الدائرة

عموميّات:

- الدائرة هي مجموعة النقاط المتساوية المسافة عن نقطة واحدة تدعى مركز الدائرة.
- الدائرة (C) التي مركزها ω ونصف قطرها r هي مجموعة النقاط n من المستوي حيث: $\omega n=r$. نرمز لهذه الدائرة بالرمز $C(\omega,r)$.
- القرص (D) الذي مركزه ω ونصف قطره r هو مجموعة النقاط من المستوي حيث: $\omega n\leq r$.
- وتر الدائرة هو قطعة مستقيم طرفاها نقطتان من الدائرة.
- قطر الدائرة هو وتر يشمل مركزها، وهو أطول وتر فيها.
- حامل قطر دائرة يسمّى مستقيما قطريّا.
- قطر قرص هو قطر الدائرة التي تحدّه.
- مركز الدائرة هو مركز تناظر لها.
- كلّ مستقيم قطريّ لدائرة هو محور تناظر لها.
- طول دائرة يساوي جداء طول قطرها والعدد π.
- طول قوس دائرة يساوي جداء طول نصف قطرها وقيسها بالراديان. π راديان = 180 درجة = 200 غراد.
- مساحة القرص تساوي جداء مربّع نصف قطره والعدد π.
- القيمة المقرّبة للعدد π:

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640629620899 56280…

في كلّ ما يأتي، المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i}:\vec{j}\right)$.

معادلة دائرة:

معادلة دائرة عُلِمَ مركزُها ونصفُ قُطرِها:

ω نقطة إحداثيّاها $(x_0; y_0)$ وα عدد حقيقيّ موجب تمامًا.

الدائرة (c) التي مركزها ω ونصف قطرها α هي مجموعة النقاط n من المستوي حيث: $\omega n=\alpha$.

مهما كانت النقطة $n(x; y)$ من المستوي لدينا:

$$\begin{aligned} n \in (c) &\Leftrightarrow \omega n = \alpha \\ &\Leftrightarrow \omega n^2 = \alpha^2 \\ &\Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \alpha^2 \end{aligned}$$

إذن:

لكلّ دائرة (c) مركزها $\omega(x_0; y_0)$ ونصف قطرها α معادلة من الشكل:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \alpha^2$$

يمكن كتابة المعادلة السابقة على الشكل التالي:

$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0{}^2 + y_0{}^2 - \alpha^2$ أي: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ بوضع: $a=-2x_0$، $b=-2y_0$، $c=x_0{}^2+y_0{}^2-\alpha^2$، ومنه:

لكلّ دائرة معادلة من الشكل: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ حيث: a، b، c أعداد حقيقيّة معطاة.

معادلة دائرة عُلِمَ قُطرُها:

a و b نقطتان متمايزتان ثابتتان، (c) الدائرة التي قطرها $[ab]$؛ يمكن تعيين معادلة لهذه الدائرة وذلك بتحديد مركزها الذي هو منتصف قطعة المستقيم $[ab]$ ونصف قطرها الذي هو $\frac{ab}{2}$.

مجموعة النقاط n من المستوي بحيث: $\overrightarrow{na} \cdot \overrightarrow{nb} = 0$ هي الدائرة التي قطرها $[ab]$ أي:

$$n \in (c) \Leftrightarrow \overrightarrow{na} \cdot \overrightarrow{nb} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x_a - x) \cdot (x_b - x) + (y_a - y) \cdot (y_b - y) = 0$$

مجموعة النقاط n من المستوي حيث $x^2+y^2+ax+by+c= 0$:

رأينا فيما سبق أنّ لكلّ دائرة معادلة من الشكل: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ (1)

والسؤال الذي يطرح نفسه هنا هو: **هل كلّ معادلة من الشكل (1) هي معادلة لدائرة؟**

لدينا:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - c$$

لنسمِّ ω النقطة التي إحداثيّاها $\left(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2}\right)$؛ من المعلوم أنّه من أجل كلّ نقطة $n(x;y)$ من المستوي: $\omega n^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2$ (2).

من (1) و(2) نستنتج:

$$(1)\Leftrightarrow \omega n^2=\frac{a^2+b^2}{4}-c$$

المناقشة:

لتكن G مجموعة النقاط n من المستوي التي تحقّق إحداثيّاها المعادلة (1).

- إذا كان: $\frac{a^2+b^2}{4}-c<0$ تكون: $G=\phi$.
- إذا كان: $\frac{a^2+b^2}{4}-c=0$ تكون: $G=\{\omega\}$.
- إذا كان: $\frac{a^2+b^2}{4}-c>0$ تكون: G هي الدائرة التي مركزها ω ونصف قطرها $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}-c}$.

إذن:

إذا كانت ω النقطة ذات الإحداثيّتين $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ فإنّ مجموعة النقاط $n(x,y)$ حيث: $x^2+y^2+ax+by+c=0$ هي إمّا المجموعة الخالية أو المجموعة $\{\omega\}$ أو الدائرة التي مركزها ω ونصف قطرها: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}-c}$.