الخطوط المستقيمة المارة بالنقطة هي $y = ax + b$

او $x = h$

وهذه الدالتان تعتبران حلول للمعادلة التفاضلية المطلوبة

اولاً :- بما ان الخطوط المستقيمة تمر بالنقطة $(h\,,k)$ نعوض في الحل العام $y = ax + b$ عن كل $x = h\ \&\ y = k$ فنجد

$$k = ah + b \Rightarrow b = k - ah$$

وعلية تصبح معادلة المستقيمات بالصورة التالية :-

$y = ax + k - ah$ حيث ان h, k بارامترات وعلية فان المعادلة التفاضلية المطلوبة تكون من الرتبة الأولى وذلك لوجود ثابت اختياري وحيد في الحل العام هو a ولإيجاد المعادلة التفاضلية نتبع الأتي :-

$$\begin{cases} y = ax + k - ah \\ y^{/} = a \end{cases}$$

$$y = y^{/}\,x + k - y^{/}\,h \Rightarrow y = y^{/}\,(x-h) + k$$

$$(y-k) = \frac{dy}{dx}\,(x-h)$$

$$(y-k)dx - (x-h)dy = 0$$

ثانياً:- بما أن المعادلة التفاضلية بالصورة

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x-h}{y-k} \Rightarrow (y-k)\frac{dx}{dy} + h = x$$

حيث $x = x\,(\,y\,)$

عندما $x = h$ نحصل على $\frac{dx}{dy} = 0$

وتحقق المعادلة $\forall y \in \mathbb{R}$

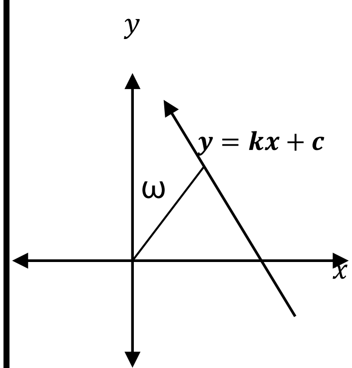
وعلية فان المعادلة التفاضلية المطلوبة هي :-

$$(y-k)dx - (x-h)dy = 0$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ومن الدرجة الأولى وهي معادلة الخطوط المستقيمة المارة بالنقطة $(h\,,k)$ في المستوى $X\,Y$

٦) أوجد المعادلة التفاضلية التي تمثل الخطوط المستقيمة الغير موازية لمحور الصادات y بحيث أن نقطة الأصل تبعد عن هذه الخطوط بمقدار ثابت ω

الحـــــــــل :-



نعلم ان معادلة المستقيمات التي غير موازية لمحور الصادات تعطى بالعلاقة

$$y = kx + c \longrightarrow (*)$$

وبما ان البعد بين هذه الخطوط المستقيمة ونقطة الأصل هو مقدار ثابت ω فان

$$\omega = \frac{|k*0-1*0+c|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|c|}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$|c| = \omega\sqrt{k^2+1} \Longrightarrow c^2 = \omega^2(K^2+1)$$

وبما ان $|c|$ قيمة مطلقة فإن $\omega\sqrt{k^2+1}$ لأبد ان تكون موجبة

$$\therefore c = \omega\sqrt{k^2+1}$$

نعوض بـــ $c = \omega\sqrt{k^2+1}$ في المعادلة $(*)$:-

$$y = kx + \omega\sqrt{k^2+1}$$

حيث ان ω بارمتر ، k ثابت اختياري وحيد فان المعادلة التفاضلية المطلوبة من الرتبة الأولى ولإيجادها نتبع الأتي :-

$$\begin{cases} y = kx + \omega\sqrt{k^2+1} \\ y' = k \end{cases}$$

$$\therefore y = xy' + \omega\sqrt{1+y'^2}$$

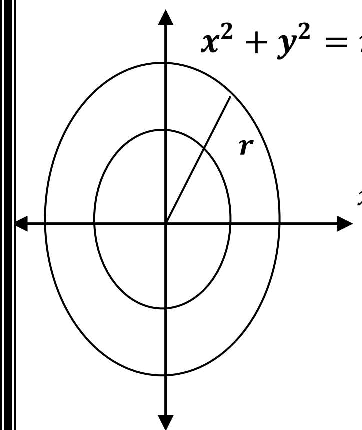
$$(y - x\,y') = \omega\sqrt{1+y'^2}$$

$$(\,y - x\,y'\,)^2 = \omega^2(1+y'^2)$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ومن الدرجة الثانية وهي معادلة تمثل الخطوط المستقيمة الغير موازية لمحور الصادات y بحيث أن نقطة الأصل تبعد عن هذه الخطوط بمقدار ثابت ω

٧) أوجد المعادلة التفاضلية التي تمثل الدوائر التي مركزها نقطة الأصل في المستوى $X\,Y$

الحـــــــــل :-



$$x^2 + y^2 = r^2$$

نعلم أن معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطره r هي :-

$$x^2 + y^2 = r^2$$

حيث هذه المعادلة تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة والتي هي من الرتبة الأولى لإحتوائ الحل العام على ثابت اختياري وحيد هو r

ولإيجاده نتبع الأتي :-

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ 2x + 2y\,y' = 0 \end{cases} \Longrightarrow 2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$\Longrightarrow y\,dy + x\,dx = 0$$

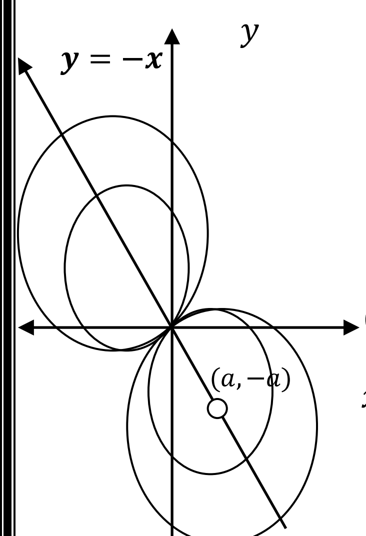
$$\Longrightarrow y\,y' + x = 0$$

وهذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ومن الدرجة الأولى وهي تمثل الدوائر التي مركزها نقطة الأصل في المستوى $x\,y$

---

٨) أوجد المعادلة التفاضلية التي تمثل الدوائر التي مركزها يقع على الخط المستقيم $y = -x$ وتمر بنقطة الأصل في المستوى $X\,Y$

الحـــــــــل :-



$$(x-a)^2 + (y+a)^2 = r^2$$

نفرض ان مـــــركز الدائـــرة (a, b) ونصف قطـــــــرها r فان معــــادلة الدائـــــرة تكـــــون بالصــــــورة

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

وبما ان المركز يقع على الخط المستقيم $y = -x$ فإن المركز سوف يصبح النقـــطة $(a, -a)$

وعلية فان معادلة الدائرة تصبح بالصورة :-

$$(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$$

وبما ان الدائرة تمر بنقطة الأصل فان نقطة الأصل تحقق معادلتها أي ان :-

$$(0-a)^2+(0+a)^2=r^2 \Rightarrow r^2=2a^2$$

وعلية فإن معادلة الدائرة (الحل العام للمعادلة التفاضلية) تصبح بالصورة :-

$$(x-a)^2+(y+a)^2=2a^2$$

حيث a ثابت اختياري وحيد وعلية فان المعادلة التفاضلية المطلوبة تكون من الرتبة الأولى يتم ايجادها بالتالي :-

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y+a)^2=2a^2\\ 2(x-a)+2(y+a)\,y'=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x-a)^2+(y+a)^2=2a^2\longrightarrow(1)\\ (x-a)+(y+a)\,y'=0\longrightarrow(2)\end{cases}$$

من المعادلة (2) نجد ان:-

$$x+y\,y'=a-a\,y'$$

$$\Rightarrow\quad a=\frac{x+y\,y'}{1-y'}\longrightarrow(*)$$

من المعادلة (1) نجد أن :-

$$x^2-2ax+a^2+y^2+2ay+a^2=2a^2$$

$$a(2y-2x)=-(x^2+y^2)$$

$$a=\frac{-(x^2+y^2)}{(2y-2x)}\quad\Rightarrow\quad a=\frac{x^2+y^2}{2x-2y}\longrightarrow(**)$$

بالمقارنة بين المعادلتين $(**)$ و $(*)$ نحصل على :-

$$\frac{x+y\,y'}{1-y'}=\frac{x^2+y^2}{2x-2y}$$

$$(x+y\,y')(2x-2y)=(1-y')(x^2+y^2)$$

$$2x^2-2xy+2xy\,y'-2\,y^2\,y'=$$

$$x^2+y^2-x^2y'-y^2\,y'$$

$$(x^2-y^2-2xy)+(x^2-y^2+2xy)\,y'=0$$

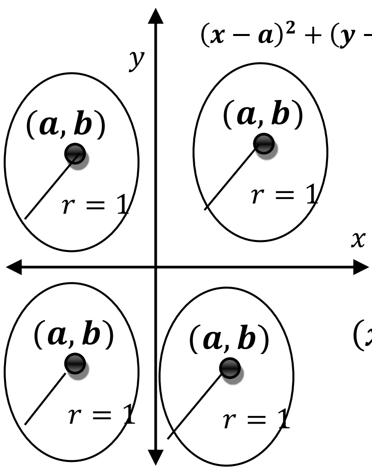
$$(x^2-y^2-2xy)dx+(x^2-y^2+2xy)\,dy=0$$

هذه المعادلة معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى من الدرجة الأولى

٩) أوجد المعادلة التفاضلية التي تمثل الدوائر ذات نصف قطر يساوي العدد 1

الحـــــل :-

$$(x-a)^2+(y-b)^2=1$$



نفرض ان مركز الدائـــرة التي نصف قطرها يســاوي العدد 1 هي النقطـة (a,b) وعلية فإن معادلة الدائـرة تصبـح بالصـورة

$$(x-a)^2+(y-b)^2=1$$

حيث ان a,b ثابتان اختياريان لذلك فإن المعادلة التفاضليـة المطلوبة ستكون من الرتبـة الثانية ولإيجادها نتبع الأتـي:-

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=1\\ 2(x-a)+2(y-b)\,y'=0\\ 2+2y''\,(y-b)+2{y'}^2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x-a)^2=1-(y-b)^2\longrightarrow(1)\\ (x-a)^2={y'}^2(y-b)^2\longrightarrow(2)\\ 1+(y-b)y''+{y'}^2=0\longrightarrow(3)\end{cases}$$

من المعادلتين (1) , (2) نجد ان :-

$${y'}^2(y-b)^2=1-(y-b)^2$$

$$(y-b)^2(1+{y'}^2)=1\longrightarrow(*)$$

من المعادلة (3) نجد أن :-

$$y''\,(y-b)=-\left(1+{y'}^2\right)$$

$$\Rightarrow(y-b)=-\frac{\left(1+{y'}^2\right)}{y''}$$

نعوض عن $(y-b)=-\frac{\left(1+{y'}^2\right)}{y''}$ في المعادلة $(*)$ فنحصل على :-

$$\frac{\left(1+{y'}^2\right)^2}{{y''}^2}\left(1+{y'}^2\right)=1$$

$$(1+y'^2)^2(1+y'^2)=y''^2$$

$$(1+y'^2)^3=y''^2$$

$$y''^2=(1+y'^2)^3$$

وهذه المعادلة التفاضلية المطلوبة وهي من الرتبة الثانية من الدرجة الثانية.

<u>طريقة اخرى للحل :-</u>

من المعادلة (1):-

$$(x-a)^2=1-(y-b)^2$$

ومن المعادلة (2) :-

$$(x-a)^2=y'^2(y-b)^2$$

بالمقارنة نجد أن :-

$$1-(y-b)^2=y'^2(y-b)^2$$

$$(y-b)^2(y'^2+1)=1$$

$$(y-b)=\frac{1}{\sqrt{y'^2+1}}$$

نعوض في المعادلة (3) عن $(y-b)=\frac{1}{\sqrt{y'^2+1}}$ فنحصل على

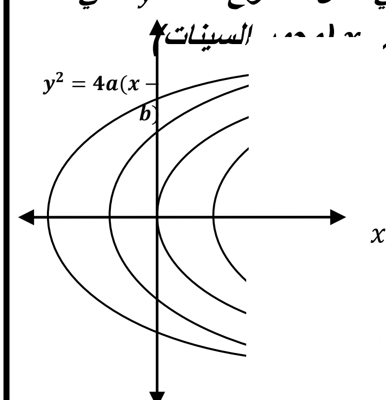
$$1+\left(\frac{1}{\sqrt{y'^2+1}}\right)y''+y'^2=0$$

$$1+y'^2=-\frac{y''}{\sqrt{y'^2+1}} \Rightarrow y''=-(1+y'^2)^{3/2}$$

$$\Rightarrow y''^2=(1+y'^2)^3$$

****

١٠) أوجد المعادلة التفاضلية التي تمثل القطوع المكافئة التي رأسها وبؤرتها تقعان على المحور السينات



الحــــــل :-

نعلم ان معادلة القطع المكافئ الذي رأسه وبؤرتها تقعـــان على المحور x تعطى بالصورة

$$y^2=4a(x-b)$$

حيث $a\ ,\ b$ ثابتان اختياريان ولإيجاد المعادلة التفاضلية المطلوبة نشتق المعادلة $y^2=4a(x-b)$ مرتين ونحذف الثوابت الاختيارية

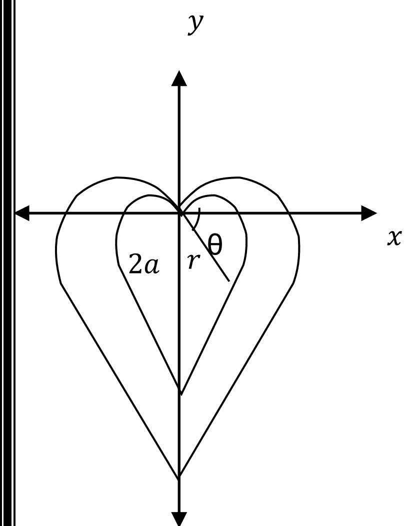
$$\begin{cases} y^2=4a(x-b) \\ 2y\,y'=4a \\ 2y\,y''+2y'^2=0 \end{cases}$$

$$2y\,y''+2y'^2=0$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية المطلوبة وهي من الرتبة الثانية ومن الدرجة الأولى .

****

١١) أوجد المعادلة التفاضلية التي تمثل المنحنيات القلبية الممثلة في الشكل التالي :-



الحــــــل :-

معادلة المنحنى القلبي الذي يوضحه الشكل المقابل هي

$$r=a(1-\sin\theta)$$

حيث a ثابت اختـــياري ولإيجاد المعادلة التفاضـلية المطلوبة نتبع الأتـــي :-

$$\begin{cases} r=a(1-\sin\theta) \\ \dfrac{dr}{d\theta}=-a\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r=a(1-\sin\theta)\rightarrow(1) \\ -a\cos\theta\ d\theta=dr\rightarrow(2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد أن :-

$$a=\frac{r}{(1-\sin\theta)}$$

نعوض بـــــ $a=\frac{r}{(1-\sin\theta)}$ في المعادلة (2) نحصل على:-

$$-\frac{r}{(1-\sin\theta)}*\cos\theta\ d\theta=dr$$

$$-r\cos\theta\ d\theta=(1-\sin\theta)dr$$

$$(1-\sin\theta)dr+r\cos\theta\ d\theta=0$$

وهذه المعادلة التفاضلية التي تمثل المنحنيات القلبية الممثلة بالشكل اعلاه وهي من الدرجة الأولى والرتبة الاولى .

١٢) للمعادلة التفاضلية $xy\,y^{//} - xy^{/2} - yy^{/} = 0$ أثبت أن الدالة $y = c_1 e^{c_2 x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ التي فيها c_2 , c_1 ثابتان اختياريان هي الحل العام للمعادلة التفاضلية وأوجد حلاً يحقق الشروط الإبتدائية : $y(1) = 1 \quad , \quad y^{/}(1) = 2$

الحــــــــــل :-

لوجود ثابتيين اختياريين في الحل العام أذن نشتق الدالة المعطاة مرتين كالتالي .

$$\begin{cases} y = c_1 e^{c_2 x^2} \\ y^{/} = 2c_1\, c_2 x\, e^{c_2 x^2} \\ y^{//} = 2c_1 c_2 e^{c_2 x^2} + 4c_1 c_2^2 x^2 e^{c_2 x^2} \end{cases}$$

نعوض عن $y^{//} , y^{/} , y$ في المعادلة التفاضلية $xy\,y^{//} - xy^{/2} - yy^{/} = 0$ فنحصل على :-

$$x c_1 e^{c_2 x^2}\left(2c_1 c_2 e^{c_2 x^2} + 4c_1 c_2^2 x^2 e^{c_2 x^2}\right)$$
$$-x(2c_1\, c_2 x\, e^{c_2 x^2})^2 - c_1 e^{c_2 x^2}(2c_1\, c_2 x\, e^{c_2 x^2}) \equiv$$
$$2c_1^2\, c_2 x e^{2c_2 x^2} + 4c_1^2\, c_2^2 x^3\, e^{2c_2 x^2} -$$
$$4c_1^2\, c_2^2 x^3\, e^{2c_2 x^2} - 2c_1^2\, c_2 x e^{2c_2 x^2} \equiv 0$$

وعليه فإن الدالة $y = c_1 e^{c_2 x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ هي الحل العام للمعادلة التفاضلية $xy\,y^{//} - xy^{/2} - yy^{/} = 0$

ولإيجاد الحل الذي يحقق الشروط الابتدائية

$$y(1) = 1 \quad , \quad y^{/}(1) = 2$$

لدينا $y(1) = 1$

نعوض في الحل العام عن كل $x = 1 \;\&\; y = 1$ فنحصل على

$$1 = c_1 e^{c_2}$$

ولدينا $y^{/}(1) = 2$

نعوض في $y^{/} = 2c_1\, c_2 x\, e^{c_2 x^2}$ عن كل $x = 1 \& \; y^{/} = 2$ فنحصل على :-

$$2 = 2c_1\, c_2\, e^{c_2} \Rightarrow 1 = c_1\, c_2\, e^{c_2}$$

وعلية لدينا المعادلتان التاليتان :-

$$\begin{cases} 1 = c_1 e^{c_2} \longrightarrow (1) \\ 1 = c_1\, c_2\, e^{c_2} \longrightarrow (2) \end{cases}$$

من (1) نعوض في (2) فنحصل على :_

$$c_2 = 1 \Rightarrow \; c_1 = e^{-1}$$

نعوض عن c_2 , c_1 في الدالة $y = c_1 e^{c_2 x^2}$ (الحل العام)فنجد

$$y = e^{-1}\, e^{x^2} = e^{x^2} - 1$$

وهو الحل الوحيد الذي يحقق الشروط الابتدائية

$$y(1) = 1 \quad , \quad y^{/}(1) = 2$$

****

١٣) لتكن المعادلة التفاضلية بالصيغة الآتية

$$y^{///} - 2y^{//} + 9y^{/} - 18y = 0$$

أ) عين بإثبات الحل للمعادلة التفاضلية من الدوال التالية

١- $y = c_1 e^{2x} + c_2 \cos 3x \; , \forall x \in \mathbb{R}$

٢- $y = c_1 e^{2x} + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x \; , \forall x \in \mathbb{R}$

٣- $y = c_1 e^{2x} + x^2 \; \forall x \in \mathbb{R}$

علماً بأن الثوابت $c_1 , c_2 . c_3$ اختيارية

ب) بين نوع كل حل للمعادلة التفاضلية في الفقرة (أ)

ج) حل مسألة كوشي المكونة من المعادلة التفاضلية المعطاة والشروط الإبتدائية

$$y(0) = 1 \; , y^{/}(0) = -1 \quad , \quad y^{//}(0) = 0$$

الحــــــــــل :-

أ) اولاً/ نتأكد هل الحل رقم (١) يعتبر حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة في التمرين والتي هي من الرتبة الثالثة لذالك فإننا نقوم بمفاضلة الحل $y = c_1 e^{2x} + c_2 \cos 3x$ ثلاث مرات(لماذا ؟) :-

$$\begin{cases} y = c_1 e^{2x} + c_2 \cos 3x \\ y^{/} = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 \sin 3x \\ y^{//} = 4c_1 e^{2x} - 9c_2 \cos 3x \\ y^{///} = 8c_1 e^{2x} + 27c_2 \sin 3x \end{cases}$$

نعوض عن كل من $y^{///} , y^{//} , y^{/} , y$ في المعادلة التفاضلية

$$y^{///} - 2y^{//} + 9y^{/} - 18y = 0$$

$8c_1e^{2x}+27c_2\sin 3x-2(4c_1e^{2x}-9c_2\cos 3x)+9(2c_1e^{2x}-3c_2\sin 3x)-18(c_1e^{2x}+c_2\cos 3x)$
$\equiv\ 8c_1e^{2x}+27c_2\sin 3x-8c_1e^{2x}+18c_2\cos 3x+18c_1e^{2x}-27c_2\sin 3x-18c_1e^{2x}-18c_2\cos 3x\equiv 0$

وعلية فإن الحل $y=c_1e^{2x}+c_2\cos 3x\ ,\forall x\in\mathbb{R}$ يعتبر حلاً للمعادلة التفاضلية $y^{///}-2y^{//}+9y^{/}-18y=0$ وهو حل خاص حيث $c_3=0$

ثانياً / نتأكد هل الحل رقم (٢) يعتبر حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة في التمرين والتي هي من الرتبة الثالثة لذلك فإننا نقوم بمفاضلة الحل $y=c_1e^{2x}+c_2\cos 3x+c_3\sin 3x\ ,\forall x\in\mathbb{R}$ ثلاث مرات :-

$$\begin{cases} y=c_1e^{2x}+c_2\cos 3x+c_3\sin 3x \\ y^{/}=2c_1e^{2x}-3c_2\sin 3x+3c_3\cos 3x \\ y^{//}=4c_1e^{2x}-9c_2\cos 3x-9c_3\sin 3x \\ y^{///}=8c_1e^{2x}+27c_2\sin 3x-27c_3\cos 3x \end{cases}\quad (*)$$

نعوض عن كل من $y\ ,y^{/}\ ,y^{//}\ ,\ y^{///}$ في للمعادلة التفاضلية

$$y^{///}-2y^{//}+9y^{/}-18y=0$$

$$8c_1e^{2x}+27c_2\sin 3x-27c_3\cos 3x-8c_1e^{2x}+18c_2\cos 3x+18c_3\sin 3x+18c_1e^{2x}-27c_2\sin 3x+27c_3\cos 3x-18c_1e^{2x}-18c_2\cos 3x-18c_3\sin 3x\equiv 0$$

وعلية فإن الحل $y=c_1e^{2x}+c_2\cos 3x+c_3\sin 3x\ ,\forall x\in\mathbb{R}$ يعتبر حلا عاما للمعادلة التفاضلية

$$y^{///}-2y^{//}+9y^{/}-18y=0$$

ثالثاً / نتأكد هل الحل رقم (3) يعتبر حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة في التمرين والتي هي من الرتبة الثالثة لذلك فإننا نقوم بمفاضلة الحل $y=c_1e^{2x}+x^2\ ,\forall x\in\mathbb{R}$ ثلاث مرات :-

$$\begin{cases} y=c_1e^{2x}+x^2 \\ y^{/}=2c_1e^{2x}+2x \\ y^{//}=4c_1e^{2x}+2 \\ y^{///}=8c_1e^{2x} \end{cases}$$

نعوض عن كل من $y\ ,y^{/}\ ,y^{//}\ ,\ y^{///}$ في المعادلة التفاضلية $y^{///}-2y^{//}+9y^{/}-18y=0$ فنحصل على :-

$8c_1e^{2x}-8c_1e^{2x}-4+18c_1e^{2x}+18x-18c_1e^{2x}-18x^2\equiv 18x-18x^2-4\neq 0$

وعلية فإن الحل $y=c_1e^{2x}+x^2\ \forall x\in\mathbb{R}$ لا يعتبر حلاً للمعادلة التفاضلية $y^{///}-2y^{//}+9y^{/}-18y=0$ لأنه لا يحققها .

ب) ١- $y=c_1e^{2x}+c_2\cos 3x\ ,\forall x\in\mathbb{R}$
لا يعتبر حلاً عاماً للمعادلة التفاضلية ولكنه يحققها وإنما يعتبر حلاً خاصاً وذلك لاحتوائه على ثابتين اختياريين فقط هما c_2, c_1 على اعتبار اننا عوضنا عن الثابت الأخير بصفر $c_3=0$

٢- $y=c_1e^{2x}+c_2\cos 3x+c_3\sin 3x\ ,\forall x\in\mathbb{R}$
حل عام للمعادلة التفاضلية لاحتوائه على ثوابت اختيارية عددها يساوي رتبة المعادلة التفاضلية وهذه الثوابت هي c_3, c_2, c_1 وهو يحققها .

٣- $y=c_1e^{2x}+x^2\ \forall x\in\mathbb{R}$
ليس حلاً للمعادلة التفاضلية لأنه لا يحققها .

ج) نعوض بالشروط الابتدائية في المنظومة $(*)$ الذي حصلنا عليه سابقاً في نفس التمرين الفقرة (أ) رقم (٢) فنجد أن

$y(0)=1 \quad\Rightarrow 1=c_1+c_2\longrightarrow(1)$
$y^{/}(0)=-1 \quad\Rightarrow -1=2c_1+3c_3\longrightarrow(2)$
$y^{//}(0)=0 \quad\Rightarrow 0=4c_1-9c_2\longrightarrow(3)$

بحل نظام هذه المعادلات نحصل على :-

$$c_1=\frac{9}{13}\ ,\qquad c_2=\frac{4}{13}\ ,\qquad c_3=-\frac{31}{39}$$

نعوض بقيم الثوابت c_3, c_2, c_1 في الحل العام

$y = c_1e^{2x} + c_2\cos 3x + c_3\sin 3x$ فنحصل على :-

$$y = \frac{9}{13}e^{2x} + \frac{4}{13}\cos 3x - \frac{13}{39}\sin 3x$$

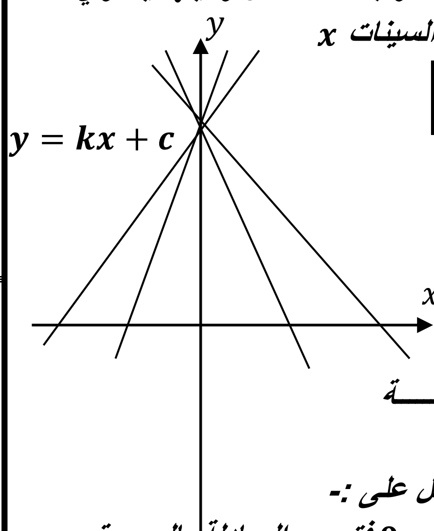
وهذا الحل هو حل لمسألة كوشي ويعتبر حلاً خاصا وحيدا للمعادلة التفاضلية $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$ الذي يحقق الشروط الإبتدائية

$$y(0) = 1 \ , y'(0) = -1 \ , \ y''(0) = 0$$

التمرينات

تمرين (١) صفحة ٧ :- أوجد المعادلة التفاضلية التي تمثل الخطوط المستقيمة التي لا تمر بنقطة الأصل وميلها يساوي الجزء المقطوع من محور السينات x

الحــــل :-



نعلم أن الخطوط المستقيمة التي تقطع محور السينات تعطى بالمعادلة التاليـــة $y = kx + c$ والنقطـة $(k, 0)$ واقعة على هذا المستقيم نعوض في المعادلــــة $y = kx + c$ عن $x = k \ , \ y = 0$ فنحصل على :-

$0 = k^2 + c \Rightarrow c = -k^2$ فتصبح المعادلة بالصورة $y = kx - k^2$ وهذه المعادلة تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة .

ولإيجادها نتبع الأتي :-

$$\begin{cases} y = kx - k^2 \\ y' = k \end{cases} \Rightarrow \ y = y'x - y'^2$$

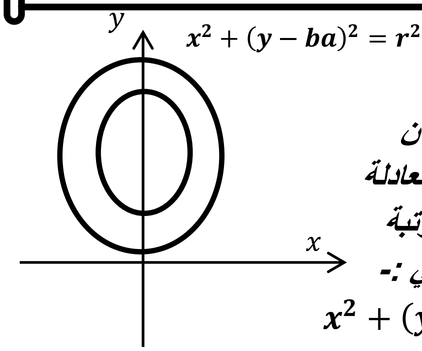
$$\Rightarrow xy' - y = y'^2$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية والرتبة الأولى

تمرين(٢) صفحة ٨ :- أوجد المعادلة التفاضلية التي تمثل الدوائر التي مركزها يقع على محور الصادات y

الحــــل :-

الدائرة التي مركزها يقع على محور الصادات ونصف قطرها r تعطى بالصورة



$$x^2 + (y-b)^2 = r^2$$

حيث r, b ثابتان اختياريان في الحل العام لذلك فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة من الرتبة الثانية ولإيجادها نتبع الأتي :-

$$x^2 + (y-b)^2 = r^2 \longrightarrow (1)$$

$$\Rightarrow 2x + 2y'(y-b) = 0$$

$$x + y'(y-b) = 0 \qquad \longrightarrow (2)$$

$$1 + y''(y-b) + y'^2 = 0 \qquad \longrightarrow (3)$$

بضرب طرفي المعادلة (3) في y' نحصل على :-

$$y' + y''\, y'(y-b) + y'^3 = 0 \longrightarrow (*)$$

من المعادلة (2) نجد أن $y'(y-b) = -x$

بالتعويض في المعادلة $(*)$ عن $y'(y-b) = -x$

نحصل على :-

$$y' + y''\,(-x) + y'^3 = 0$$

$$xy'' - y'^3 - y' = 0$$

ثانياً :- تمارين [١-٢]

١) حل مسألة كوشي الآتية :-

$$y\,y' = x + 1$$
$$y(0) = 3$$

الحــــل :-

اولاً / نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y\,y' = x + 1$

$$y\frac{dy}{dx} = x + 1 \Rightarrow y\,dy = (x+1)dx$$

$$\int y\,dy = \int (x+1)dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

$$y^2 = x^2 + 2x + 2c$$

$y = \pm\sqrt{x^2 + 2x + 2c}$ ⟵ الحل العام

نعوض في الحل العام عن $x = 0 \ , \ y = 3$ فنحصل على

$$3 = \pm\sqrt{2c} \ \Rightarrow 9 = 2c \ \Rightarrow c = \frac{9}{2}$$

نعوض بقيمة $c = \frac{9}{2}$ في الحل العام لنحصل على الحل الوحيد لمسالة كوشي (لعدم وجود حلول شاذة)

$$y = \sqrt{x^2 + 2x + 9}$$

لا توجد حلول شاذة لعدم وجود استثناءات

٢) للمعادلة التفاضلية $r^2 \frac{dr}{d\theta} = \sin\theta$ أوجد الحل العام وأبحث عن الحلول الشاذة (إن وجدت) ؟

الحــــــــــل :-

$$r^2 \frac{dr}{d\theta} = \sin\theta \Rightarrow r^2 dr = \sin\theta \; d\theta$$

$$\int r^2 dr = \int \sin\theta \; d\theta$$

$$\frac{1}{3} r^3 = -\cos\theta + c$$

$$r = \sqrt[3]{3c - 3\cos\theta}$$ ← الحل العام

لأتوجد حلول شاذة (منفردة) وذلك لعدم وجود استثناءات

٣) حل المعادلة التفاضلية :

$$y - xy' = y^2 + y'$$

الحــــــــــل :-

نوجد الحل العام كالتالي :

$$y - x\frac{dy}{dx} = y^2 + \frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = y - y^2$$

$$(x+1)dy = (y - y^2)dx$$

$$\frac{dy}{y-y^2} = \frac{dx}{x+1}$$ بشرط $y(1-y) \neq 0$

$$\int \frac{dy}{y-y^2} = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y-y^2} = \ln|x+1| + k$$

$$I_1 = \ln|x+1| + k \longrightarrow (*)$$

نحسب التكامل $I_1 = \int \frac{dy}{y-y^2}$ بإستخدام الكسور الجزئية

$$let \;\; \frac{1}{y-y^2} = \frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int \frac{A}{y}dy + \int \frac{B}{1-y}dy$$

$$\Rightarrow 1 = A(1-y) + By$$

نضع $y = 1 \Leftarrow B = 1$

نضع $y = 0 \Leftarrow A = 1$

$$\because I_1 = \int \frac{A}{y}dy + \int \frac{B}{1-y}dy$$

$$\therefore I_1 = \int \frac{1}{y}dy + \int \frac{1}{1-y}dy$$

$$I_1 = \ln|y| - \ln|1-y| = \ln\left|\frac{y}{1-y}\right|$$

على اعتبار أن الثابت الاختياري يساوي الصفر

نعوض بـI_1 في المعادلة $(*)$ فنحصل على :-

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = \ln|x+1| + k$$

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = \ln|x+1| + \ln|c|$$ حيث $\ln|c| = k$

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = \ln|c(x+1)|$$

$$\frac{y}{1-y} = c(x+1)$$

$$\frac{y}{y-1} = -c(x+1)$$

$$\frac{y-1+1}{y-1} = -c(x+1)$$

$$1 + \frac{1}{y-1} = -c(x+1)$$

$$\frac{1}{y-1} = -c(x+1) - 1$$

$$y - 1 = \frac{1}{-c(x+1)-1}$$

$$y = \frac{1}{-c(x+1)-1} + 1$$

$$y = \frac{-c(x+1)}{-[1+c(x+1)]}$$

$$y = \frac{c(x+1)}{1+c(x+1)}$$ ← الحل العام 1

ويمكن وضع الحل العام على الصورة

$$or \qquad y = \frac{c(x+1)}{c\left[\frac{1}{c}+(x+1)\right]}$$

$$y = \frac{x+1}{m+(x+1)} \longleftarrow \text{الحل العام } 2 \quad , \quad m = \frac{1}{c}$$

للبحث عن الحلول الشاذة ندرس الاستثناءات

اولاً/ ندرس الحالة $y = 0$

نعوض في الحل العام 1 عن $y = 0$ فنحصل على $c = 0$

وعلية فإن الحل $y = 0$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة

ثانيا / ندرس الحالة $y = 1$

نعوض في الحل العام 2 عن $y = 1$ فنحصل على $m = 0$

وعلية فإن الحل $y = 1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة

---

٤) للمعادلة التفاضلية :

$$3e^x \tan y\, dx + (1-e^x)\sec^2 y\, dy = 0$$

أ) أوجد الحل العام وأبحث عن الحلول المنفردة (إن وجدت)

ب) أوجد المنحنى التكاملي المار بالنقطة $m(\pi, -2\pi)$

ج) هل النقطة $m(\pi, -2\pi)$ شاذة ؟ ولماذا ؟

الحـــــــــــل :-

أ) الحل العام :-

$$\because 3e^x \tan y\, dx + (1-e^x)\sec^2 y\, dy = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{3e^x}{1-e^x}dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y}dy = 0 \qquad \boxed{\text{بشرط } \tan y \neq 0}$$

$$-3\int \frac{-e^x}{1-e^x}dx + \int \frac{\sec^2 x}{\tan y}dy = 0$$

$$-3\ln|1-e^x| + \ln|\tan y| = \ln|c|$$

$$\ln|\tan y| = \ln|(1-e^x)^3| + \ln|c|$$

$$\ln|\tan y| = \ln|c(1-e^x)^3|$$

$$\tan y = c(1-e^x)^3$$

$$y = \tan^{-1} c(1-e^x)^3 \longleftarrow \text{الحـــل العـــام}$$

للبحث عن الحلول الشاذة ندرس الحالة $\tan y = 0$

فنلاحظ أن الحل $\tan y = 0$ يعتبر حلاً خاصاً لأننا نحصل علية عند التعويض عن $c = 0$ في الحل العام

وعلية فإن $\tan y = 0 \Longrightarrow y = k\pi \quad : k \in \mathbb{Z}$

دوال ثابتة تعتبر حلول خاصة للمعادلة التفاضلية

ب) لإيجاد المنحنى التكاملي المار بالنقطة $m(\pi, -2\pi)$

نعوض في الحل العام عن كل من $x = \pi \quad , \quad y = -2\pi$

فنحصل على :-

$$\tan -2\pi = c(1-e^{\pi})^3$$

$$0 = c(1-e^{\pi})^3 \Longrightarrow c = 0$$

نعوض عن $c = 0$ في الحل العام فنحصل :-

$$y = \tan^{-1} 0 = k\pi \qquad : k \in \mathbb{Z}$$

$$k = -2 \Longrightarrow y = -2\pi$$

وعلية فإن المنحنى التكاملي المار بالنقطة $m(\pi, -2\pi)$

يعطى بـــــــ :-

$$\gamma = \{ (x, y) \quad : \quad y = -2\pi \}$$

ج) النقطة $m(\pi, -2\pi)$ ليست شاذة لأنها تقع على منحنى تكاملي وحيد γ

---

٥) حل المعادلة التفاضلية $y' = xy^2 - x$

الحـــــــــــل :-

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 - x \Longrightarrow dy = x(y^2-1)dx$$

$$\frac{dy}{y^2-1} = x\,dx \qquad \boxed{\text{بشرط } y^2 - 1 \neq 0}$$

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int x\,dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{y^2-1} - \int x\,dx = 0$$

$$I_1 - \frac{1}{2}x^2 = k \longrightarrow (*)$$

نوجد التكامل $I_1 = \int \frac{dy}{y^2-1}$ باستخدام طريقة الكسور الجزيئية :-

$$I_1 = \int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{1}{(y-1)(y+1)}dy$$

نضع

$$\frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1}$$

$$\Longrightarrow 1 = A(y+1) + B(y-1)$$

بالمقارنة بين المعاملات بين الطرفين نجد أن :-

$$A = \frac{1}{2} \qquad \& \qquad B = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore I_1 = \int \frac{\frac{1}{2}}{y-1}dy + \int -\frac{\frac{1}{2}}{y+1}dy$$

اعتبرنا ثابت التكامل يساوي صفراً $I_1 = \frac{1}{2} ln \left|\frac{y-1}{y+1}\right|$

نعوض بـ I_1 في المعادلة $(*)$ فنحصل على :-

$\frac{1}{2} ln \left|\frac{y-1}{y+1}\right| - \frac{1}{2}x^2 = k$

$ln \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x^2 + 2k$

$ln \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x^2 + ln|c|$, $ln|c| = 2k$

$e^{ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|} = e^{x^2+ln|c|}$

$\frac{y-1}{y+1} = ce^{x^2}$

$y - 1 = c(y+1)e^{x^2}$

$y - 1 = ce^{x^2}y + ce^{x^2}$

$y\left(1 - ce^{x^2}\right) = ce^{x^2} + 1$

$y = \frac{1+ce^{x^2}}{1-ce^{x^2}}$ $\longleftarrow$ الحـــــل العام1

<u>**or**</u>

$y = \frac{c\left(\frac{1}{c}+e^{x^2}\right)}{c\left(\frac{1}{c}-e^{x^2}\right)} = \frac{\frac{1}{c}+e^{x^2}}{\frac{1}{c}-e^{x^2}}$

$y = \frac{c_1+e^{x^2}}{c_1-e^{x^2}}$ $: c_1 = \frac{1}{c}$ $\longleftarrow$ الحـــــل العام2

للبحث عن الحلول الشاذة ندرس الحالة

$y^2 - 1 = 0 \Rightarrow (y-1)(y+1) = 0$

أولاً / ندرس الحالة $y = 1$

نعوض في الحـــــل العام1 عن $y = 1$ فنحصل على :-

$1 = \frac{1+ce^{x^2}}{1-ce^{x^2}} \Rightarrow 1 + ce^{x^2} = 1 - ce^{x^2} \Rightarrow c = 0$

وعلية فإن الحل $y = 1$ يعتبر حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية المعطاة

ثانياً / ندرس الحالة $y = -1$

نعوض في الحـــــل العام2 عن $y = -1$ فنحصل على :-

$-1 = \frac{c_1+e^{x^2}}{c_1-e^{x^2}} \Rightarrow c_1 + e^{x^2} = -c_1 + e^{x^2}$

$2c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

وعلية فإن الحل $y = -1$ يعتبر حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية المعطاة

٦) حل المعادلة التفاضلية :

$(sec^2y)\frac{dy}{dx} + (tan\,x)\ tan\,y = 0$

الحـــــــــل :-

$sec^2y\ \ dy + tan\,x\ \ tan\,y\ \ dx = 0$

$\frac{sec^2y}{tan\,y}dy + tan\,x\,dx = 0$ بشرط $tan\,y \neq 0$

$\int \frac{sec^2y}{tan\,y}dy + \int tan\,x\,dx = k$

$ln|tan\,y| - ln|cos\,x| = k$

$ln|tan\,y| = ln|cos\,x| + ln|c|$: $ln|c| = k$

$ln|tan\,y| = ln|c(cos\,x)|$

$tan\,y = c(cos\,x)$

$y = tan^{-1}(c(cos\,x))$ الحـــــل العام

للبحث عن الحلول الشاذة ندرس الحالة $tan\,y = 0$

نلاحظ أن :-

$tan\,y = 0 \Rightarrow y = k\pi$ $: k \in \mathbb{Z}$

تعتبر هذه الحلول حلول خاصة للمعادلة التفاضلية لأننا نحصل عليها عند التعويض في الحل العام عن الثابت $c = 0$

وعلية لا توجد حلول شاذة للمعادلة التفاضلية المعطاة

٧) حل مسألة كوشي :

$$\begin{cases} e^{y-x}\ y' + x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

الحـــــــــل :-

أولاً/ نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$e^{y-x}\ y' + x = 0$

$e^y\ e^{-x}\ \frac{dy}{dx} = -x$

$e^y\ dy = -xe^x dx$

$\int\ e^y\ dy = -\int xe^x dx + k$

$e^y = -I_1 + k \longrightarrow (*)$

نحسب التكامل $I_1 = \int xe^x dx$ بإستخدام طريقة التجزئة:-

$let \quad u = x \qquad dv = e^x\,dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

$\therefore I_1 = x\,e^x - \int e^x dx$

$I_1 = x\,e^x - e^x$

نعوض بـ I_1 في المعادلة $(*)$ فنحصل على :-

$e^y = -(x\,e^x - e^x) + k$

$e^y = -x\,e^x + e^x + k$

$e^y = e^x(1-x) + k$

$y = ln\,|e^x(1-x) + k|$ الحـــــــل العام

من الشرط الابتدائي $y(0) = 0$ نعوض في الحل العام عن كل من $y = 0 \;,\; x = 0$ فنحصل على :-

$0 = ln\,|1+k| \Rightarrow e^0 = 1 + k$

$1 = 1 + k \;\Rightarrow\; k = 0$

نعوض في الحل العام عن $k = 0$ لنحصل على <u>الحل الوحيد</u> لمسألة كوشي <u>لعدم وجود حلول شاذة</u> وهو:-

$y = ln\,|e^x(1-x)| = ln|e^x| + ln\,|(1-x)|$

$y = x + ln\,|1-x|$

٨) حل المعادلة التفاضلية : $y'^2 + y^2 = 1$

الحـــــــــــل :-

لإيجاد الحل العام نبسط المعادلة التفاضلية $y'^2 + y^2 = 1$:-

$y'^2 = 1 - y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-y^2}$

$dy = \pm\sqrt{1-y^2}\,dx$

$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm dx$ بشرط $1 - y^2 \neq 0$

$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm \int dx + c$

$sin^{-1}y = \pm x + c$

$y = sin\,(c \pm x)$ الحـــــــل العام

وللبحث عن الحلول الشاذة ندرس الحالة

$1 - y^2 = 0 \;\Rightarrow (1+y)(1-y) = 0$

أولاً / ندرس الحالة $y = 1$ نعوض في الحل العام فنحصل على:-

$1 = sin(c \pm x) \Rightarrow sin^{-1}(1) = c \pm x$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi = c \pm x \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} + k\pi \mp x \quad , k \in \mathbb{Z}$

نلاحظ هنا أن الثابت c ليس ثابت (دالة في x)

وبما أن $y = 1 \;\Rightarrow y' = 0$ نحقق المعادلة التفاضلية حيث $y' + y^2 = 1$:-

$0 + (1)^2 \equiv 1$

وعلية فإن الحل $y = 1$ يعتبر حلاً شاذاً للمعادلة التفاضلية المعطاة

$y' + y^2 = 1$

ثانياً / ندرس الحالة $y = -1$ نعوض في الحل العام عن $y = -1$ فنحصل على :-

$c = -\frac{\pi}{2} + k\pi \mp x \qquad , \qquad k \in \mathbb{Z}$

نلاحظ هنا أن الثابت c ليس ثابت (دالة في x)

وبما أن $y = -1 \;\Rightarrow y' = 0$ نحقق المعادلة التفاضلية حيث $y' + y^2 = 1$:-

$0 + (-1)^2 \equiv 1$

وعلية فإن الحل $y = -1$ يعتبر حلاً شاذاً للمعادلة التفاضلية المعطاة.

ثالثاً :- تمارين [٢-٢]

١) للمعادلة التفاضلية

$$(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$$

أوجد المنحنى التكاملي المار بالنقطة $m(2,2)$ وما هو نوع هذا المنحنى .

الحـــــل :-

نلاحظ أن المعادلة التفاضلية الموجودة في التمرين أعلاه هي بالصورة $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

حيـــــث :-

$$M(x,y)=x^2+2xy-y^2$$
$$N(x,y)=y^2+2xy-x^2$$
$$\because M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2x^2+2\lambda^2xy-\lambda^2y^2$$
$$M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2M(x,y)$$

وعلية فإن الدالة $M(x,y)$ دالة متجانسة بقوة $m=2$

$$N(x,y)=y^2+2xy-x^2$$
$$\because N(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2(y^2+2xy-x^2)$$
$$N(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2N(x,y)$$

وعلية فإن الدالة $N(x,y)$ دالة متجانسة بقوة $m=2$

وبالتالي فإن المعادلة التفاضلية

$$(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$$

متجانسة بقوة $m=2$ لذلك نضع

$$u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=ux$$

ومنه $dy=udx+xdu$

نعوض عن $y=ux$ & $dy=udx+xdu$ في المعادلة التفاضلية فنحصل على :-

$$[x^2+2x^2u-u^2x^2]dx+[u^2x^2+2x^2u-x^2]*$$
$$[udx+xdu]=0$$
$$[x^2+2x^2u-u^2x^2+u^3x^2+2x^2u^2-x^2u]dx$$
$$+[u^2x^3+2x^3u-x^3]du=0$$
$$x^2[1+2u-u^2+u^3+2u^2-u]dx$$
$$+x^3[u^2+2u-1]du=0$$

$$\frac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1}\,du=\frac{-dx}{x}\qquad \boxed{\text{بشرط } u^3+u^2+u++1\neq 0}$$
$$\frac{u^2+2u-1}{(u^3+u^2)+(u+1)}\,du=\frac{-dx}{x}$$
$$\frac{u^2+2u-1}{u^2(u+1)+(u+1)}\,du=\frac{-dx}{x}$$
$$\frac{u^2+2u-1}{(u+1)(u^2+1)}\,du=\frac{-dx}{x}\qquad \boxed{\text{بشرط } u+1\neq 0}$$
$$\int\frac{u^2+2u-1}{(u+1)(u^2+1)}\,du=\int\frac{-dx}{x}+k$$
$$\int\frac{u^2+2u-1}{(u+1)(u^2+1)}\,du+\int\frac{dx}{x}=k$$
$$I_1+ln|x|=k\qquad\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow(*)$$

نحسب التكامل $I_1=\int\frac{u^2+2u-1}{(u+1)(u^2+1)}\,du$ بإستخدام الكسور الجزيئية :-

$$let\quad \frac{u^2+2u-1}{(u+1)(u^2+1)}=\frac{A}{u+1}+\frac{Bu+C}{u^2+1}$$
$$u^2+2u-1=A(u^2+1)+(Bu+C)(u+1)$$
$$u^2+2u-1=Au^2+A+Bu^2+Bu+Cu+C$$
$$u^2+2u-1=(A+B)u^2+(B+C)u+A+C$$

بالمقارنة بين المعاملات في ا لطرفين نحصل على :-

$$A+B=1\longrightarrow(1)$$
$$B+C=2\longrightarrow(2)$$
$$A+C=-1\longrightarrow(3)$$

بحل نظام هذه المعادلات نحصل على

$$\boxed{C=0}\quad\boxed{B=2}\quad\boxed{A=-1}$$
$$\therefore I_1=\int\left[-\frac{1}{u+1}+\frac{2u}{u^2+1}\right]du=\int\frac{u^2+2u-1}{(u+1)(u^2+1)}du$$
$$I_1=-ln|u+1|+ln|u^2+1|$$

على اعتبار ان ثابت التكامل يساوي صفراً

$$I_1=ln\left|\frac{u^2+1}{u+1}\right|$$

نعوض بـــ I_1 في المعادلة $(*)$ نحصل على :-

$$ln\left|\frac{u^2+1}{u+1}\right|+ln|x|=k$$
$$ln\left|\frac{u^2+1}{u+1}\right|=-ln\,|x|+ln|c|\quad,\ ln|c|=k$$
$$ln\left|\frac{u^2+1}{u+1}\right|=ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

$\frac{u^2+1}{u+1} = \frac{c}{x} \Rightarrow x(u^2+1) = c(u+1)$

or

$u+1 = \frac{1}{c}[x(u^2+1)]$

$u+1 = m[x(u^2+1)] \quad , \quad m = \frac{1}{c} \longrightarrow (**)$

نعوض عن $u = \frac{y}{x}$ فنحصل على :-

$\left(\frac{y}{x}+1\right) = m\left[x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)\right]$

$\left(\frac{y+x}{x}\right) = m\left[x\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)\right]$

$\left(\frac{y+x}{x}\right) = m\left(\frac{y^2+x^2}{x}\right)$

$\boxed{y+x = m(y^2+x^2) \quad , \text{التكــــــامل العام}}$

من النقطة $M(2,2)$ نعوض عن $x=2$, $y=2$ في التكامل العام فنحصل على :-

$4 = 8m \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

نعوض في التكامل العام عن $m = \frac{1}{2}$ فنحصل على :-

$y+x = \frac{1}{2}(y^2+x^2) \Rightarrow 2y+2x = y^2+x^2$

$y^2-2y+x^2-2x = 0$

$y^2-2y+1+x^2-2x+1 = 2$

$(y-1)^2+(x-1)^2 = 2$

هذا المنحنى التكاملي يمر بالنقطة $M(2,2)$ وهذا المنحنى يمثل دائرة مركزها النقطة $(1,1)$ ونصف قطرها يساوي $\sqrt{2}$

للبحث عن الحلول الشاذة ندرس الحالة $u+1=0$

$u+1=0 \Rightarrow \frac{y}{x}+1=0 \Rightarrow \frac{y+x}{x}=0$

او نحصل عليه من $(**)$ عندما $m=0$ مباشرة وهو حل خاص

$y+x=0 \Rightarrow y=-x$

نعوض في التكامل العام عن $y=-x$ فنحصل على :-

$-x+x = m(x^2+x^2) \Rightarrow m=0$

وعلية فإن الحل $y=-x$ حل خاص للمعادلة التفاضلية

$(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy = 0$

وعلية لا يوجد منحنى تكاملي شاذ يمر بالنقطة $M(2,2)$ وبالتالي فإن المنحنى التكاملي الوحيد الذي يمر بالنقطة $M(2,2)$ هو

$\gamma = \{(x,y) : (y-1)^2+(x-1)^2 = 2\}$

وهذا المنحنى يمثل دائرة مركزها النقطة $(1,1)$ ونصف قطرها يساوي $\sqrt{2}$

---

٢) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy+x^2}$

الحــــــــــــل :-

$y^2dx = (xy+x^2)dy$

$y^2dx-(xy+x^2)dy = 0$

نلاحظ أن هذه المعادلة التفاضلية بالصورة

$M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0$

حيـــــــث :-

$M(x,y) = y^2$

$N(x,y) = -(xy+x^2)$

$\because M(\lambda x,\lambda y) = \lambda^2y^2$

$M(\lambda x,\lambda y) = \lambda^2M(x,y)$

وعلية فإن الدالة $M(x,y)$ دالة متجانسة بقوة $m=2$

$N(x,y) = -(xy+x^2)$

$\because N(\lambda x,\lambda y) = -\lambda^2(xy+x^2)$

$N(\lambda x,\lambda y) = \lambda^2N(x,y)$

وعلية فإن الدالة $N(x,y)$ دالة متجانسة بقوة $m=2$

وبالتالي فإن المعادلة التفاضلية

$y^2dx-(xy+x^2)dy = 0$

متجانسة بقوة $m=2$ لذلك نضع

$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$

ومنه $dy = udx+xdu$

نعوض عن $y=ux$ & $dy = udx+xdu$ في المعادلة التفاضلية :-

$u^2x^2dx-(ux^2+x^2)(udx+xdu) = 0$

$u^2x^2dx-(u^2x^2+ux^2)dx-(ux^3+x^3)du = 0$

$$x^2(u^2-u^2-u)dx-x^3(u+1)du=0$$

$$-u\,dx-x(u+1)du=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{u+1}{u}du=0$$ بشرط $\boxed{u\neq 0}$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{u+1}{u}du=0\Longrightarrow\int\frac{dx}{x}+\int\left(1+\frac{1}{u}\right)du=0$$

$$ln|x|+u+ln|u|=k$$

$$ln|ux|=k-u$$

$$ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)x\right|=k-\frac{y}{x}\Longrightarrow ln|y|=k-\frac{y}{x}$$

$$ln|y|=ln|c|-\frac{y}{x}\quad,\quad ln|c|=k$$

$$y=ce^{-\frac{y}{x}}$$

$$y\,e^{\frac{y}{x}}=c$$ ⟵ ⟵ التكـــــامل العام

للبحث عن الحلول الشاذة ندرس الحالة $u=0$

$$u=0\Longrightarrow\frac{y}{x}=0\Longrightarrow y=0$$

نعوض في التكامل العام عن $y=0$ فنحصل على :-

$c=0$, ثابت

وعلية فإن الحل $y=0$ يعتبر حل خاص للمعادلة التفاضلية لأننا نحصل علية عند التعويض عن $c=0$ في التكامل العام وبالتالي لا توجد حلول شاذة للمعادلة التفاضلية .

٣) حل مسألة كوشي :

$$\begin{cases}(x^2+y^2)dx=2xy\,dy\\ \quad y(2)=\sqrt{3}\end{cases}$$

الحـــــــل :-

أولاً / نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :-

$$(x^2+y^2)dx=2xy\,dy$$

$$(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$$

نلاحظ أن هذه المعادلة التفاضلية بالصورة

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

حيـــــث :-

$$M(x,y)=x^2+y^2$$

$$N(x,y)=-(2xy)$$

$$\because M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2(x^2+y^2)$$

$$M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2M(x,y)$$

وعلية فإن الدالة $M(x,y)$ دالة متجانسة بقوة $m=2$

$$N(x,y)=-(2xy)$$

$$\because N(\lambda x,\lambda y)=-\lambda^2(2xy)$$

$$N(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2N(x,y)$$

وعلية فإن الدالة $N(x,y)$ دالة متجانسة بقوة $m=2$

وبالتالي فإن المعادلة التفاضلية

$$y^2dx-(xy+x^2)dy=0$$

متجانسة بقوة $m=2$ لذلك نضع

$u=\frac{y}{x}\Longrightarrow y=ux$ ومنه $dy=udx+xdu$

نعوض عن $dy=udx+xdu$ & $y=ux$ في المعادلة التفاضلية :-

$$(x^2+u^2x^2)dx-x^2(2u^2)dx-x^2(2ux)du=0$$

$$x^2(1-u^2)dx-x^3(2u)du=0$$

$$(1-u^2)dx-x(2u)du=0$$

$$\frac{dx}{x}-\frac{2u}{1-u^2}du=0$$ بشرط $\boxed{1-u^2\neq 0}$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{-2u}{1-u^2}du=0$$

$$ln|x|+ln|1-u^2|=k$$

$$ln|x|+ln|1-u^2|=ln|c|\ ,$$ حيث $ln|c|=k$

$$ln|x(1-u^2)|=ln|c|$$

$$x(1-u^2)=c$$

$$1-u^2=\frac{c}{x}\longrightarrow(*)$$

$$1-\frac{y^2}{x^2}=\frac{c}{x}\Longrightarrow\frac{y^2}{x^2}=1-\frac{c}{x}\Longrightarrow\frac{y^2}{x^2}=\frac{x-c}{x}$$

$$y^2=x^2-cx$$

$$y=\pm\sqrt{x^2-cx}$$ ⟵⟵ الحـــــل العام

من الشرط الابتدائي $y(2)=\sqrt{3}$ نعوض عن كل $x=2\ ,\ y=\sqrt{3}$ في الحل العام فنحصل على :-

$$\sqrt{3}=\pm\sqrt{4-2c}\Longrightarrow 3=4-2c\Longrightarrow c=\frac{1}{2}$$

نعوض عن $c=\frac{1}{2}$ في الحل العام لنحصل على حل لمسألة كوشي :-

$$y=\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x}$$

نبحث عن الحلول الشاذة وذلك بدراسة الحالة $1-u^2=0$

فنلاحظ أن هذا الحل هو حل خاص للمعادلة التفاضلية نحصل علية عند التعويض في $(*)$ عن $c=0$ او

$$1-u^2=0 \Rightarrow u^2=1 \Rightarrow y^2=x^2 \Rightarrow y=\pm x$$

حل خاص نحصل علية من الحل العام

وعلية لا توجد حلول شاذة للمعادلة التفاضلية

وبالتالي فإن الحل $y=\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x}$ يعتبر حل وحيد لمسألة كوشي الذي يحقق الشرط الابتدائي $y(2)=\sqrt{3}$

٤) أوجد التكامل العام للمعادلة التفاضلية :-

$$(y^4-2x^3y)dx+(x^4-2xy^3)dy=0$$

الحـــــــــــل :-

المعادلة التفاضلية أعلاه متجانسة بقوة $m=4$ لذلك نضع :-

$$u=\frac{y}{x} \Leftrightarrow y=ux \Rightarrow dy=u\,dx+xdu$$

نعوض عن $y=ux$ & $dy=udx+xdu$ في المعادلة التفاضلية فنحصل على :-

$$(u^4x^4-2ux^4)dx+(x^4-2u^3x^4)(udx+xdu)=0$$

$$\Rightarrow x^4(u^4-2u)dx+x^4[(u-2u^4)dx+(x-2xu^3)du]=0$$

$$\Rightarrow (u^4-2u)dx+(u-2u^4)dx+x(1-2u^3)du=0$$

$$\Rightarrow (u^4-2u+u-2u^4)dx+x(1-2u^3)du=0$$

$$\Rightarrow (-u^4-u)dx+x(1-2u^3)du=0$$

$$\frac{dx}{x}-\frac{1-2u^3}{u^4+u}du=0 \qquad \boxed{\text{بشرط } u^4+u=0}$$

$$\frac{dx}{x}-\frac{1-2u^3}{u(u^3+1)}du=0$$

$$\frac{dx}{x}-\frac{1-2u^3}{u(u+1)(u^2-u+1)}du=0$$

$$\int\frac{dx}{x}-\int\frac{1-2u^3}{u(u+1)(u^2-u+1)}du=k$$

$$\ln|x|-I_1=k \longrightarrow (*)$$

نحسب التكامل $I_1=\int\frac{1-2u^3}{u(u+1)(u^2-u+1)}du$ بإستخدام الكسور الجزئية:-

$$let \quad \frac{1-2u^3}{u(u+1)(u^2-u+1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}+\frac{Cu+D}{u^2-u+1}$$

$$1-2u^3=A(u^3+1)+B[u(u^2-u+1)]+(Cu+D)[u(u+1)]$$

$$1-2u^3=(A+B+C)u^3+(C+D-B)u^2+(B+D)u+A$$

بالمقارنة بين المعاملات في الطرفين نجد :-

$$A+B+C=-2 \longrightarrow (1)$$

$$C+D-B=0 \longrightarrow (2)$$

$$B+D=0 \longrightarrow (3)$$

$$\boxed{A=1}$$

نعوض بقيمة $A=1$ في المعادلة (1) فنحصل على :-

$$B+C=-3 \longrightarrow (4)$$

و نطرح المعادلة (3) من المعادلة (4) نحصل على:-

$$C-D=-3 \longrightarrow (5)$$

وبجمع المعادلة (2) مع (4) نحصل على :-

$$2C+D=-3 \longrightarrow (6)$$

وبجمع المعادلة (6) مع المعادلة مع المعادلة (5) نحصل على

$$3C=-6 \Rightarrow \qquad \boxed{C=-2}$$

نعوض بقيم $C=-2$ في المعادلتين (5), (4) فنحصل على

$$\boxed{B=-1} \quad \& \quad \boxed{D=1}$$

الأن نعوض بالقيم التي حصلنا عليها فيكون :

$$\frac{1-2u^3}{u(u+1)(u^2-u+1)}=\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}+\frac{-2u+1}{u^2-u+1}$$

$$\therefore I_1=\int\frac{du}{u}+\int-\frac{du}{u+1}+\int\frac{-2u+1}{u^2-u+1}du$$

$$I_1=\ln|u|-\ln|u+1|-\ln|u^2-u+1|$$

نعوض بـ I_1 في المعادلة $(*)$ فنحصل على :-

$$\ln|x|-\ln|u|+\ln|u+1|+\ln|u^2-u+1|=k$$

$$\ln|x|-\ln|u|+\ln|(u+1)(u^2-u+1)|=k$$

$$\ln|x|-\ln|u|+\ln|(u^3+1)|=k$$

$$\ln\left|\frac{u^3+1}{u}\right|=k-\ln|x|$$

$$\ln\left|\frac{u^3+1}{u}\right|=\ln|c|-\ln|x| \quad \text{حيث} \quad \ln|c|=k$$

$$\ln\left|\frac{u^3+1}{u}\right| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

$$\frac{u^3+1}{u} = \frac{c}{x}$$

$$x(u^3+1) = cu \longrightarrow (**)$$

نعوض عن $u = \frac{y}{x}$ نحصل على :-

$$x\left(\frac{y^3}{x^3}+1\right) = c\frac{y}{x}$$

$$x\left(\frac{y^3+x^3}{x^3}\right) = c\,\frac{y}{x}$$

$$\frac{y^3+x^3}{x^2} = c\,\frac{y}{x}$$

$$y^3 + x^3 = cxy$$

$\frac{y^3+x^3}{xy} = c$ $\longleftarrow$ التكامل العام

نبحث عن الحلول الشاذة من الإستثناء $\boxed{u^4+u=0}$

نلاحظ ان $\boxed{u^4+u=0 \Rightarrow u(u^3+1)=0}$ حل خاص

نحصل علية عند التعويض عن $c=0$ في $(**)$

٥) حل المعادلة التفاضلية : $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

الحـــــــل :-

$$dy - \left(e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right)dx = 0$$

هذه المعادلة التفاضلية متجانسة بقوة $m=0$ لذلك نضع

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux \Rightarrow y' = u + x\frac{du}{dx}$$

نعوض عن $y' = u + x\frac{du}{dx}$ & $y = ux$ في المعادلة التفاضلية فنحصل على :-

$$u + x\frac{du}{dx} = e^u + u$$

$$x\frac{du}{dx} = e^u \Rightarrow x\,du = e^u\,dx \Rightarrow \frac{du}{e^u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{du}{e^u} = \int\frac{dx}{x} + k$$

$$-e^{-u} = \ln|x| + k$$

$$e^{-u} = -\ln|x| - k$$

$$e^{-u} = -\ln|x| + \ln|c| \quad , \quad \ln|c| = -k$$

$$e^{-u} = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

$$-u = \ln\left(\ln\left|\frac{c}{x}\right|\right)$$

$$-\frac{y}{x} = \ln\left(\ln\left|\frac{c}{x}\right|\right)$$

$y = -x\ln\left(\ln\left|\frac{c}{x}\right|\right)$ $\longrightarrow$ الحل العام

ولا توجد حلول منفردة لعدم وجود استثناءات.

٦) حل مسألة كوشي :

$$\begin{cases} y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

الحـــــــل :-

نوجد أولاً الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

نستخدم التعويض التالي :-

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux \Rightarrow y' = u + x\frac{du}{dx}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على :-

$$u + x\frac{du}{dx} = e^{-u} + u$$

$$x\,du = e^{-u}dx$$

$$\frac{du}{e^{-u}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int e^u du = \int\frac{dx}{x} + \ln|c|$$

$$e^u = \ln|x| + \ln|c| \Rightarrow e^u = \ln|cx|$$

$$u = \ln(\ln|cx|)$$

نرجع u الى اصلها $u = \frac{y}{x}$ فنحصل على :

$$\frac{y}{x} = \ln(\ln|cx|)$$

$y = x\ln(\ln|cx|)$ $\longrightarrow$ الحـــــــل العام

من الشرط الابتدائي $y(1) = 0$ نعوض في الحل العام عن كل من $x = 1 \quad , \quad y = 0$

$$0 = \ln(\ln|c|) \Rightarrow e^0 = \ln|c| \Rightarrow 1 = \ln|c|$$

$$\boxed{\therefore \quad c = e}$$

نعوض في الحل العام عن $c = e$ فنحصل على :-

$$y = x\ln(\ln|ex|)$$

$$y = x\ln(\ln(e) + \ln|x|)$$

$$y = x\ln(1 + \ln|x|)$$

وهو الحل الوحيد لمسألة كوشي لعدم وجود استثناءات

٧) أوجد المنحنى التكاملي للمعادلة التفاضلية :-

$$x\,y' = 3y - 2x - 2\sqrt{x\,y - x^2}$$

والمار بالنقطة $m(1,1)$ وهل النقطة m نقطة شاذة ؟ ولماذا؟

الحـــــــــل :-

نكتب المعادلة التفاضلية بالصيغة الآتية :-

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} = \left(3y - 2x - 2\sqrt{x\,y - x^2}\right)$$

$$\left(2x + 2\sqrt{x\,y - x^2} - 3y\right)dx + x\,dy = 0$$

$$M(x,y) = 2x + 2\sqrt{x\,y - x^2} - 3y$$

$$N(x,y) = x$$

نلاحظ أن الدالتان $M(x,y)$ و $N(x,y)$ متجانستان من نفس القوة $m = 1$ وعلية فإن المعادلة التفاضلية $\left(2x + 2\sqrt{x\,y - x^2} - 3y\right)dx + x\,dy = 0$ متجانسة بقوة $m = 1$ لذلك نضـــــــع

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$$

نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على :-

$$\left(2x + 2\sqrt{ux^2 - x^2} - 3ux\right)dx + x(udx + xdu) = 0$$

$$x\left(2 + 2\sqrt{u-1} - 3u\right)dx + x(udx + xdu) = 0$$

$$\left(2 + 2\sqrt{u-1} - 3u\right)dx + udx + xdu = 0$$

$$\left(2 + 2\sqrt{u-1} - 3u + u\right)dx + xdu = 0$$

$$\left(2 + 2\sqrt{u-1} - 2u\right)dx + x\,du = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{2(\sqrt{u-1}+1-u)} = 0$$

بشرط $(\sqrt{u-1} + 1 - u) \neq 0$

$$\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u-1}+1-u} = k$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u-1}+1-u} = -\ln|c| \quad ,$$

حيث $k = -\ln|c|$

$$\ln|cx| = -\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u-1}+1-u}$$

$$\ln|cx| = -\frac{1}{2}\,I_1 \qquad \longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow (*)$$

نحسب التكامل $I_1 = \int\frac{du}{\sqrt{u-1}+1-u}$ بإستخدام التعويض:-

نفرض أن $t = \sqrt{u-1} \Rightarrow t^2 = u - 1$

$$\Rightarrow u = t^2 + 1 \Rightarrow du = 2t\,dt$$

$$I_1 = \int\frac{2tdt}{t-t^2}$$

$$I_1 = \int\frac{2tdt}{t(1-t)} = \int\frac{2dt}{1-t}$$

$$I_1 = -2\ln|1-t| = -2\ln\left|1-\sqrt{u-1}\right|$$

نعوض بـــ I_1 في المعادلة $(*)$ فنحصل على :-

$$\ln|cx| = -\frac{1}{2}\left(-2\ln\left|1-\sqrt{u-1}\right|\right)$$

$$\ln|cx| = \ln\left|1-\sqrt{u-1}\right|$$

$$cx = 1 - \sqrt{u-1} \quad \Rightarrow \sqrt{u-1} = 1 - cx$$

$$u - 1 = (1-cx)^2 \longrightarrow (**)$$

$$u = (1-cx)^2 + 1$$

نرجع u الى اصلها $u = \frac{y}{x}$ فنحصل على :-

$$\frac{y}{x} = (1-cx)^2 + 1$$

$$y = x[\,1 + (1-cx)^2] \quad \longleftarrow\longleftarrow \text{ الحـــــــل العام}$$

ولإيجاد المنحنى التكاملي المار بالنقطة $m(1,1)$ نعوض في الحل العام عن كل من $x = 1 \;\&\; y = 1$ فنحصل على :-

$$1 = [1 + (1-c)^2] \Rightarrow 1 - c = 0 \Rightarrow c = 1$$

نعوض عن $c = 1$ في الحل العام لنحصل على المنحنى التكاملي γ المار بالنقطة $m(1,1)$:-

$$\gamma = \{\,(x,y) : y = x[1 + (1-x)^2]\,\}$$

ولإيجاد بقية المنحنيات التكاملية المارة بالنقطة $m(1,1)$ (إن وجدت) نوجد (إن وجدت) الحلول الشاذة للمعادلة التفاضلية وذلك بدراسة الحالة :-

$$\sqrt{u-1} + 1 - u = 0 \Rightarrow \sqrt{u-1} = u - 1$$

$\Rightarrow u - 1 = u^2 - 2u + 1$

$\Rightarrow u^2 - 3u + 2 = 0 \Rightarrow (u-1)(u-2) = 0$

أولاً / ندرس الحالة $u = 1$

نعوض عن $u = 1$ *في الحل* $(**)$ *للمعادلة التفاضلية فنحصل على :-*

$0 = (1 - cx)^2 \Rightarrow 1 - cx = 0 \Rightarrow cx = 1 \Rightarrow$

$c = \frac{1}{x}$

وهنا الثابت c *دالة في* x *وعلية فأن هذا الحل يعتبر حلاً شاذاً للمعادلة التفاضلية*

$u = 1 \Rightarrow \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow y = x$

$y = x$ $\longleftarrow\longleftarrow$ حـــــل شاذ

ونلاحظ ان هذا المنحنى يمر بالنقطة $m(1,1)$

ثانياً / ندرس الحالة $u = 2$

نعوض عن $u = 2$ *في الحل* $(**)$ *للمعادلة التفاضلية :-*

$1 = (1 - cx)^2 \Rightarrow 1 - cx = 1 \Rightarrow cx = 0$

$\Rightarrow c = 0$

وعلية فان الحل $u = 2$ *يعتبر حل خاص للمعادلة التفاضلية نحصل علية عندما* $c = 0$ *أي أن*

$\frac{y}{x} = 2 \Rightarrow y = 2x$ حل خاص

وعلية يوجد لدينا منحنيان تكامليان للمعادلة التفاضلية $x\,y' = 3y - 2x - 2\sqrt{x\,y - x^2}$ **يمران بالنقطة** $m(1,1)$ **هما :-**

$\gamma = \{\, (x,y) : y = x[1 + (1 - x^2)] \,\}$

$\beta = \{\, (x,y) \quad : \quad y = x \,\}$

وعلية فإن النقطة $m(1,1)$ **نقطة شاذة لأنها واقعة على اكثر من منحنى (واقعة على منحنيان هما** β و γ **)**

########## اللهم يسر لي امري .... ##########

رابعاً :- تمارين [٢ - ٣]

١) حل المعادلة التفاضلية :-

$$(2x-y+1)dx-(x-2y+1)dy=0$$

الحـــــــل :-

نبين ان المعادلة خطية

أولا :- نبسط المعادلة التفاضلية لتصبح بالصورة :-

$$(2x-y+1)dx+(-x+2y-1)dy=0$$

$$\begin{cases} l_1 : 2x-y+1=0 & \rightarrow (1) \\ l_2 : -x+2y-1=0 & \rightarrow (2) \end{cases}$$

نلاحظ :-

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3\neq 0$$

إذن المستقيمان L_1 , L_2 متقاطعان في النقطة (h,k) ولإيجادها نقوم بحل المعادلتين (1) ,(2) فنجد أن :-

$$h=x_0=-\frac{1}{3} \quad \& \quad k=y_0=\frac{1}{3}$$

وعلية فإن نقطة التقاطع بين المستقيمان L_1 , L_2 هي :- $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ لذلك نستخدم التعويض التالي

$$x=u+h=u-\frac{1}{3}\Rightarrow dx=du$$

$$y=v+k=v+\frac{1}{3}\Rightarrow dy=dv$$

نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على :-

$$\left(2u-\frac{2}{3}-v-\frac{1}{3}+1\right)du+\left(\frac{1}{3}-u+2v+\frac{2}{3}-1\right)dv=0$$

$$\Rightarrow (2u-v)du+(2v-u)dv=0\rightarrow(*)$$

وهذه المعادلة التفاضلية متجانسة بقوة $m=1$ ولذلك نستخدم التعويض $z=\frac{v}{u}\Rightarrow v=uz$

$$\Rightarrow dv=u\,dz+z\,du$$

نعوض في المعادلة التفاضلية $(*)$ فنحصل على :-

$$(2u-uz)du+(2uz-u)(u\,dz+z\,du)=0$$

$$u(2-z)du+u(2z-1)(u\,dz+z\,du)=0$$

$$\Rightarrow [2-2z+2z^2]du+[u(2z-1)]dz=0$$

$$\frac{2z-1}{2z^2-2Z+2}dz+\frac{1}{u}du=0 \quad \boxed{\text{بشرط } 2z^2-2Z+2\neq 0}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2z-1}{z^2-Z+1}\right)dz=-\frac{du}{u}$$

$$\int\frac{2z-1}{z^2-Z+1}dz=\int-\frac{2du}{u}$$

$$ln|z^2-Z+1|=-2\,ln\,|u|+ln\,|c|$$

$$ln|z^2-Z+1|=-\,ln\,|u^2|+ln\,|c|$$

$$ln|z^2-Z+1|=\,ln\left|\frac{c}{u^2}\right|$$

$$z^2-Z+1=\frac{c}{u^2}\longrightarrow(**)$$

$$u^2z^2-u^2z+u^2=c$$

نعوض عن $z=\frac{v}{u}$ فنحصل على :-

$$u^2\left(\frac{v^2}{u^2}\right)-u^2\left(\frac{v}{u}\right)+u^2=c$$

$$v^2-u\,v+u^2=c$$

نعوض عن $u=x+\frac{1}{3}$, $v=y-\frac{1}{3}$ *فيكون لدين*

$$\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-xy+x-y+\frac{1}{3}=c$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-xy+x-y=m\,,\quad c-\frac{1}{3}=m$$

$$x^2+y^2-xy+x-y=m \longleftarrow \text{التكـــــامل العام}$$

$$y^2-(x+1)y+(x^2+x-m)=0$$

$$y=\frac{(x+1)\pm\sqrt{(x+1)^2-4(x^2+x-m)}}{2} \longleftarrow \text{الحـــــل العام}$$

وللبحث عن الحلول الشاذة ندرس الحالة

$$2z^2-2Z+2=0\Rightarrow z^2-z+1=0$$

نلاحظ أن هذا الحل هو حل خاص لأننا نحصل علية عند التعويض عن $c=0$ في الحل $(**)$

وعلية لا توجد حلول شاذة للمعادلة التفاضلية المعطاة .

٢) أوجد التكامل العام وابحث عن الحلول الشاذة (إن وجدت) للمعادلة التفاضلية :-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y-4}{2x+y-5}$$

الحــــــــــــل :-

نبين ان المعادلة خطية

$$(x+2y-4)dx-(2x+y-5)dy=0$$
$$(x+2y-4)dx+(-2x-y+5)dy=0$$
$$\begin{cases} l_1: x+2y-4=0 & \longrightarrow (1)\\ l_2: -2x-y+5=0 & \longrightarrow (2)\end{cases}$$

نلاحظ :-

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{vmatrix}=3\neq 0$$

اذن المستقيمان $L_1\,,L_2$ متقاطعان في النقطة (h,k) ولإيجادها نقوم بحل نظام المعادلتين $(1),(2)$ فنجد أن :-

$$h=x_0=2 \quad \& \quad k=y_0=1$$

وعلية فإن نقطة التقاطع بين المستقيمان $L_1\,,L_2$ هي :- $(2,1)$ لذلك نستخدم التعويض التالي :-

$$x=u+h=u+2 \Longrightarrow dx=du$$
$$y=v+k=v+1 \Longrightarrow dy=dv$$

نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على :-

$$(u+2+2v+2-4)du+(-2u-4-v-1+5)dv=0$$
$$\Longrightarrow (u+2v)du-(2u+v)dv=0 \longrightarrow (*)$$

وهذه المعادلة التفاضلية متجانسة بقوة $m=1$:-

لذلك نستخدم التعويض $z=\frac{v}{u} \Longrightarrow v=uz$

$$v=uz \Longrightarrow dv=u\,dz+z\,du$$

نعوض في المعادلة التفاضلية $(*)$ فنحصل على

$$(u+2uz)du-(2u+uz)(u\,dz+z\,du)=0$$
$$\Rightarrow u(1+2z)du-u(2+z)(u\,dz+z\,du)=0$$
$$\Rightarrow (1+2z)du-u(2+z)dz-(2z+z^2)du=0$$
$$\Rightarrow (1+2z-2z-z^2)du=u(2+z)dz$$
$$\Rightarrow [1-z^2]du=u[2+z]dz$$
$$\Rightarrow \frac{2+z}{1-Z^2}dz=\frac{1}{u}du \qquad \boxed{\text{بشرط } 1-z^2\neq 0}$$

$$\int\frac{2+z}{1-Z^2}dz=\int\frac{du}{u}$$
$$\int\frac{2+z}{1-Z^2}dz=\ln|u|+k$$
$$I_1=\ln|u|+k \qquad \longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow (*)$$

نحسب التكامل $I_1=\int\frac{2+z}{z^2-1}dz$ باستخدام الكسور الجزئية

$$let\ \frac{2+Z}{1-Z^2}=\frac{2+z}{(1+z)(1-z)}=\frac{A}{1+Z}+\frac{B}{1-Z}$$
$$\Longrightarrow 2+z=A(1-z)+B(1+z)$$

نضع $z=-1$ فنحصل على :- $1=2A \Longrightarrow A=\frac{1}{2}$

نضع $z=1$ فنحصل على :- $3=2B \Longrightarrow B=\frac{3}{2}$

$$\therefore I_1=\int\frac{\frac{1}{2}}{1+z}dz+\int\frac{\frac{3}{2}}{1-z}dz$$
$$I_1=\frac{1}{2}\ln|1+z|-\frac{3}{2}\ln|1-z|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{(1-z)^3}\right|$$

نعوض بـ I_1 في المعادلة $(*)$ فنحصل على :-

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{(1-z)^3}\right|=\ln|u|+k$$
$$\ln\left|\frac{1+z}{(1-z)^3}\right|=2\ln|u|+2k$$
$$\ln\left|\frac{1+z}{(1-z)^3}\right|=\ln|u^2|-\ln|c|\ ,\ 2k=-\ln|c|$$
$$\ln\left|\frac{1+z}{(1-z)^3}\right|=\ln\left|\frac{u^2}{c}\right|$$
$$\frac{1+z}{(1-z)^3}=\frac{u^2}{c}$$
$$(1+z)c=u^2(1-z)^3 \longrightarrow (\#)$$
$$or\quad u^2(1-z)^3\,c_1=(1+z) \longrightarrow (\#\#)$$
$$,\ \frac{1}{c}=c_1$$

نعوض عن $z=\frac{v}{u}$ فنحصل على :-

$$\left(1+\frac{v}{u}\right)c=u^2\left(1-\frac{v}{u}\right)^3$$
$$\Longrightarrow (u+v)c=(u-v)^3$$
$$\Longrightarrow (u-v)^3=(u+v)\,c$$

نعوض عن $u=x-2\ ,\quad v=y-1$ فيكون لدينا

$$(x-2-y+1)^3=(x-2+y-1)c$$

التكامل العام $\longleftarrow \quad (x-y-1)^3 = (x+y-3)c$

الان نبحث عن الحلول الشاذة بدراسة الشرط

$$1 - z^2 = 0 \Rightarrow z = \pm 1$$

اولاً / عندما $z = 1$

نلاحظ ان هذا الحل يعتبر حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية لأننا نحصل علية عند التعويض عن $c = 0$ في الحل (#) للمعادلة التفاضلية المعطاة .

ثانياً / عندما $z = -1$

نلاحظ أن هذا الحل يعتبر حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية لأننا نحصل علية عند التعويض عن $c_1 = 0$ في الحل (##) للمعادلة التفاضلية المعطاة .

وعلية لا توجد حلول شاذة للمعادلة التفاضلية **المعطاة.**

استراحة

استنتج بعض الطلاب الفاشلين أنه لا فائدة من الدراسة .. فالرسوب هو المصير ، وقدم إثباتاً رياضياً على ذلك..

والإثبات هو ....

الدراســـة = عدم الرسوب $\longleftarrow$ (1)

عدم الدراسة = الرسوب $\longleftarrow$ (2)

بجمع المعادلة(1) مع المعادلة (2) نحصل على :-

الدراســـة + عدم الدراسة = الرسوب + عدم الرسوب

بأخذ عامل مشترك (الدراسة) للطرف الأيمن و (الرسوب) للطرف الأيسر نحصل على :-

الدراسة (١+عدم) = الرسوب (١+عدم)

بالقسمة على المقدار (ا+عدم)نحصل على :-

الدراسة = الرسوب !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

- **- رياضي مجنون ركب باصاً .. فصاح بالناس مهدداً : " سوف أكاملكم .. سوف أشتقكم لم يفهم الناس ما يقصد فخافوا وهربوا جميعاً .. ما عدا شخص واحد بقي .. جاءه المجنون .. ألم تخف .. قال لا .. قال له لماذا قال : أنا الدالة e^x فلا تأثر علي.......**

رابعاً :- تمارين [٢-٤]

١) حل المعادلة التفاضلية :-

$$\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\frac{e^y}{1+x^2}dy=0$$

وأوجد المنحنى التكاملي للمعادلة التفاضلية المار بالنقطة $A(2,ln2)$

الحـــــل :-

من المعادلة التفاضلية المعطاة لدينا

$$M(x,y)=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} \quad , \quad N(x,y)=\frac{e^y}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{-2x\,e^y(1+x^2)^2}{(1+x^2)^4}=\frac{-2x\,e^y}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}$$

$$\because \frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}$$

$\therefore$ المعادلة التفاضلية تامة.

وعلية فإن حلها متمثل بــ $u=c$ حيث

$$u=\int M(x,y)\,dx+\varphi(y)$$

$$\Rightarrow u=\int\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\varphi(y)$$

$$\Rightarrow u=\int\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx-\int\frac{2x\,e^y}{(1+x^2)^2}dx+\varphi(y)$$

$$u=\int 2x(1+x^2)^{-2}dx-e^y\int 2x(1+x^2)^{-2}dx+\varphi(y)$$

$$\Rightarrow u=-\frac{1}{1+x^2}-e^y\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)+\varphi(y)$$

$$\Rightarrow u=-\frac{1}{1+x^2}+\frac{e^y}{1+x^2}+\varphi(y)$$

$$\Rightarrow u=\frac{e^y-1}{1+x^2}+\varphi(y)$$

الان نبحث عن $\varphi(y)$ كالتالي

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{e^y}{1+x^2}+\varphi^/(y)$$

$$N\equiv\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{e^y}{1+x^2}+\varphi^/(y)$$

$$\Rightarrow\frac{e^y}{1+x^2}\equiv\frac{e^y}{1+x^2}+\varphi^/(y)$$

$$\Rightarrow\varphi^/(y)=0$$

$$\Rightarrow\varphi(y)=0$$

$$\therefore u=\frac{e^y-1}{1+x^2}+0=c$$

$\frac{e^y-1}{1+x^2}=c \quad \longleftarrow\longleftarrow$ التكـــــــــامل العام

الأن نحاول ايجاد صيغة للحل العام

$$e^y-1=c(1+x^2)\Rightarrow e^y=c(1+x^2)+1$$

$y=ln\,|c(1+x^2)+1| \quad \longleftarrow\longleftarrow$ الحــــــل العام

ولإيجاد المنحنى التكاملي للمعادلة التفاضلية المارة بالنقطة $A(2,ln2)$ نعوض في التكامل العام عن كل من $x=2 \quad , \quad y=ln\,2$ فنحصل على

$$\frac{e^{ln2}-1}{1+4}=c\Rightarrow c=\frac{1}{5}$$

نعوض في الحل العام عن $c=\frac{1}{5}$ لنحصل على المنحنى التكاملي المارة بالنقطة $A(2,ln2)$

$$\gamma=\left\{(x,y)\ :\ y=ln\left|\frac{1+x^2}{5}+1\right|\right\}$$

٢) اوجد التكامل العام التفاضلية :-

$$\left[\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx+\left[-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy=0$$

الحـــــل :-

من المعادلة التفاضلية المعطاة لدينا

$$\because\ M(x,y)=\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2} \quad ,$$

$$N(x,y)=-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x-y)^3}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-2xy}{(x-y)^2}$$

$$\because \frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}$$

$\therefore$ المعادلة التفاضلية تامة.

وعلية فإن حلها متمثل بــ $u=c$ حيث

$$u=\int M(x,y)\,dx+\varphi(y)$$

$$\Rightarrow u=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx+\varphi(y)$$

$$\Longrightarrow u=\int \frac{1}{x}dx-y^2\int (x-y)^{-2}dx+\varphi(y)$$

$$\Longrightarrow u=\ln|x|+\frac{y^2}{x-y}+\varphi(y)$$

الأن نبحث عن $\varphi(y)$ **كالتالي :**

$$\because N\equiv\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y(x-y)+y^2}{(x-y)^2}+\varphi^{/}(y)$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{y}+\frac{x^2}{(x-y)^2}=\frac{2y}{x-y}+\frac{y^2}{(x-y)^2}+\varphi^{/}(y)$$

$$\Longrightarrow \varphi^{/}(y)=-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{2y}{x-y}-\frac{y^2}{(x-y)^2}$$

$$\Longrightarrow \varphi^{/}(y)=-\frac{1}{y}+\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}-\frac{2y}{x-y}$$

$$\Longrightarrow \varphi^{/}(y)=-\frac{1}{y}+\frac{x+y}{x-y}-\frac{2y}{x-y}$$

$$\Longrightarrow \varphi^{/}(y)=-\frac{1}{y}+\frac{x+y-2y}{x-y}$$

$$\Longrightarrow \varphi^{/}(y)=-\frac{1}{y}+\frac{x-y}{x-y}$$

$$\Longrightarrow \varphi^{/}(y)=-\frac{1}{y}+1$$

$$\therefore\ \varphi(y)=-\ln|y|+y$$

$$u=\ln|x|+\frac{y^2}{x-y}-\ln|y|+y$$

$$\Longrightarrow u=\ln\left|\frac{x}{y}\right|+\frac{xy}{x-y}=c$$

اذن التكامل العام هو للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$\ln\left|\frac{x}{y}\right|+\frac{xy}{x-y}=c$ $\longleftarrow\longleftarrow$ التكامــــــــل العام

رابعاً :- تمار يـــــن [٢ - ٥]

١) أوجد التكامل العام للمعادلة التفاضلية :-

$$(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$$

الحـــــــل :-

من المعادلة التفاضلية المعطاة لدينا

$$M = 2xy^2 - y \quad , \quad N = y^2 + x + y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

ونلاحظ ان $\frac{\partial M}{\partial y} \not\equiv \frac{\partial N}{\partial x}$

وعلية فإن المعادلة التفاضلية أعلاه ليست تامة ولحلها

نبحث عن عامل تكاملي الذي يجعلها تامة بالطريقة التالية :

$$\because \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy - 2 = 2(2xy - 1)$$

$$\because \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{2(2xy-1)}{-y(2xy-1)} = -\frac{2}{y}$$

اذن العامل التكاملي هو

$$v = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2ln|y|} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

وعلية فإن المعادلة التفاضلية تصبح بالصورة

$$\frac{1}{y^2}(2xy^2 - y)dx + \frac{1}{y^2}(y^2 + x + y)dy = 0$$

$$\left(2x - \frac{1}{y}\right)dx + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

وهذه المعادلة التفاضلية تامة وتكاملها العام متمثل بـــ $u = c$

$$u = \int \left(2x - \frac{1}{y}\right)dx + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow u = x^2 - \frac{x}{y} + \varphi(y)$$

الأن نبحث عن $\varphi(y)$ كالتالي :

$$\because N \equiv \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y^2} + \varphi^/(y)$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} \equiv \frac{x}{y^2} + \varphi^/(y)$$

$$\Rightarrow \varphi^/(y) = 1 + \frac{1}{y}$$

$$\therefore \varphi(y) = y + ln|y|$$

عندئــــذ

$$u = x^2 - \frac{x}{y} + y + ln|y|$$

$$x^2 - \frac{x}{y} + y + ln|y| = c \quad \longleftarrow\longleftarrow \text{ التكامل العام}$$

٢) حل المعادلة التفاضلية :-

$$(x\cos y - y\sin y)y^/ + (x\sin y + y\cos y) = 0$$

الحـــــــل :-

نبسط المعادلة التفاضلية لتصبح بالصورة :-

$$(x\sin y + y\cos y)dx$$
$$+(x\cos y - y\sin y)dy = 0$$

$$\begin{cases} M = x\sin y + y\cos y \\ N = x\cos y - y\sin y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = x\cos y + \cos y - y\sin y \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \cos y \end{cases}$$

ونلاحظ ان $\frac{\partial M}{\partial y} \not\equiv \frac{\partial N}{\partial x}$

وعلية فإن المعادلة التفاضلية أعلاه ليست تامة ولحلها

نبحث عن العامل التكاملي الذي يجعلها تامة بالطريقة التالية

$$v = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}$$

$$\because \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x\cos y - y\sin y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{x\cos y - y\sin y}{x\cos y - y\sin y} = 1$$

اذن العامل التكاملي هو :-

$$v = e^{\int dx} = e^x$$

وعلية فإن المعادلة التفاضلية تصبح بالصورة

$$e^x(x\cos y - y\sin y)dy$$
$$+e^x(x\sin y + y\cos y)dx = 0$$

$$(x e^x \sin y + y e^x \cos y)dx$$
$$+(x e^x \cos y - y e^x \sin y)dy = 0$$

وهذه المعادلة التفاضلية تامة حلها متمثل بـــ $u = c$

حيـــث

$$u = \int (x\,e^x \cos y - y\,e^x \sin y)dy + \psi(x)$$
$$\Rightarrow u = e^x[\int (x \cos y - y \sin y)dy] + \psi(x)$$
$$\Rightarrow u = e^x[x \sin y + y \cos y - \sin y] + \psi(x)$$
$$\Rightarrow u = x\,e^x \sin y + y\,e^x \cos y - e^x \sin y + \psi(x)$$
$$\because M = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y + x\,e^x \sin y + y\,e^x \cos y - e^x \sin y + \psi'(x)$$
$$\Rightarrow x\,e^x \sin y + y\,e^x \cos y \equiv x\,e^x \sin y + y\,e^x \cos y + \psi'(x)$$
$$\psi'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \psi(x) = 0$$
عندئذ $u = x\,e^x \sin y + y\,e^x \cos y - e^x \sin y$

$$x\,e^x \sin y + y\,e^x \cos y - e^x \sin y = c$$

---

٣) للمعادلة التفاضلية

$$x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0$$

أ) أوجد العامل التكاملي $v(\omega)$ حيث $\omega = x\,y$

ب) أوجد التكامل العام وبين لماذا لا توجد حلول منفردة .

الحـــــــــل :-

نجعل المعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة

$$(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0$$

وفيها

$$M = x^2y^3 + y \quad \& \quad N = x^3y^2 - x$$
$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2 + 1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y^2 - 1$$

ونلاحظ ان $\frac{\partial M}{\partial y} \not\equiv \frac{\partial N}{\partial x}$

وعلية فإن المعادلة التفاضلية أعلاه ليست تامة

أ) نبحث عن العامل التكاملي $v = v(\omega)$ حيث $\omega = xy$

$$v(\omega) = e^{\int F(\omega)\,d\omega} \quad , \quad F(\omega) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}}$$
$$\omega = xy \;\Rightarrow\; \frac{\partial \omega}{\partial y} = x \;,\; \frac{\partial \omega}{\partial x} = y$$
$$\because \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{2}{(x^3y^2 - x)y - (x^2y^3 + y)x}$$
$$\Rightarrow F(\omega) = \frac{2}{(x^3y^2 - x)y - (x^2y^3 + y)x}$$
$$F(\omega) = \frac{2}{x^3y^3 - xy - x^3y^3 - xy}$$
$$F(\omega) = \frac{2}{-2xy} = -\frac{1}{xy}$$
$$\Rightarrow F(\omega) = -\frac{1}{\omega} \qquad \boxed{\text{بشرط } \omega \neq 0}$$

وعلية فإن العامل التكاملي هو

$$v = e^{\int -\frac{1}{\omega}d\omega} = e^{-ln|\omega|} = \omega^{-1} = \frac{1}{\omega}$$
$$v = \frac{1}{xy} \quad , \quad \boxed{\text{بشرط } xy \neq 0}$$

ب) المعادلة التفاضلية تصبح بالصورة

$$\frac{1}{xy}(x^2y^3 + y)dx + \frac{1}{xy}(x^3y^2 - x)dy = 0$$
$$\left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x^2y - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

وهي معادلة تفاضلية تامة تكاملها العام يكون بالصورة $u = k$ حيث

$$u = \int \left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \varphi(y)$$
$$\Rightarrow u = \frac{x^2y^2}{2} + ln|x| + \varphi(y)$$

الأن نبحث عن $\varphi(y)$ كالتالي

$$\because N \equiv \frac{\partial u}{\partial y} = x^2y + \varphi'(y)$$
$$\Rightarrow x^2y - \frac{1}{y} \equiv x^2y + \varphi'(y)$$
$$\Rightarrow \varphi'(y) = -\frac{1}{y}$$
$$\Rightarrow \varphi(y) = -ln|y|$$
$$u = \frac{x^2y^2}{2} + ln|x| - ln|y|$$

وعلية فان التكامل العام

$$\frac{x^2y^2}{2} + ln|x| - ln|y| = k$$
$$ln|y| - ln|x| = \frac{x^2y^2}{2} - k$$
$$ln\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{x^2y^2}{2} - k$$
$$\frac{y}{x} = e^{-k}\,e^{\frac{x^2y^2}{2}}$$
$$\frac{y}{x} = c\,e^{\frac{x^2y^2}{2}} \quad , \quad \text{حيث } e^{-k} = c$$
$$y = cx\,e^{\frac{x^2y^2}{2}} \quad \longleftarrow\longleftarrow \quad \text{التكـــــــــامل العام}$$

خامساً :- تماريــــــن [٣ - ١]

١) أوجد التكامل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$x\, {y'}^{3} = 1 + y'$$

الحـــــــــل :-

نلاحظ أن هذه المعادلة التفاضلية ليست محلولة بالنسبة لـ y' أي اننا لا نستطيع بالطرق الجبرية المتاحة أن نجد y' بدلالة y, x
وأيضا نلاحظ أن هذه المعادلة التفاضلية لا تحتوي صراحة المتغير y لذلك نفرض أن

$$y' = t = h(t) \Rightarrow x = \frac{1+t}{t^3} = \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2} = g(t)$$

عندئذٍ نحصل على

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2} = g(t) \\ y' = t = h(t) \end{cases}$$

$$\because\ g'(t) = -\frac{3}{t^4} - \frac{2}{t^3}$$

$$\because y = \int h(t)\ g'(t) dt + c$$

$$\Rightarrow y = \int \left[-\frac{3}{t^3} - \frac{2}{t^2}\right] dt + c$$

$$\Rightarrow y = \int [-3t^{-3} - 2t^{-2}] dt + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t} + c$$

الصيغة البارامترية لمنظومة الحل هي

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2} \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t} + c \end{cases}$$

٢) حل المعادلة التفاضلية

$${y'}^{3} - y^2 + y^2 y' = 0$$

الحـــــــــل :-

نلأحظ ان هذه المعادلة التفاضلية ليست محلولة بالنسبة لـ y' أي اننا لا نستطيع بالطرق الجبرية المتاحة أن نجد y' بدلالة y, x
وأيضا نلاحظ أن هذه المعادلة التفاضلية لا تحتوي صراحة المتغير x لذلك نفرض أن

$$y = t\, h(t) \Rightarrow y' = h(t)$$

$$\begin{cases} y = t\, h(t) = g(t) \\ y' = h(t) \end{cases}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية عن

$$y' = h(t) \quad , \quad y = t\, h(t)$$

فنحصل على

$$h^3(t) - t^2 h^2(t) + t^2 h^2(t)\, h(t) = 0$$

$$h^2(t)[\, h(t) - t^2 + t^2\, h(t)] = 0$$

$$\because h(t) \neq 0$$

$$\therefore h(t) - t^2 + t^2\, h(t) = 0$$

$$\Rightarrow h(t) + t^2\, h(t) = t^2$$

$$\Rightarrow h(t)[1 + t^2] = t^2$$

وعلية يكون لدينا

$$\therefore h(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\begin{cases} y = \frac{t^3}{1+t^2} = g(t) \\ y' = \frac{t^2}{1+t^2} = h(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g'(t) = \frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2} \\ h(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\because x = \int \frac{g'(t)}{h(t)} dt + c$$

$$\Rightarrow x = \int \frac{\frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}} dt + c$$

$$\Rightarrow x = \int \frac{3+t^2}{1+t^2} dt + c$$

$$\Rightarrow x = \int \frac{2+(1+t^2)}{1+t^2} dt + c = \int \frac{2}{1+t^2} dt + \int \frac{1+t^2}{1+t^2} dt$$

$$\Rightarrow x = \int \frac{2dt}{1+t^2} + \int dt + c$$

$$\Rightarrow x = 2\tan^{-1} t + t + c$$

$$\begin{cases} y = \frac{t^3}{1+t^2} \\ x = 2\tan^{-1} t + t + c \end{cases}$$

٣) ل المعادلة التفاضلية $y = x y' - \sqrt{1 + y'^2}$

الحـــــــل :-

نلاحظ أن هذه المعادلة التفاضلية ليست محلولة بالنسبة لـ y' أي اننا لا نستطيع بالطرق الجبرية المتاحة أن نجد y' بدلالة y, x وهي معادلة(كليرو) فيها

$$f(y') = -\sqrt{1 + y'^2}$$

لذلك نفرض ان

$$y' = p \Rightarrow f(p) = -\sqrt{1 + p^2}$$

$y = cx - \sqrt{1 + c^2}$ دوال خطية وهي حلول لمعادلة كليرو وهي عبارة عن عائلة خطوط مستقيمة

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = f(p) - p * f'(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ y = -\sqrt{1 + p^2} + \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ y = \frac{-(1+p^2)+p^2}{\sqrt{1+p^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ y = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2}} \end{cases}$$

وهذه هي الصيغة البارامترية لحلول اخرى لمعادلة كليرو

وهنا يمكننا أن نجد y بدلالة x بحذف p

$$x^2 = \frac{p^2}{1+p^2} \ , \ y^2 = \frac{1}{1+p^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{p^2}{1+p^2} + \frac{1}{1+p^2} = 1$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$$

وهذه حلول منفردة لمعادلة كليرو $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$

٤) حل المعادلة التفاضلية :-

$$y = x(1 + y') + y'^3$$

الحـــــــل :-

نلاحظ أن هذه المعادلة التفاضلية هي معادلة لاجرانج فيها

لذلك نضع $g(y') = 1 + y' \ , \ f(y') = y'^3$

$$p = p(x) \ , \ y' = p$$

$$\therefore g(p) = 1 + p \ , \quad f(p) = p^3$$

فيكون لدينا

$$y = x(1 + p) + p^3$$

$$\Rightarrow y' = 1 + p + x\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx} = p$$

$$\Rightarrow p = 1 + p + x\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow 1 + x\frac{dp}{dx} = -3p^2\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dx}{dp} + x = -3p^2$$

وهذه المعادلة خطية حلها العام هو :-

$$x = e^{-\int dp}[c + \int -3p^2 e^{\int dp}\, dp]$$

$$x = e^{-p}[c - 3\int p^2 e^p\, dp]$$

$$x = e^{-p}[c - 3I_1]$$

نحسب التكامل $I_1 = \int p^2 e^p\, dp$ بالطريقة التجزئية:-

$$let \quad u = p^2 \quad , \quad dv = e^p dp$$

$$du = 2p\, dp \ , \quad v = e^p$$

$$\therefore I_1 = p^2 e^p - 2\int p\, e^p dp$$

$$\Rightarrow I_1 = p^2 e^p - 2p\, e^p + 2e^p$$

$$\therefore \ x = e^{-p}[c - 3(p^2 e^p - 2p\, e^p + 2e^p)]$$

$$x = e^{-p}[c - 3p^2 e^p + 6p\, e^p - 6e^p]$$

$$x = ce^{-p} - 3p^2 + 6p - 6$$

$$\begin{cases} x = ce^{-p} - 3p^2 + 6p - 6 \\ y = (ce^{-p} - 3p^2 + 6p - 6)(1 + p) + p^3 \end{cases}$$

الحمد لله

سادساً :- تماريـــــن عامة

١. حدد رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية فى كل من :

1) $y''' - 3xy' + y = e^x + 1$

2) $t y'' + t y' + \cos\sqrt{y} = t^2 + 1$

3) $s^2 \frac{d^2 t}{ds^2} - s\frac{dt}{ds} + 3s = 0$

4) $2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^9 + y^3 - x = 0$

٢. أوجد المعادلات التفاضلية التي حلولها العامة تعطى بالتالي :-

1) $y = a x^2 - bx + c$

2) $y = a e^{2x} + b e^x$

3) $y = a \sin 3x + b \cos 3x$

4) $\ln y = ax^2 + bx + c$

5) $y = A e^x + B e^{2x} + c e^{3x}$

6) $y = a e^x + b$

٣. أثبت أن $y(x) = c \sin x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ حيث c ثابت .

٤. أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية ، ثم الحل الخاص اذا اعطي شرط ابتدائي .

1) $(x-1)dy + (y-2)dx = 0$

2) $2x(1+y^2)dx - y(1+2x^2)dy = 0$

3) $y' - 2y = y^2 \quad ; \ y=3 \quad , x=0$

4) $t\frac{dr}{dt} = -2r \quad ; \ r\left(-\frac{1}{3}\right) = 9$

5) $x^3 dy + xydx = x^2 dy + 2ydx \quad ; \ y(2) = e$

6) $3e^x \tan y + (1+e^x)\sec^2 y \ \ y' = 0 \quad ; \ y = \frac{\pi}{4} \ , \quad x = \ell n 2$

7) $y' + 2x\sqrt{1-y^2} = 0$

8) $x^2 e^{x3-y2} + yy' = 0 \quad ; \ y(0) = 0$

9) $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0 \quad ; \ y(0) = 1$

٥. أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية ، ثم الحل الخاص اذا أعطي شرط ابتدائي .

1) $(2x-3y)dx - (2y+3x)\,dy = 0$

2) $ydx + (2x+3y)\,dy = 0$

3) $xy^2 dy - (x^3 + y^3)\,dx = 0$

4) $y' = \frac{4x+3y+2}{3x+2y+1}$

5) $y' = \dfrac{-2x+2y}{y-1}$

6) $y' = \dfrac{3y-7x+2}{7x-3y-3}$

7) $y' = \dfrac{x-y-1}{x-y-5}$

8) $y' = \dfrac{x-3y+2}{3x-9y-12}$

9) $y' = \dfrac{2x+2y+1}{x+y-1}$

10) $\left(x + y\sin\frac{y}{x}\right)dx - x\sin\dfrac{y}{x}\,dy = 0 \quad ; \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

11) $y\left(x^2+xy-2y^2\right)dx + x\left(3y^2-xy-x^2\right)dy = 0$

12) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$

٦ـ أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية ، ثم الحل الخاص اذا أعطي شرط ابتدائي .

1) $\left(3x^2+3xy^2\right)dx - \left(3y^2-2y-3x^2y\right)dy = 0$

2) $\dfrac{y}{x^2}dx - \dfrac{1}{x}dy = 0$

3) $y(x-1)^{-1}\,dx + \left[\ell n(2x-2) + \frac{1}{y}\right]dy = 0$

4) $2\dfrac{x}{y}dy + \left(2\ell n\,5y + \frac{1}{x}\right)dx = 0$

5) $ex^2\left(dy + 2xydx\right) = 3x^2dx$

6) $y^3\sin 2x\,dx - 3y^2\cos^2 x\,dy = 0$

7) $\dfrac{3y^2}{x^2+3x}dx + \left(2y\ell n\frac{5x}{x+3} + 3\sin y\right)dy = 0$

8) $(1-xy)dx - \left(x^2-xy\right)dy = 0$

9) $xdy + \cos y\left(\sin y - 3x^2\cos y\right)dx = 0$

10) $2xydx - \left(3x^2-y^2\right)dy = 0$

11) $(x2+y2+x)\,dx + xydy = 0 \quad ; \quad y(-1) = 1$

12) $4xtdx + \left(4x^2+3t\right) = 0 \quad ; \quad x(1) = 0$

٧ـ حل المعادلات التفاضلية التالية :

1) $xdx - y^2dy = 0$

2) $y' = y^2x^3$

3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+2}{2y}$

4) $dy = 2t\left(y^2+9\right)dt$

5) $\dfrac{dx}{dt} = x^2-2x+2$

6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{y} \quad ; \quad y(0) = 1$

7) $y' = \dfrac{y+x}{x}$

8) $y' = \dfrac{x^4+2y^4}{xy^3}$

9) $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

10) $\left(x^2+y^2\right)dx - xydy = 0 \quad ; \quad y(1) = -2$

11) $\left(x+\sqrt{xy}\right)dy - ydx = 0$

12) $2xydx + \left(1+x^2\right)dy = 0 \quad ; \quad y(1) = -5$

13) $\left(2y - xe^{xy}\right)dy - \left(2 + ye^{xy}\right)dx = 0$

14) $y^2dt + (2yt+1)dy = 0 \quad ; \quad y(1) = -2$

15) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2x^2(x-1)}{4x^3+6x^2t+2xt^2} \quad ; \quad x(2) = 3$

16) $xy^2dx + x^2y(y+1)dy = 0$

لا تحسبن المجد تمراً انت اكله　　لا تبلغ المجد حتى تلعق الصبر