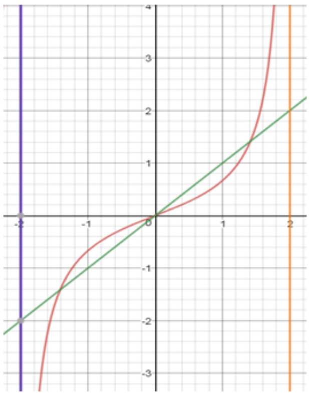
حلول امتحان الرياضيات للصف الثالث الثانوي العلمي / المنهاج الحديث

الدورة الثانية – 2017 .. اعداد المدرس سام علي حمدان



أولاً – السؤال الأول : تأمل الشكل المرسوم جانباً

حيث C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]-2\,,+2[$ و المطلوب :

١- احسب $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

٢- أوجد $f(0)$ و $f'(0)$

٣- هل التابع فردي أم زوجي ؟

٤- اكتب معادلة المماس Δ .

الحل : $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

لدينا $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ لأن المماس في النقطة $o\,(0\,,0)$ هو المنصف الأول و ميله يساوي الواحد .

من خلال الرسم نجد أن التابع متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات فالتابع فردي .

معادلة المماس $y = x$

المدرس سام علي حمدان

السؤال الثاني : اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d و d'

$$d : \begin{cases} x = & t+1 \\ y = & -3t+2 \\ z = & -3t+3 \end{cases} \quad t \in R \qquad \text{و} \qquad d' : \begin{cases} x = & s \\ y = & -3s-3 \\ z = & -s+1 \end{cases} \quad S \in R$$

و هل المستقيمان d و d' يقعان في مستوي واحد ؟ علل اجابتك .

الحل : لدينا $\vec{u} = (1\,,-3\,,-3)$ شعاع موجه للمستقيم d و لدينا $\vec{v} = (1\,,-3\,,-1)$ شعاع موجه للمستقيم d'

نلاحظ عدم تناسب مركبات الشعاعين و بالتالي هما غير مرتبطان خطياً فالمستقيمان d و d' إما متقاطعين أو متخالفين .

نحل جملة المعادلتين

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases} \quad \begin{cases} t - s & = -1 \\ t - s & = \frac{5}{3} \\ 3t - s & = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} t+1 = & s \\ -3t+2 & = -3s-3 \\ -3t+3 & = -s+1 \end{cases}$$

نلاحظ التناقض بين المعادلة (1) و المعادلة (2) فجملة المعادلات متناقضة و ليس لها حلول

بالتالي المستقيمان d و d' متخالفان و لا يقعان في مستوي واحد .

المدرس سام علي حمدان

السؤال الثالث : حل المعادلة التفاضلية الآتية : $2y' + 3y = 0$ و الخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(ln4 , 1)$.

الحل : المعادلة من الشكل $y' = ay$ يعطي $y' = -\frac{3}{2}y$ و حلها العام من الشكل $f(x) = k\,e^{ax}$

و بالتالي الحل العام للمعادلة $f(x) = k\,e^{-\frac{3}{2}x}$ ، نعوض احداثيات $A(ln4 , 1)$ في الحل العام

المدرس سام علي حمدان

نجد $1 = k\,e^{-\frac{3}{2}ln 4} \Rightarrow 1 = k\,e^{-\frac{3}{2}ln 2^2} \Rightarrow 1 = k\,e^{-\frac{3}{2}\times 2ln 2} \Rightarrow 1 = k\,e^{-3ln 2} \Rightarrow 1 = k\,e^{-ln 2^3}$

و منه $1 = k\,e^{-ln8} \Rightarrow 1 = k\,e^{ln\frac{1}{8}} \Rightarrow 1 = k\,\frac{1}{8} \Rightarrow k = 8$ يعطي $f(x) = 8\,e^{-\frac{3}{2}x}$

السؤال الرابع : نتأمل في المعلم المتجانس $(o , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ النقطتين $A(2 , 0 , 1)$ و $B(1 , -2 , 1)$

و المطلوب : اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

نفرض النقطة $M(x , y , z)$ متساوية البعد عن كل من النقطتان A و النقطة B عندها يكون $MB^2 = MA^2$

و منه $(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2 + (z_A - z_M)^2 = (x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2 + (z_B - z_M)^2$

و منه $(2 - x_M)^2 + (0 - y_M)^2 + (1 - z_M)^2 = (1 - x_M)^2 + (-2 - y_M)^2 + (1 - z_M)^2$

يعطي $x^2 + 4 - 4x + y^2 = x^2 + 1 - 2x + y^2 + 4 + 4y$

المدرس سام علي حمدان

بعد الاصلاح نجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هي : $2x + 4y + 1 = 0$

ثـانيـاً : حل التمارين الأربعة التالية :

التمرين الأول : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق ما يأتي : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

١ - أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

٢ - أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ و استنتج أنها متقاربة و احسب نهايتها .

الحل : لدينا بعد الضرب و التقسيم على المرافق $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ و منه $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

و باعتبار $n \geq 0$ فإن $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$ و منه $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$

و منه $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ وبالتالي $u_{n+1} < u_n$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

الطلب الثاني : أياً كان $n \geq 0$ فإن $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$ و منه $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 0$ .. (1)

و لدينا $\sqrt{n+1} \geq 1$ و منه $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1$ يعطي $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 1$ .. (2)

من (1) و (2) نجد أن $0 \leq u_n \leq 1$

المدرس سام علي حمدان

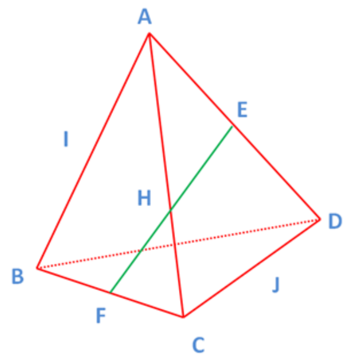
أي أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة بالأدنى بالعدد صفر و باعتبارها متناقصة فهي متقاربة .

نهاية المتتالية $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = 0$

التمرين الثاني : $ABCD$ رباعي وجوه ، a عدد حقيقي ، $I\,,J$ هما بالترتيب منتصفا $[AB]$ و $[CD]$

و $E\,,F$ نقطتان تحققان العلاقتين : $\overrightarrow{AE}=a\,\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF}=a\,\overrightarrow{BC}$

و أخيراً H هي منتصف $[EF]$. أثبت أن $I\,,J\,,H$ تقع على استقامة واحدة .



الحل : لإثبات وقوع النقاط $I\,,J\,,H$ تقع على استقامة واحدة

يكفي إثبات أن H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $I\,,J$ انطلاقاً من العلاقة $\overrightarrow{AE}=a\,\overrightarrow{AD}$

نجد أن $\overrightarrow{AE}=a\,\overrightarrow{AE}+a\,\overrightarrow{ED}\Rightarrow\overrightarrow{AE}-a\,\overrightarrow{AE}+a\,\overrightarrow{DE}=0\Rightarrow(1-a)\overrightarrow{AE}+a\,\overrightarrow{DE}=0$

و بالتالي E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A\,,1-a)$ و $(D\,,a)$

بنفس الأسلوب و انطلاقاً من العلاقة $\overrightarrow{BF}=a\,\overrightarrow{BC}$ $\boxed{\text{المدرس سام علي حمدان}}$

نجد أن $\overrightarrow{BF}=a\,\overrightarrow{BF}+a\,\overrightarrow{FC}\Rightarrow\overrightarrow{BF}-a\,\overrightarrow{BF}+a\,\overrightarrow{CF}=0\Rightarrow(1-a)\overrightarrow{BF}+a\,\overrightarrow{CF}=0$

و بالتالي F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B\,,1-a)$ و $(C\,,a)$

بما أن H هي منتصف $[EF]$ فإنها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E\,,1)$ و $(F\,,1)$

و حسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A\,,1-a)\,,(B\,,1-a)\,,(D\,,a)\,,(C\,,a)$

بما أن I هي منتصف $[AB]$ فإنها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A\,,1-a)\,,(B\,,1-a)$

بما أن J هي منتصف $[CD]$ فإنها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D\,,a)\,,(C\,,a)$

بالتالي H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I\,,2-2a)\,,(J\,,2a)$ .. يعطي النقاط $I\,,J\,,H$ تقع على استقامة واحدة .

التمرين الثالث : لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي $z=-1+i$ و المطلوب :

١ - أثبت أن z^8 عدداً حقيقياً .

٢ - جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$ و اكتبه بالشكل الأسي .

الحل : لدينا $z=-1+i$ يعطي $z^2=(-1+i)^2=2i$

$z^2=[(z)^2]^4=(2i)^4=(2i)^2.(2i)^2=-4\times-4=16\in R$ .. يعطي z عدداً حقيقياً .

❖ لدينا $z'-z_A=e^{i\theta}(z-z_A)$ و منه $z'-1-i=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-1-i)$

يعطي $z'-1-i=(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})(-1+i-1-i)$ $\boxed{\text{المدرس سام علي حمدان}}$

يعطي $z'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(-2)+1+i$ يعطي $z'=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i+1+i$

يعطي $z' = -\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}i + i$ يعطي $z' = (-\sqrt{2} + 1)(1 + i)$

يعطي $z' = (\sqrt{2} - 1)(-1 - i) = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2})(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})$

باعتبار $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4}$ و منه زاوية العدد العقدي z' هي $\frac{5\pi}{4}$

و $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} = r > 0$ المدرس سام علي حمدان

يصبح الشكل الأسي لدينا $z' = re^{i\theta} \Rightarrow z' = (2 - \sqrt{2})e^{i\frac{5\pi}{4}}$

التمرين الرابع : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\setminus\{-3\}$ وفق التالي : $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x+3}$

١ - اكتب التابع $f(x)$ بالشكل $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$

٢ - أثبت أن المستقيم $y = ax + b$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

٣ - احسب $\int_0^2 f(x)dx$.

الحل : بالقسمة الأقليدية نجد : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+3}$

لدينا المستقيم $y = x - 1$ و بالتالي $f(x) - y = \frac{1}{x+3}$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+3}\right) = 0$

فالمستقيم $y = x - 1$ مقارب مائل لـ C بجوار $+\infty$ المدرس سام علي حمدان

التكامل : $I = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x - 1 + \frac{1}{x+3})dx$ و باعتبار $x \in [0,2]$ كانت $x + 3 > 0$

يعطي $I = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + ln(x+3)\right]_0^2 = [2 - 2 + ln5] - [ln3] = ln\frac{5}{3}$

ثالثاً – حل المسألتين التاليتين :

المسألة الأولى : ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق التالي :

$f(x) = x + x(ln x)^2$ و ليكن $g(x) = (ln x + 1)^2$ و المطلوب :

١ - أوجد نهاية التابع عند الصفر و عند $+\infty$

٢ - أثبت أن $f'(x) = g(x)$

٣ - حل المعادلة $g(x) = 0$

٤ - نظّم جدول بتغيرات $f(x)$

٥ - اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x = \frac{1}{e}$ و ارسم المماس Δ و الخط C

الحل : $f(x) = x + x(ln x)^2 = x + (\sqrt{x})^2[ln(\sqrt{x})^2]^2$

يعطي $f(x) = x + [\sqrt{x}\, ln(\sqrt{x})^2]^2 = x + [2\sqrt{x}\, ln\sqrt{x}]^2$ المدرس سام علي حمدان

بما أن $\lim_{x\to0}(\sqrt{x}\, ln\sqrt{x}) = 0$ يعطي $\lim_{x\to0} f(x) = 0$ و لدينا وضوحاً $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

التابع $f(x)$ مستمر و اشتقاقي على مجموعة تعريفه .. نعلم أن : $[(ln x)^2]' = 2ln x \times \frac{1}{x}$

يصبح مشتق التابع $f'(x) = 1 + (ln x)^2 + 2(ln x) \times \frac{1}{x} \times x = 1 + (ln x)^2 + 2(ln x)$

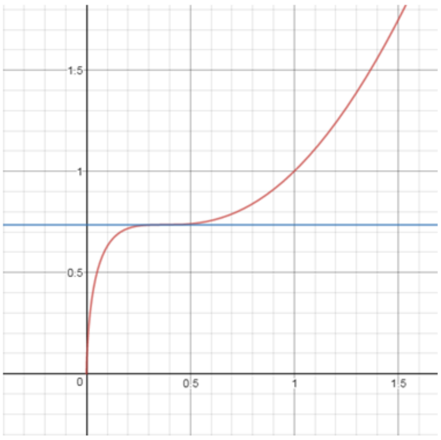
يعطي لدينا $f'(x) = [1 + lnx]^2 = g(x)$ المدرس سام علي حمدان

حل المعادلة $g(x) = 0 \Rightarrow lnx = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

دراسة تغيرات $f(x)$ ، لدينا $g(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ و منه $x = \frac{1}{e}$ يعطي $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	$+\infty$
$f(x)$	‖ 0	↗	$\frac{2}{e}$	↗	$+\infty$

الرسم



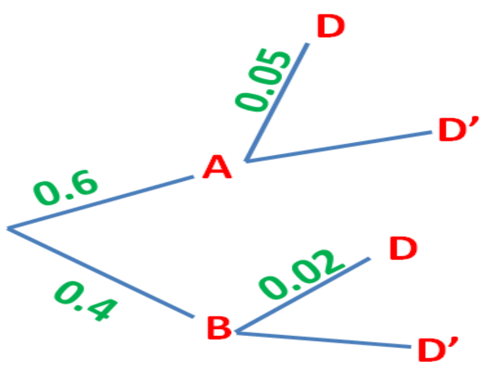
معادلة المماس $y - f\left(\frac{1}{e}\right) = f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right)$

و منه معادلة Δ : $y = \frac{2}{e}$

المسألة الثانية : يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع الأقلام . عندما ورد طلب لعدد من الأقلام قدره 1000 قلم ، صنعت الورشة A منها 600 قلماً و صنعت البقية الورشة B . هناك نسبة 5% من أقلام الورشة A غير صالحة للاستعمال ، في حين تكون نسبة 2% من أقلام الورشة B غير صالحة للاستعمال ، نسحب عشوائياً قلماً من الطلب . نرمز بالرمز A إلى الحدث << القلم مصنوع في الورشة A >> و بالرمز B إلى الحدث << القلم مصنوع في الورشة B >> و بالرمز D إلى << القلم غير صالح للاستعمال >> .

١ - اعط تمثيلاً شجرياً للتجربة .
٢ - احسب احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال .
٣ - إذا كان القلم صالحاً للاستعمال فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A
٤ - نسحب عشوائياً من الورشة A قلمين معاً و ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الأقلام المسحوبة الصالحة للاستعمال ، احسب $P(X = 0)$.

الحل : 1- المخطط الشجري



احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال هو $P(D')$

المدرس سام علي حمدان

لدينا $P(A) = \frac{600}{100} = 0.6$ و $P(B) = \frac{400}{100} = 0.4$

لدينا أيضاً $P(D'|A) = 1 - 0.05 = 0.95$ و $P(D'|B) = 1 - 0.02 = 0.98$

يعطي $P(D') = P(A \cap D') + P(B \cap D')$

يعطي $P(D') = P(A) \times P(D'|A) + P(B) \times P(D'|B)$

و منه $P(D') = 0.6 \times 0.95 + 0.4 \times 0.98 = 0.962$

٣ - لدينا $P(A|D') = \frac{P(A \cap D')}{P(D')} = \frac{0.6 \times 0.95}{0.962} = \frac{285}{481}$

٤ - لدينا $X = \{0, 1, 2\}$ و $P(X = 0)$ هو احتمال سحب قلم غير صالح
عدد الأقلام غير الصالحة من الورشة A يساوي : $600 \times 0.05 = 30$
باعتبار السحب معاً .. لذلك نستخدم التوافيق

و منه $P(X = 0) = \frac{\binom{30}{2}}{\binom{600}{2}} = \frac{30 \times 29}{600 \times 599} = \frac{29}{11980}$

انتهى الحل مع تحيات المدرس سام علي حمدان

طرطوس – الدريكيش في 6 / 8 / 2017

0994 168 878