# جوهر
# المنطق الرياضياتي

من إعداد
الطالب وليد سعدي

2019/2018

# 1. المنطق الرياضياتي

**مقدّمة**

اختلفت التعاريف لهذا الفرع من الرياضيات في مصطلحاتها قديمًا وحديثًا، لاكن ممّا لاشك فيه أنّ للمنطق الرياضياتي دورًا رئيسًا وهامًا في صياغة النتائج الرياضياتيه وإثباتها من قبل الرياضياتيين.

وبالفعل، فلو تأملنا أيّة جملة رياضياتيه مفيدة، للاحظنا أنّه يمكننا نعتها "صحيحة" أو "خاطئة" ولا يمكن أن تكون صحيحة وخاطئة بآن واحد.
كما أنّ نعتها لا يرتبط بأيّ رأيٍ شخصي ولا بأيّ ظرف كان.

وبشكل عام: يعتمد المنطق الرياضياتي على الجمل المفيدة، أي ذات المعنى، التي تكون صحيحة أو تكون خاطئة ولا تكون صحيحة وخاطئة بآن واحد، أي تخضع لما يسمّى بـ "مبدأ الثالث المرفوع" والتي تعرف بـ:

## 1.1 القضايا

تعرّف القضايا بأنّها جمل مفيدة، تذعن لمبدأ الثالث المرفوع (في بنية ما*)، كما أنّ نعتها بالصحة أو الخطأ لا يُتبع لأيِّ رأيٍ شخصي ولا يتعلق بأيّ ظرف كان.

**أمثلة**

1- الجملة "كل عدد حقيقي هو عدد عقدي" قضية صحيحة،
2- الجملة "للمعادلة $x^2 - 2 = 0$ حل في مجموعة الأعداد الناطقة" قضية خاطئة،
3- الجملة "يومٌ جميل" ليست قضية.

هذا وإنّ إعطاء القضية النعت الموافق لها "صحيحة، خاطئة" يحتاج إلى برهان ما لم تكن من: البدهيات، أو الموضوعات، أو المسلّمات.

فالبدهية، أو الموضوعة، أو المسلّمة: هي قضية أولية صحيحة تقبل دون برهان، ومن ثمّ نبرهن على صحة أي قضية ليست أولية استنادًا إلى قضايا أولية أو إلى قضايا تمّ البرهان عليها من قبل. وبالمنطق الرياضياتي نحصد نتائج جديدة.

كما تجدر الإشارة إلى أننا نرمز عادة للقضايا بأحرف مثل p، q، r،...، كما نرمز لمجموعة القضايا كلِّها بالرمز P.

* سنتطرق لهذا المفهوم في الفصل الثالث من الجزء الأول لهذا الكتاب.

ومن ثمّ إذا كانت p قضية ما من P، فإنّ p إمّا تكون صحيحة، وإمّا تكون خاطئة، فإذا كانت p صحيحة فإننا نقابلها بالرّقم 1، أمّا إذا كانت خاطئة فإننا نقابلها بالرّقم 0. حيث ندعو الرّقم 1 (أو الرّقم 0 ) الذي يقابل القضية p **قيمة الحقيقة** للقضية p.

## 2.1 جداول الحقيقة

لتكن p قضية ما من P، نسمّي الجدول التالي:

| p |
|---|
| 1 |
| 0 |

جدول الحقيقة للقضية p.

ونلاحظ أنّه مؤلف من عمود وسطرين، وعدد الإمكانات لقيم الحقيقة لقضية ما p يساوي 2.

ونعرّف بصورة مشابهة جدول الحقيقة لقضيتين ما p و q من P كالتالي:

| p | q |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |
| 0 | 0 |

ونلاحظ أنّ هذا الأخير يتألف من عمودين وأربعة أسطر، وعدد الإمكانات لقيم الحقيقة لقضيتين يساوي $2^2$.

كما نعرّف أيضًا جدول الحقيقة لثلاث قضايا p، q وr، بأنّه الجدول الذي يتألف من ثلاثة أعمدة وثمانية أسطر، ليأخذ الشكل الموالي:

| p | q | r |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

وعدد الإمكانات لقيم الحقيقة لثلاث قضايا يساوي $8 = 2^3$.
وبصفة أعم، إذا كانت لدينا n قضية $(1 \leq n)$، فإنّه توجد $2^n$ إمكانًا لقيم الحقيقة لها، وبالتالي فجدول الحقيقة لهذه القضايا يتألف من n عمودًا و $2^n$ سطرًا.

## 3.1 العمليات المنطقية على القضايا

سنكتفي هنا بذكر العمليات الأكثر استعمالاً وتداولاً، وها هي ذي تترا:

### 1) العملية المنطقية $\wedge$ " و"

إذا كانت p وq قضيتين ما من P، فإنّ $p \wedge q$ هي قضية جديدة وتقرأ "p وq"، وهي ناتجة عن تأثير العملية المنطقية $\wedge$ في القضيتين p وq، أي ناتجة عن ربط القضية p بالقضية q بواسطة أداة الربط $\wedge$ ونحصل على جدول الحقيقة لهذه القضية الجديدة $p \wedge q$ بالاستعانة بجدول الحقيقة للقضيتين p وq كما يلي:

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

ونلاحظ من الجدول أنّ القضية $p \wedge q$ " صحيحة" عندما، وفقط عندما، تكون القضيتين p وq "صحيحتين" معًا.

**2) العملية المنطقية $\vee$ " أو"**

لتكن p و q قضيتين من P. إنّ $p \vee q$ هي قضية جديدة وتقرأ "p أو q"، وهي قضية ناتجة عن تأثير العملية المنطقية $\vee$ في القضيتين p و q، أي ناتجة عن ربط القضية p بالقضية q بواسطة أداة الربط $\vee$ ونحصل على جدول الحقيقة لهذه القضية الجديدة $p \vee q$ بالاستعانة بجدول الحقيقة للقضيتين p و q على النحو التالي:

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

ونلاحظ من خلال الجدول أنّه تكون القضية $p \vee q$ "خاطئة" عندما، وفقط عندما، تكون القضيتين p و q "خاطئتين" معًا.

**3) العملية المنطقية $\overline{\ }$ "النافية"**

إذا كانت p قضية ما من P. كانت حينئذ $\bar{p}$ قضية جديدة من P وتقرأ "نفي p" وهي وليدة تأثير العملية المنطقية $\overline{\ }$ في القضية p، ونحصل على قيم الحقيقة لهذه القضية الجديدة بالاستفادة كما سبق من قيم الحقيقة للقضية p على النحو الآتي:

| p | $\bar{p}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

ونلاحظ أنّ قيم الحقيقة لنفي قضية ما يخالف دومًا قيم الحقيقة لتلك القضية.

**4) العملية المنطقية $\rightarrow$ "الشرطيّة أحادية الجانب"**

إذا كانت p و q قضيتين ما من P. فإنّ $p \rightarrow q$ هي قضية جديدة وتقرأ "إذا p فإن q" وهي قضية نابعة من تأثير العملية المنطقية $\rightarrow$ في القضيتين

p وq، ونجد قيم الحقيقة للقضية الجديدة $p \to q$ بالاستفادة كما سبق من جدول الحقيقة للقضيتين p وq كما يلي:

| p | q | $p \to q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

ونلاحظ أنّه تكون القضية $p \to q$ "خاطئة" في حالة وحيدة، وهي لمّا تكون القضية p "صحيحة" والقضية q "خاطئة".

**5) العملية المنطقية $\leftrightarrow$ "الشرطيَّة ثنائية الجانب"**

لتكن p وq قضيتين ما من P. نعرّف من هاتين القضيتين قضية جديدة نرمز لها بـ $p \leftrightarrow q$ وتقرأ "p إذا، وفقط إذا، q" وهي ناتجة من تأثير العملية المنطقية $\leftrightarrow$ في القضيتين p وq، وبالاستعانة بقيم الحقيقة للقضيتين p وq نحصل على جدول الحقيقة لهذه القضية الجديدة كما هو مبين أسفله:

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

ولنا أن نرى أنّه تكون القضية $p \leftrightarrow q$ "صحيحة" عندما، وفقط عندما، تكون للقضيتين p وq نفس قيمة الحقيقة.

ومن خلال استعراض العمليات المنطقية على القضايا نلاحظ أنّ تأثير العمليات المنطقية في القضايا يُنتج قضايا جديدة. ندعو هذه القضايا الجديدة **قضايا مركبة**، وبعبارة أدّق القضية المركبة: هي قضية ناتجة عن تأثير بعض العمليات المنطقية أو كلِّها في قضية ما أو أكثر. ويقال عن قضية إنّها **بسيطة** إذا لم تكن مركبة. كما يقال عن القضايا البسيطة، التي تتركب منها القضية المركبة، إنّها **مركبات** هذه القضية المركبة.

كما لا يفوتنا أن ننبه إلا أننا نسمّي **تفسيرًا** للقضية المركبة $A$ كلّ مجموعة من قيم الحقيقة لمركباتها.

**ملحوظة**

يمكن إيجاد جدول الحقيقة لأيّة قضية مركبة وذلك بالاستفادة من جداول الحقيقة للعمليات المنطقية السابقة. ويتضح ذلك أكثر بإيجاد جدول الحقيقة للقضية التالية: $(p \vee q) \rightarrow p$ والذي نعرضه كالتالي:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $(p \vee q) \rightarrow p$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

نشرف الآن على تعريف قضيتين من نوع خاص ألا وهما:

**القضية البيّنة**

القضية البيّنة، أو الاستدلال، أو ما نعبر عنه عادة تحصيل حاصل: هي قضية صحيحة دومًا، أي أنَّها تأخذ قيمة الحقيقة $1$ فقط. وإذا كانت هذه الأخيرة قضية مركبة فإنّها تأخذ قيمة الحقيقة$1$، لأجل كل تفسير لها (كل تفسير يؤكدها). كما نشير إلى أننا نرمز أحياناً للقضية البيّنة بالرمز $t$.

**القضية المتناقضة**

القضية المتناقضة، أو التناقض اختصارًا: هو نفي القضية البيّنة ونرمز له بالعادة بالرمز $c$.

**أمثلة**

1- القضية $(p \wedge \overline{q}) \rightarrow (p \vee q)$: هي قضية بيّنة. وبالفعل لدينا جدول الحقيقة لهذه القضية مبيَّن كالتالي:

| $p$ | $q$ | $\bar{q}$ | $p \wedge \bar{q}$ | $p \vee q$ | $(p \wedge \bar{q}) \to (p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

2- القضية $(p \wedge q) \wedge \bar{q}$ : هي قضية متناقضة. (تأكد من ذلك).

3- القضية الواردة في الملحوظة السابقة ليست استدلالاً ولا تناقضًا.

### 4.1 التطابق المنطقي للقضايا

لتكن A وB قضيتين مركبتين من قضايا بسيطة p،q،r،....

**تعريف**

نقول عن القضيتين A وB إنهما **متطابقتان** (منطقياً)، ونكتب $A \equiv B$ ، إذا، وفقط إذا، كانت لهما قيم الحقيقة نفسها لأجل كل مجموعة من قيم الحقيقة للقضايا البسيطة p،q،r،...، الداخلة في عبارتيهما.

ومن ثمّ، تكون قضيتان A وB **غير متطابقتين** إذا وجدت مجموعة واحدة على الأقل من قيم الحقيقة للقضايا البسيطة الداخلة في عبارتيهما بحيث لأجلها تكون قيمة الحقيقة للقضية A مختلفة عن قيمة الحقيقة للقضية B.

هذا ويمكن استخدام جدول الحقيقة للبرهان على تطابق قضيتين أو عدمه.

كما يمكن بطبيعة الحال أن تكون $A \equiv B$ على الرغم من وجود بعض القضايا البسيطة التي لا تشترك في تركيب القضيتين A وB معاً.

**مثال**

إنّ القضيتين :

$A = p \vee \bar{q}$ و $B = p \vee (p \wedge r) \vee \bar{q}$ (حيث p وq وr قضايا ما ).

متطابقتان بيد أنّ القضية r تدخل في تركيب القضية B ولكنها لا تدخل في تركيب القضية A، حيث التطابق المنطقي يتجلّى من جدول الحقيقة التالي:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\bar{q}$ | $p \wedge r$ | $p \vee (p \wedge r)$ | $A$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

**توطئة**

لتكن $p$ و $q$ قضيتين ما. عندئذ لدينا المطابقتين الهامتين التاليتان:

1) $(p \to q) \equiv (\bar{p} \vee q)$

2) $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \to q) \wedge (q \to p)]$

**إثبات**

1) نتركه تمرينًا للقارئ،
2) إنّ الزعم واقع كما يوضحه الجدول الراهن:

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $q \to p$ | $p \leftrightarrow q$ | $(p \to q) \wedge (q \to p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**نتيجة**

من أجل كلّ قضية مركبة $A$ فإنّه توجد قضية $B$ تطابق القضية $A$ ومشكلة فقط من الروابط (العمليات) المنطقية $\wedge$ ، $\vee$ ، $^{-}$ . ونعبر عن ذلك بالقول إنّ الجملة $\{\wedge, \vee, ^{-}\}$ **تامة (أو كاملة).**

بل أكثر من ذلك الجملة $\{\wedge, ^{-}\}$ تامة هي الأخرى وتعرف بـ **جملة برانتو** وكذا مثيلتها $\{^{-}, \Rightarrow\}$ المشهورة بـ **جملة فريج**، ويعود الأمر في الأولى لقانون **دي مورقان**، وفي الثانية للمطابقة " $A \vee B \equiv \bar{A} \Rightarrow B$ " اللتان نوردهما لاحقًا.

## 5.1 مبدأ الثنوية

بيَّنا أنّه يمكن استبدال بأيّة قضية مركبة قضية تتطابق معها وتحوي العمليات المنطقية $\wedge$ ، $\vee$ و $^{-}$ فقط. ولهذا يمكن التعبير عن مبدأ الثنوية كما يلي:

**نص المبدأ:**

"إذا كانت $A$ و$B$ قضيتين مركبتين من قضايا بسيطة $p$،$q$،$r$،...، وكانت $A \equiv B$ فإننا نحصل على مطابقة جديدة $C \equiv D$ عندما، نستبدل العملية $\wedge$ بالعملية $\vee$ ونستبدل العملية $\vee$ بالعملية $\wedge$ ونستبدل التناقض $c$ بالاستدلال $t$ والاستدلال $t$ بالتناقض $c$ في طرفيّ المطابقة $A \equiv B$ ".

ونقول عن المطابقة الجديدة $C \equiv D$ إنّها **ثنوية** المطابقة $A \equiv B$ . ونقول في الوقت نفسه، إنّ $A \equiv B$ هي **ثنوية** المطابقة $C \equiv D$ .

## 6.1 جبر القضايا

تتمتع العمليات المنطقية على القضايا بخواص، كما أنّ للقضايا قوانين يمكن تسميتها قوانين جبرية. وسنسرد في المبرهنة الموالية هذه القوانين التي ندعوها:

### قوانين جبر القضايا

**مبرهنة**

لتكن $p$ ،$q$ و $r$ ثلاث قضايا ما، $t$ أيّ الاستدلال، $c$ أيّ تناقض. عندئذ:

1) $$\begin{cases} p \wedge p \equiv p \\ p \vee p \equiv p \end{cases}$$ (قانونا اللانمو)

2) $$\begin{cases} (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \\ (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} p \wedge q \equiv q \wedge p \\ p \vee q \equiv q \vee p \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} p \wedge t \equiv p \\ p \vee c \equiv p \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \vee t \equiv t \\ p \wedge c \equiv c \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} p \wedge \overline{p} \equiv c \\ p \vee \overline{p} \equiv t \end{cases}$$ (قانونا الاتمام)

7) $$\begin{cases} \overline{t} \equiv c \\ \overline{c} \equiv t \end{cases}$$

8) $$\overline{\overline{p}} \equiv p$$ (قانون الارتداد)

9) $$\begin{cases} \overline{(p \wedge q)} \equiv \overline{p} \vee \overline{q} \\ \overline{(p \vee q)} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q} \end{cases}$$ (قانونا دي مورقان)

**الإثبات**

بسيط نتركه تمريناً للقارئ وذلك باستخدام جدول الحقيقة.

**نتائج**

1. كل من العمليتين $\wedge$ و $\vee$ **تبديلية** و **تجميعية**،
2. كل من العمليتين $\wedge$ و $\vee$ تكون **توزيعية** على الأخرى،

3. الاستدلال $t$ هو **الحيادي** بالنسبة للعملية $\wedge$، والتناقض $c$ هو **الحيادي** بالنسبة للعملية $\vee$،
4. الاستدلال $t$ هو **الماص** بالنسبة للعملية $\vee$، والتناقض $c$ هو **الماص** بالنسبة للعملية $\wedge$.

**ملحوظة هامّة**
يمكن البرهان على صحة أيّة مطابقة بإحدى الطرائق التالية:

1. باستخدام جدول الحقيقة،
2. بتطبيق قوانين جبر القضايا،
3. باستخدام مبدأ الثنوية.

## 7.1 بعض تطبيقات المنطق الرياضياتي

### 1) علاقة الاستلزام (أو الاقتضاء) "$\Rightarrow$"

لتكن $p$ و$q$ قضيتين ما من $P$. نقول إنّ "$p$ تستلزم $q$" ونكتب: $p \Rightarrow q$ إذا كانت $q$ صحيحة كلما كانت $p$ صحيحة. وهوما يكافئ قولنا إنّ القضية $p \to q$ استدلال.

- **طرق البرهان على صحة استلزام**

كثيرًا ما نجد مسائل رياضياتيه في صيغة استلزام؛ وهذا ما جعلنا نُري هذا الموضوع شيئًا من الاهتمام لتسليط الضوء عليه ولو بإيجاز.
في الحقيقة إذا كانت القضيتين $p$ و$q$ بسيطتين فإنّ الاستعانة بجدول الحقيقة لإثبات أنّ القضية $p \to q$ تكون استدلالاً سيكون كافيًا، أمّا إذا كان الاستلزام عبارة عن نص رياضياتي، فإنّ فكرة افتراض صحة القضية $p$ والسعي بخطى منطقية لإثبات صحة القضية $q$ (**الطريقة المباشرة**)، قد لا تجدي في ترويض بعض المسائل الرياضياتيه أحيانًا على الرغم من أنّها فكرة سديدة منطقيًا، لذلك نلجأ في مثل هذه الأحوال لإثبات صحة قضية ما تطابق استلزامنا منطقيًا و من بين هذه القضايا نذكر أكثر واحدة استعمالاً ألا وهي: $(p \to q) \equiv (\bar{q} \to \bar{p})$ لننتقل بذلك إلى إثبات صحة الاستلزام $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ الذي قد يلين بالطريقة المباشرة وبه نكون قد أثبتنا استلزامنا الأول $p \Rightarrow q$. هذا وتعرف هذه الطريقة بـ **العكس النقيض (أو نقض الفرض)** وللقارئ أن يتأكد باستعمال جدول الحقيقة مثلاً من صحة تلك المطابقة.

الآن بعد أن بيّنا كيفية إثبات استلزام ومن ثمّ إثبات المسائل المصوغة على شاكلته نأتي الآن إلى ذكر بعض فوائده في إثبات مسائل رياضياتيه ليست في صيغة استلزام عمومًا. ومن أجل ذلك نذكر بالمطابقة (1) من التوطئة والتي مفادها:

$$(p \to q) \equiv (\overline{p} \vee q)$$

ومن ثمّ فإنّ كون $p$ تستلزم $q$ يستدعي كون القضية $\overline{p} \vee q$ استدلالاً. وعليه إذا كانت $q$ قضية متناقضة ومن كون التناقض حيادي بالنسبة للعملية $\vee$ فإنَّ القضية $\overline{p}$ الناتجة من المطابقة $\overline{p} \vee q \equiv \overline{p}$ تكون استدلالاً. وبالتالي تكون القضية $p$ خاطئة؛ أي أنّ "كلَّ قضية تؤدي إلى تناقض خاطئة بالضرورة".

إذن لإثبات صحة قضية ما $p$ يكفينا إثبات أنّه إذا كان نفيها $\overline{p}$ صحيحًا أدى ذلك إلى تناقض؛ أي نفترض أنّ $p$ خاطئة ونناقش منطقيًا لنصل إلى تناقض.

إنّ هذه الطريقة في البرهان مشهورة في الأدب الرياضياتي بـ **البرهان بالخلف** كما أنّها تحتل مكانة مرموقة من طرق البرهان؛ لأنّ لها الفضل في إرجاع صيغ كثير من المسائل في الرياضيات على شكل استلزام.

## 2) علاقة التكافؤ " $\Leftrightarrow$ "

لتكن $p$ و$q$ قضيتين ما. نقول إنّ $p$ تكافئ $q$ (أو العكس ) أو، والأمر سيان، القضيتان $p$ و$q$ متكافئتان، ونكتب: $p \Leftrightarrow q$ إذا كانت $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$.

وعليه يتبين لنا حسب المطابقة (2) من التوطئة أنّ $p \Leftrightarrow q$ يقتضي كون القضية $p \leftrightarrow q$ استدلالاً.

ومن ثمّ للبرهنة على صحة تكافؤ بين قضيتين بسيطتين $p \Leftrightarrow q$، فيكفي إثبات أنّ القضية $p \leftrightarrow q$ تكون استدلالا بالاستعانة بجدول الحقيقة مثلاً، أمّا إذا كانت المبرهنة نصًا رياضياتيًا مصاغًا على شكل تكافؤ فإننا نكتفي بإثبات صحة الاستلزامين $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$.

### ملحوظة هامّة

من تعريفيّ التطابق والتكافؤ المنطقيين يتضح لنا أنّهما يعرّفان نفس المفهوم، ومن ثمّ لا فرق بين هذين المفهومين؛ لذلك نجد أنّ مصطلح التطابق المنطقي غائب في بعض كتب المنطق الرياضياتي؛ لتأديته نفس الدور الذي يلعبه التكافؤ المنطقي كما جاء ذكره.

بعد أن عرّفنا كلاً من الاستلزام والتكافؤ نشرع الآن إلى ذكر بعض النتائج الهامة بخصوصهما.

**نتائج**

1) $\overline{(\bar{p} \vee \bar{q})} \Leftrightarrow (p \wedge q)$،

2) $\overline{(\bar{p} \wedge \bar{q})} \Leftrightarrow (p \vee q)$،

3) $(p \vee q) \Leftarrow (p \wedge \bar{q})$،

4) $\begin{cases} p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \\ p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \end{cases}$،

5) $(\bar{p} \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$،

6) $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p}) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$،

7) $\left[(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)\right] \Leftrightarrow \left[(p \wedge q) \Rightarrow r\right]$،

8) $\left[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)\right] \Leftrightarrow \left[(p \vee q) \Rightarrow r\right]$،

9) $\left[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\right] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$، (الاستلزام رابطٌ منطقيٌ متعدٍ)

10) $(\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$،

11) $\left[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\right] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$،

12) $\left[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)\right] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$. (التكافؤ رابطٌ منطقيٌ متعدٍ)

تعدّ هذه النتائج بالإضافة إلى قوانين جبر القضايا أداةً فعالة لحل الكثير من المسائل الرياضياتية بسهولة، إذ تتيح لمستخدميها القدرة على تفادي البراهين المطولة، وكذا اكتساب بعض طرق التفكير لحل المسائل وترييضها.

ففي النهاية تعد هذه هي الفائدة المرجوّة من المنطق الرياضياتي ككل.

## المراجع

[1] مستوحى من  كتاب مبادئ وأسس في الجبر والتحليل (الجزء الأوّل) لمؤلفه الطالب وليد سعدي.
البريد الإلكتروني:
*saadiw868@gmail.com*